УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ МАЛОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

В.В. Абрамов
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

STABILITY OF SMALL PERIODIC SOLUTION

V.V. Abramov

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью в терминах свойств нелинейного приближения ее оператора монодромии получен признак ветвления малого устойчивого по параметру периодического решения.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, малое периодическое решение, устойчивость, оператор монодромии.

For system of the ordinary differential equations with smooth right part in terms of properties of nonlinear approach of her operator of a monodromy the sign of branching of the small periodic solution stability on parameter is received.

Keywords: system differential equations, small periodic solution, stability, operator of monodromy.

Рассмотрим в R^n систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x,\mu),\ \ f(t,0_n,\mu) \equiv 0_n, \qquad (1)$$

с ω-периодической по t правой частью, гладко зависящей от x и от малого параметра $\mu \in R^m$. Допустим, система (1) локально удовлетворяет условиям существования и единственности решения $x(t,a,\mu)$, $x(0,a,\mu) = a$. Кроме того, решения продолжаемы по t на промежуток $[0,\omega]$.

Определение 1. Решение $x(t, a^*, \mu^*)$ – малое, если возможна параметризация $a^* = a(\alpha) \neq 0_n$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} a^* = 0_n$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \mu^* = 0_m$. При этом пара $(a'(0), \mu'(0))$ – направление ветвления малого решения.

Пусть $\|*\|$ – какая-либо норма в R^n и согласованная с ней матричная норма.

Определение 2. Малое решение α-устойчиво, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при всех $u : \|u\| < \delta_1$, $\alpha : 0 < \alpha < \delta_2$ и $t > 0$ справедлива оценка $\|x(t, a^* + u, \mu^*) - x(t, a^*, \mu^*)\| < \varepsilon$.

Задача. Найти условия, при которых система вида (1) имеет малое α-устойчивое ω-периодическое решение.

Как известно [1], начальное значение периодического решения является неподвижной точкой оператора монодромии $Ua : a \to x(\omega,a,\mu)$. Более того, свойство устойчивости периодического решения по Ляпунову можно установить по свойствам степеней оператора монодромии [1].

Определение 2 является по существу модификацией свойства устойчивости по параметру, исследованного на основе комбинации методов усреднения и функций Ляпунова [2]. При этом предполагалось, что имеет место критический случай, когда при нулевом значении параметра известна функция Ляпунова, обеспечивающая неасимптотическую устойчивость нулевого решения. Заметим, что свойство устойчивости по параметру естественно связано с ветвлением малого решения от нулевого. В отличие от устойчивости по Ляпунову, свойство устойчивости по параметру нулевого решения наследуется малым ограниченным решением. Если же малое решение оказывается устойчивым по параметру, то нулевое решение устойчиво, по крайней мере, условно.

Итак, поставленную здесь задачу будем решать по свойствам оператора монодромии. С этой целью используем приведенные ниже утверждения.

Лемма 1. Малое ω-периодическое решение $x(t,a^*,\mu^*)$ является α-устойчивым тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1, \delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|u\| < \delta_1$, $0 < \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in N$ определено значение $x(s\omega, a^* + u, \mu^*)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a^* + u, \mu^*) - a^*\| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость данного утверждения очевидна, если в определении 1 взять $t = s\omega$ и учесть, что $x(\omega, a^*, \mu^*) = a^*$.

Достаточность устанавливается по схеме доказательства леммы 9.1 [1]. В силу локальной продолжаемости решений системы (1), δ_1 и δ_2 можно считать такими, что любое решение

$x(t, x(s\omega, a^*+u, \mu^*), \mu^*)$ для всех $s \in N$ определено при $t \in [0, \omega]$, то есть продолжаемо вправо от $s\omega$. Значит любое решение $x(t, a^*+u, \mu^*)$ нелокально продолжаемо. В силу непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных значений и параметров можно считать, что $\delta_1 \le \varepsilon$ и $\|x(\tau, a^*+u, \mu^*) - x(\tau, a^*, \mu^*)\| < \varepsilon$ при любых $\tau \in [0, \omega)$, если $\|u\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$. Следовательно, по групповому свойству динамической системы для произвольного $t = s\omega + \tau$, $s = [t/\omega]$, при всех $u : \|u\| < \delta_1$, $\alpha : 0 < \alpha < \delta_2$ получим оценку:

$$\|x(t, a^*+u, \mu^*) - x(t, a^*, \mu^*)\| =$$
$$= \|x(\tau, x(s\omega, a^*+u, \mu^*), \mu^*) - x(\tau, a^*, \mu^*)\| < \varepsilon.$$

Итак, по определению 2 решение $x(t, a^*, \mu^*)$ α-устойчиво. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|u\| < \delta_1$, $0 < \alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a^*+u, \mu^*) - a^*\| \le \|u\|$, то малое ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ α-устойчиво.

В справедливости леммы 2 нетрудно убедиться по индукции, применив лемму 1.

Определим локальную структуру оператора монодромии для системы (1), пользуясь условием достаточной гладкости ее правой части.

Выделим линейную часть рассматриваемой системы (1) и запишем ее в виде

$$\dot{x} = A(t)x + \widetilde{f}(t, x, \mu), \qquad (1)$$

где $A(t) = f'_x(t, 0_n, 0_m)$, $\widetilde{f}(t, x, \mu) = f(t, x, \mu) - A(t)x.$ При этом $\widetilde{f}'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nn}$. Решение системы (1) представимо в виде

$$x(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) +$$
$$+ (y(t, a, \mu) - y_1(t, a, \mu)).$$

Здесь $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$; вектор-функция $y(t, a, \mu) = = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\widetilde{f}(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu)d\tau$ – решение системы $\dot{y} = A(t)y + \widetilde{f}(t, X(t)a + y, \mu)$; $y_1(t, a, \mu) = = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\widetilde{f}(\tau, X(\tau)a, \mu)d\tau$. Предположим, что вектор-функция $y_1(\omega, a, \mu)$ допускает выделение главной однородной части от начального значения и параметра:

$$y_1(\omega, a, \mu) = p(a, \mu) + \widetilde{p}(a, \mu),$$

где $p(\alpha a, \mu) = \alpha^k p(a, \mu)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{-k}\|\widetilde{p}(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$ (в смысле равномерной сходимости), $k \in N$, $k > 1$. Тогда в силу представления решения получим, что вектор-функция $\varphi(a, \mu) = y(\omega, a, \mu) - y_1(\omega, a, \mu)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{-k}\|\varphi(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$.

Итак, решая поставленную здесь задачу, будем предполагать, что для системы (1) оператор монодромии достаточно гладко зависит от a, от μ и имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \psi(a, \mu), \qquad (2)$$

$X = X(\omega)$ – матрица монодромии соответствующей линейной однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, $\psi(a, \mu) = \widetilde{p}(a, \mu) + \varphi(a, \mu)$; выполняется необходимое условие ветвления ω-периодического решения [1]

$$\det(X - E) = 0, \qquad (3)$$

и, кроме того, имеет место критический случай устойчивости по линейному приближению

$$\rho(X) = 1 \qquad (4)$$

(здесь $\rho(*)$ – спектральный радиус матрицы).

Допустим, существует пара (a_0, μ_0), $a_0 \in \mathrm{int}\{\ker[X - E] \setminus \{0_n\}\}$, $\mu_0 \ne 0_m$, удовлетворяющая условиям

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n, \qquad (5)$$

$$rang P = n, \qquad (6)$$

где $P = [p'_a(a_0, \mu_0)K \;\; p'_\mu(a_0, \mu_0)]$ – $n \times m$-матрица, K – фундаментальная матрица решений линейной алгебраической системы $[X - E]a = 0_n$. Предположим, существуют числа $c > 0$ и $b > 0$, для которых при всех $\lambda : \|\lambda\| = c$ и малых $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|X + \alpha\widetilde{P}(\lambda)\| \le 1 - \alpha b, \qquad (7)$$

$\widetilde{P}(u)$ – какая-либо $n \times n$-матрица из условия $\widetilde{P}(u)u = p(a_0 + u, \mu_0)$.

Теорема 1. Если выполняются условия (3)–(7), то система (1)–(2) имеет α-устойчивое малое ω-периодическое решение с направлением ветвления (a_0, μ_0).

Доказательство. С учетом представления (2) условие, связывающее начальное значение и параметр, определяющие ω-периодическое решение, примет вид

$$x(\omega, a, \mu) - a =$$
$$= [X - E]a + p(a, \mu) + \psi(a, \mu) = 0_n. \qquad (8)$$

В силу (6) выберем $a_0 + Kz$, $\overline{\mu} \in R^m$ так, чтобы

$$Pcolon(z, \overline{\mu}) = Bv, \ \det B \ne 0, \qquad (9)$$

где B – $n \times n$-матрица, составленная из линейно независимых столбцов матрицы P, $v \in R^n$ – вектор, составленный из ненулевых элементов вектора $(z, \overline{\mu})$. Допустим, в условии (8) $a = \alpha(a_0 + Kz)$, $\mu = \alpha(\mu_0 + \overline{\mu})$, $\alpha \ge 0$ – числовой параметр. Обозначим $\widetilde{\psi}(\alpha, v) = \alpha^{-k}\psi(\alpha(a_0 + Kz), \alpha(\mu_0 + \overline{\mu})) + (p(a_0 + Kz, \mu_0 + \overline{\mu}) - Bv)$ при $\alpha > 0$. Из представления (2) следует, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\widetilde{\psi}(\alpha, 0_n) = 0_n$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\widetilde{\psi}'_v(\alpha, 0_n) = 0_{nn}$. Поэтому можем предполагать справедливой определенность $\widetilde{\psi}(\alpha, v)$ по непрерывности

$$\widetilde{\psi}(0, 0_n) = 0_n, \ \widetilde{\psi}'_v(0, 0_n) = 0_{nn}. \qquad (10)$$

Таким образом, по условиям (5) и (9) получим уравнение с локально гладкой левой частью, связывающее переменные α и v:

$$F(\alpha, v) = Bv + \widetilde{\psi}(\alpha, v) = 0_n. \qquad (11)$$

В силу (9) и (10) имеем $F(0, 0_n) = 0_n$, $F'_v(0, 0_n) = B$. Значит по теореме о неявной функции существует такое $\Delta > 0$, что уравнение (11) определяет однозначную функцию $v = v(\alpha)$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} v(\alpha) \equiv 0_n$. Зная $v = v(\alpha)$, составим векторы $z = z(\alpha)$ и $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\alpha)$, а затем и векторы $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \overline{\mu}(\alpha))$, $0 < \alpha < \Delta$, удовлетворяющие условию (8). Так как $\|a_0\| > 0$ по условию (5), то без ограничения общности можно считать, что $\|a_0\| > \|Kz(\alpha)\|$ при $0 < \alpha < \Delta$, то есть $a^* \neq 0_n$ при $0 < \alpha < \Delta$. Итак, система (1)–(2) имеет малое ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$.

Определим характер устойчивости решения $x(t, a^*, \mu^*)$ с помощью леммы 2.

Пусть $d(\alpha, u) = x(\omega, a^* + u, \mu^*) - a^*$. Так как $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\alpha \in (0, \Delta)$, то $[X - E]a^* \equiv 0_n$. Очевидно $x(\omega, a^*, \mu^*) - a^* \equiv 0_n$, а значит $p(a^*, \mu^*) + \psi(a^*, \mu^*) \equiv 0_n$. Поэтому в силу равенства (2) справедливо представление $d(\alpha, u) = Xu + p(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0) + \widetilde{\psi}(\alpha, u)$, где $\widetilde{\psi}(\alpha, u) = (p(a^* + u, \mu^*) - p(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0)) + \psi(a^* + u, \mu^*)$.

Допустим, $u = \alpha\lambda$, $\|\lambda\| = c$. Так как $\widetilde{\psi}(\alpha, 0_n) \equiv 0_n$, то возможен выбор такой $n \times n$-матрицы $\widetilde{\Psi}(\alpha)$, что $\widetilde{\psi}(\alpha, u) = \widetilde{\Psi}(\alpha)u$. При этом выполняется условие $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{1-k}\|\widetilde{\Psi}(\alpha)\| \equiv 0$. Следовательно,

$$d(\alpha, u) = [X + \alpha^{k-1}\widetilde{P}(\lambda)]u + \widetilde{\Psi}(\alpha)u. \qquad (12)$$

Произвольно выберем δ_1: $0 < \delta_1 \le \Delta$. Так как $\|X + \alpha^{k-1}\widetilde{P}(\lambda)\| \le 1 - \alpha^{k-1}b$ по условию (7) и $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{1-k}\|\widetilde{\Psi}(\alpha)\| \equiv 0$, то можем предполагать, что $\|\widetilde{\Psi}(\alpha)\| < \alpha^{k-1}b/2$ при $\alpha < \delta_2 = \delta_1 / c$. Тогда из представления (12) в силу введенного обозначения при $u : \|u\| < \delta_1$ и $\alpha < \delta_2$ получим оценку

$$\|x(\omega, a^* + u, \mu^*) - a^*\| \le [1 - \alpha^{k-1}b/2]u. \qquad (13)$$

Итак, по лемме 2 решение $x(t, a^*, \mu^*)$ является α-устойчивым. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траектория дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. **Хапаев М.М.** Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.

Абрамов Владимир Викторович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,

тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru