УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ МАЛОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

В.В. Абрамов
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

STABILITY OF SMALL PERIODIC SOLUTION

V.V. Abramov

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью в терминах свойств нелинейного приближения ее оператора монодромии получен признак ветвления малого устойчивого по параметру периодического решения.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, малое периодическое решение, устойчивость, оператор монодромии.

For system of the ordinary differential equations with smooth right part in terms of properties of nonlinear approach of her operator of a monodromy the sign of branching of the small periodic solution stability on parameter is received.

Keywords: system differential equations, small periodic solution, stability, operator of monodromy.

Рассмотрим в R^n систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n, \qquad (1)$$

с ω-периодической по t правой частью, гладко зависящей от x и от малого параметра $\mu \in R^m$. Допустим, система (1) локально удовлетворяет условиям существования и единственности решения $x(t, a, \mu)$, $x(0, a, \mu) = a$. Кроме того, решения продолжаемы по t на промежуток $[0, \omega]$.

Определение 1. Решение $x(t, a^*, \mu^*)$ – малое, если возможна параметризация $a^* = a(\alpha) \neq 0_n$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} a^* = 0_n$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mu^* = 0_m$. При этом пара $(a'(0), \mu'(0))$ – направление ветвления малого решения.

Пусть $\|*\|$ – какая-либо норма в R^n и согласованная с ней матричная норма.

Определение 2. Малое решение α-устойчиво, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при всех $u : \|u\| < \delta_1$, $\alpha : 0 < \alpha < \delta_2$ и $t > 0$ справедлива оценка $\|x(t, a^* + u, \mu^*) - x(t, a^*, \mu^*)\| < \varepsilon$.

Задача. Найти условия, при которых система вида (1) имеет малое α-устойчивое ω-периодическое решение.

Как известно [1], начальное значение периодического решения является неподвижной точкой оператора монодромии $Ua : a \to x(\omega, a, \mu)$. Более того, свойство устойчивости периодического решения по Ляпунову можно установить по свойствам степеней оператора монодромии [1].

Определение 2 является по существу модификацией свойства устойчивости по параметру, исследованного на основе комбинации методов усреднения и функций Ляпунова [2]. При этом предполагалось, что имеет место критический случай, когда при нулевом значении параметра известна функция Ляпунова, обеспечивающая неасимптотическую устойчивость нулевого решения. Заметим, что свойство устойчивости по параметру естественно связано с ветвлением малого решения от нулевого. В отличие от устойчивости по Ляпунову, свойство устойчивости по параметру нулевого решения наследуется малым ограниченным решением. Если же малое решение оказывается устойчивым по параметру, то нулевое решение устойчиво, по крайней мере, условно.

Итак, поставленную здесь задачу будем решать по свойствам оператора монодромии. С этой целью используем приведенные ниже утверждения.

Лемма 1. Малое ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ является α-устойчивым тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1, \delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|u\| < \delta_1$, $0 < \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in N$ определено значение $x(s\omega, a^* + u, \mu^*)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a^* + u, \mu^*) - a^*\| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость данного утверждения очевидна, если в определении 1 взять $t = s\omega$ и учесть, что $x(\omega, a^*, \mu^*) = a^*$.

Достаточность устанавливается по схеме доказательства леммы 9.1 [1]. В силу локальной продолжаемости решений системы (1), δ_1 и δ_2 можно считать такими, что любое решение

$x(t, x(s\omega, a^*+u, \mu^*), \mu^*)$ для всех $s \in N$ определено при $t \in [0, \omega]$, то есть продолжаемо вправо от $s\omega$. Значит любое решение $x(t, a^*+u, \mu^*)$ нелокально продолжаемо. В силу непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных значений и параметров можно считать, что $\delta_1 \le \varepsilon$ и $\|x(\tau, a^*+u, \mu^*) - x(\tau, a^*, \mu^*)\| < \varepsilon$ при любых $\tau \in [0, \omega)$, если $\|u\| < \delta_1$, $\alpha < \delta_2$. Следовательно, по групповому свойству динамической системы для произвольного $t = s\omega + \tau$, $s = [t/\omega]$, при всех $u : \|u\| < \delta_1$, $\alpha : 0 < \alpha < \delta_2$ получим оценку:

$$\|x(t, a^*+u, \mu^*) - x(t, a^*, \mu^*)\| =$$
$$= \|x(\tau, x(s\omega, a^*+u, \mu^*), \mu^*) - x(\tau, a^*, \mu^*)\| < \varepsilon.$$

Итак, по определению 2 решение $x(t, a^*, \mu^*)$ α-устойчиво. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если для любого $\delta_1 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при $\|u\| < \delta_1$, $0 < \alpha < \delta_2$ справедлива оценка $\|x(\omega, a^*+u, \mu^*) - a^*\| \le \|u\|$, то малое ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ α-устойчиво.

В справедливости леммы 2 нетрудно убедиться по индукции, применив лемму 1.

Определим локальную структуру оператора монодромии для системы (1), пользуясь условием достаточной гладкости ее правой части.

Выделим линейную часть рассматриваемой системы (1) и запишем ее в виде

$$\dot{x} = A(t)x + \widetilde{f}(t, x, \mu), \qquad (1)$$

где $A(t) = f'_x(t, 0_n, 0_m)$, $\widetilde{f}(t, x, \mu) = f(t, x, \mu) - A(t)x$. При этом $\widetilde{f}'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nn}$. Решение системы (1) представимо в виде

$$x(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) +$$
$$+ (y(t, a, \mu) - y_1(t, a, \mu)).$$

Здесь $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$; вектор-функция $y(t, a, \mu) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\widetilde{f}(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu)d\tau$ – решение системы $\dot{y} = A(t)y + \widetilde{f}(t, X(t)a + y, \mu)$; $y_1(t, a, \mu) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\widetilde{f}(\tau, X(\tau)a, \mu)d\tau$. Предположим, что вектор-функция $y_1(\omega, a, \mu)$ допускает выделение главной однородной части от начального значения и параметра:

$$y_1(\omega, a, \mu) = p(a, \mu) + \widetilde{p}(a, \mu),$$

где $p(\alpha a, \mu) = \alpha^k p(a, \mu)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{-k}\|\widetilde{p}(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$ (в смысле равномерной сходимости), $k \in N$, $k > 1$.

Тогда в силу представления решения получим, что вектор-функция $\varphi(a, \mu) = y(\omega, a, \mu) - y_1(\omega, a, \mu)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{-k}\|\varphi(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$.

Итак, решая поставленную здесь задачу, будем предполагать, что для системы (1) оператор монодромии достаточно гладко зависит от a, от μ и имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \psi(a, \mu), \qquad (2)$$

$X = X(\omega)$ – матрица монодромии соответствующей линейной однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, $\psi(a, \mu) = \widetilde{p}(a, \mu) + \varphi(a, \mu)$; выполняется необходимое условие ветвления ω-периодического решения [1]

$$\det(X - E) = 0, \qquad (3)$$

и, кроме того, имеет место критический случай устойчивости по линейному приближению

$$\rho(X) = 1 \qquad (4)$$

(здесь $\rho(*)$ – спектральный радиус матрицы).

Допустим, существует пара (a_0, μ_0), $a_0 \in \operatorname{int}\{\ker[X - E] \setminus \{0_n\}\}$, $\mu_0 \ne 0_m$, удовлетворяющая условиям

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n, \qquad (5)$$
$$rangP = n, \qquad (6)$$

где $P = [p'_a(a_0, \mu_0)K \;\; p'_\mu(a_0, \mu_0)]$ – $n \times m$-матрица, K – фундаментальная матрица решений линейной алгебраической системы $[X - E]a = 0_n$. Предположим, существуют числа $c > 0$ и $b > 0$, для которых при всех $\lambda : \|\lambda\| = c$ и малых $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|X + \alpha\widetilde{P}(\lambda)\| \le 1 - \alpha b, \qquad (7)$$

$\widetilde{P}(u)$ – какая-либо $n \times n$-матрица из условия $\widetilde{P}(u)u = p(a_0 + u, \mu_0)$.

Теорема 1. Если выполняются условия (3)–(7), то система (1)–(2) имеет α-устойчивое малое ω-периодическое решение с направлением ветвления (a_0, μ_0).

Доказательство. С учетом представления (2) условие, связывающее начальное значение и параметр, определяющие ω-периодическое решение, примет вид

$$x(\omega, a, \mu) - a =$$
$$= [X - E]a + p(a, \mu) + \psi(a, \mu) = 0_n. \qquad (8)$$

В силу (6) выберем $a_0 + Kz$, $\overline{\mu} \in R^m$ так, чтобы

$$Pcolon(z, \overline{\mu}) = Bv, \ \det B \ne 0, \qquad (9)$$

где B – $n \times n$-матрица, составленная из линейно независимых столбцов матрицы P, $v \in R^n$ – вектор, составленный из ненулевых элементов вектора $(z, \overline{\mu})$. Допустим, в условии (8) $a = \alpha(a_0 + Kz)$, $\mu = \alpha(\mu_0 + \overline{\mu})$, $\alpha \ge 0$ – числовой параметр. Обо-

значим $\widetilde{\psi}(\alpha, v) = \alpha^{-k}\psi(\alpha(a_0 + Kz), \alpha(\mu_0 + \overline{\mu})) + +(p(a_0 + Kz, \mu_0 + \overline{\mu}) - Bv)$ при $\alpha > 0$. Из представления (2) следует, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\widetilde{\psi}(\alpha, 0_n) = 0_n$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\widetilde{\psi}'_v(\alpha, 0_n) = 0_{nn}$. Поэтому можем предполагать справедливой определенность $\widetilde{\psi}(\alpha, v)$ по непрерывности

$$\widetilde{\psi}(0, 0_n) = 0_n,\ \widetilde{\psi}'_v(0, 0_n) = 0_{nn}. \qquad (10)$$

Таким образом, по условиям (5) и (9) получим уравнение с локально гладкой левой частью, связывающее переменные α и v:

$$F(\alpha, v) = Bv + \widetilde{\psi}(\alpha, v) = 0_n. \qquad (11)$$

В силу (9) и (10) имеем $F(0, 0_n) = 0_n$, $F'_v(0, 0_n) = B$. Значит по теореме о неявной функции существует такое $\Delta > 0$, что уравнение (11) определяет однозначную функцию $v = v(\alpha)$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} v(\alpha) \equiv 0_n$. Зная $v = v(\alpha)$, составим векторы $z = z(\alpha)$ и $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\alpha)$, а затем и векторы $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \overline{\mu}(\alpha))$, $0 < \alpha < \Delta$, удовлетворяющие условию (8). Так как $\|a_0\| > 0$ по условию (5), то без ограничения общности можно считать, что $\|a_0\| > \|Kz(\alpha)\|$ при $0 < \alpha < \Delta$, то есть $a^* \neq 0_n$ при $0 < \alpha < \Delta$. Итак, система (1)–(2) имеет малое ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$.

Определим характер устойчивости решения $x(t, a^*, \mu^*)$ с помощью леммы 2.

Пусть $d(\alpha, u) = x(\omega, a^* + u, \mu^*) - a^*$. Так как $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\alpha \in (0, \Delta)$, то $[X - E]a^* \equiv 0_n$. Очевидно $x(\omega, a^*, \mu^*) - a^* \equiv 0_n$, а значит $p(a^*, \mu^*) + \psi(a^*, \mu^*) \equiv 0_n$. Поэтому в силу равенства (2) справедливо представление $d(\alpha, u) = Xu + + p(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0) + \widetilde{\psi}(\alpha, u)$, где $\widetilde{\psi}(\alpha, u) = = (p(a^* + u, \mu^*) - p(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0)) + \psi(a^* + u, \mu^*)$. Допустим, $u = \alpha\lambda$, $\|\lambda\| = c$. Так как $\widetilde{\psi}(\alpha, 0_n) \equiv 0_n$, то возможен выбор такой $n \times n$-матрицы $\widetilde{\Psi}(\alpha)$, что $\widetilde{\psi}(\alpha, u) = \widetilde{\Psi}(\alpha)u$. При этом выполняется условие $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{1-k}\|\widetilde{\Psi}(\alpha)\| \equiv 0$. Следовательно,

$$d(\alpha, u) = [X + \alpha^{k-1}\widetilde{P}(\lambda)]u + \widetilde{\Psi}(\alpha)u. \qquad (12)$$

Произвольно выберем δ_1: $0 < \delta_1 \le \Delta$. Так как $\|X + \alpha^{k-1}\widetilde{P}(\lambda)\| \le 1 - \alpha^{k-1}b$ по условию (7) и $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{1-k}\|\widetilde{\Psi}(\alpha)\| \equiv 0$, то можем предполагать, что $\|\widetilde{\Psi}(\alpha)\| < \alpha^{k-1}b/2$ при $\alpha < \delta_2 = \delta_1 / c$. Тогда из представления (12) в силу введенного обозначения при $u: \|u\| < \delta_1$ и $\alpha < \delta_2$ получим оценку

$$\|x(\omega, a^* + u, \mu^*) - a^*\| \le [1 - \alpha^{k-1}b/2]u. \qquad (13)$$

Итак, по лемме 2 решение $x(t, a^*, \mu^*)$ является α-устойчивым. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траектория дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. **Хапаев М.М.** Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.

Абрамов Владимир Викторович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,

тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru

УДК 517.9

О ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ С.А. ЧАПЛЫГИНА О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.И. Голечков, Е.П. Корольков
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

ON USING CHAPLYGIN DIFFERENTIAL INEQUALITY THEOREM FOR SECOND ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Yu.I. Golechkov, E.P. Korolkov

Показано, что теорема С.А. Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для линейных дифференциальных уравнений второго порядка справедлива лишь на конечных промежутках, размер которых в ряде случаев определяется с помощью дифференциального уравнения Риккати.

Ключевые слова: линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, дифференциальное уравнение Риккати, дифференциальное неравенство, интегральная кривая.

It is shown that the Chaplygin differential inequality theorem for linear differential equations of second order is valid only in finite intervals, the size of which in some cases is determined by the Riccati differential equation.

Keywords: second order linear ordinary differential equation, Riccati differential equation, differential inequality, integral curve.

Теоремы сравнения, лежащие в основе так называемого принципа сравнения, играют важную роль в исследовании различных классов нелинейных задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Эти теоремы гарантируют существование (а при некоторых естественных требованиях и единственность) решения задач на основании существования так называемых верхних и нижних решений. Данный подход в исследовании нелинейных задач носит также название метода дифференциальных неравенств и по сути является развитием идей метода «вилки» решения нелинейных конечных уравнений. Эта задача впервые с точки зрения метода дифференциальных неравенств была рассмотрена С.А. Чаплыгиным в начале 20-х годов прошлого века и положила начало одному из наиболее эффективных методов качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Как известно, теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [1] для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков имеет ограниченную применимость даже в случае линейных уравнений.

Исследованию границ применимости теоремы посвящены работы [2–5]. Несмотря на эти работы, вопрос об эффективности применения метода Чаплыгина к решению дифференциальных уравнений высших порядков, в частности линейных, нельзя считать решенным.

В работе [1] С.А. Чаплыгин установил теорему о дифференциальном неравенстве, которая для дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

формулируется следующим образом.

Теорема. Непрерывная кривая $y = v(x)$, проходящая через точку $P(x_0, y_0)$ и вдоль которой справедливо неравенство

$$v' > f(x, y), \tag{2}$$

лежит существенно выше интегральной кривой $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1), проходящей через точку P.

Применимость этой теоремы не ограничивается никакими дополнительными требованиями, так как одна лишь справедливость неравенства (2) на каком-нибудь промежутке (x_0, x_1) влечет обязательную справедливость неравенства $v(x) > y(x)$ всюду на этом промежутке.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - p_1(x)y' - p_2(x)y - q(x) = 0, \qquad (3)$$

где p_1, p_2, q – непрерывные функции от x с непрерывными производными. Рассмотрим следующую задачу.

Пусть задана непрерывная функция $v(x)$ с двумя непрерывными производными, удовлетворяющая начальным условиям $v(x_0) = y_0$, $v'(x_0) = y_0'$ и неравенству $v'' - p_1(x)v' - p_2(x)v - q(x) > 0$ на некотором промежутке $x_0 < x < x_1$. Можно ли тогда утверждать, что и на всем этом промежутке справедливо неравенство

$$v(x) > y(x), \qquad (4)$$

где $y(x)$ – интегральная кривая уравнения (3), удовлетворяющая условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$?

Смысл поставленной задачи состоит в отыскании границы Γ, $\Gamma > x_0$, возможно более удаленной от начальной точки x_0 и такой, что на промежутке (x_0, Γ) справедливо неравенство (4).

Для дифференциального уравнения первого порядка очевидно имеем $\Gamma \geq x_1$.

Задача ставится так: могут ли существовать дифференциальные уравнения второго порядка, для которых $\Gamma < x_1$?

Промежутком применимости теоремы о дифференциальном неравенстве назовем промежуток (x_0, Γ), а радиусом применимости этой теоремы – длину промежутка, равную $\Gamma - x_0$.

С.А. Чаплыгин разработал способ оценки снизу границы Γ применимости теоремы о дифференциальном неравенстве. Этот способ назовем способом ограничительного уравнения Риккати.

Если дифференциальное уравнение Риккати

$$z' + z^2 + p_1(x)z + (p_1'(x) - p_2(x)) = 0,$$

сопоставляемое с данным линейным уравнением (3), имеет хотя бы одну интегральную кривую $z(x)$, непрерывную на промежутке (x_0, x_1), то на этом промежутке соблюдается неравенство (4).

Предположим, что функции p_1 и p_2 не зависят от x, то есть являются постоянными. Тогда уравнение Риккати интегрируемо и

$$-\int \frac{dz}{z^2 + p_1 z - p_2} = x + C.$$

Если корни уравнения $z^2 + p_1 z - p_2 \equiv (z-a)^2 = 0$ совпадают, то $z = a + (x+C)^{-1}$. Если корни этого уравнения действительны и различны, то $z^2 + p_1 z - p_2 \equiv (z-a)(z-b)$ и $z = \{aC - \exp[(b-a)x]\}/\{C - \exp[(b-a)x]\}$. Если корни уравнения мнимые $z^2 + p_1 z - p_2 \equiv (z-a)^2 + b^2$, $b \neq 0$, то $z = a + b\mathrm{tg}(bx + C)$.

В первых двух случаях, изменяя величину C, границу x_1 можно отодвигать сколь угодно далеко. В третьем случае полюсы выражения для z образуют на оси Ox правильную решетку с шагом π/b. С изменением C никакой выбор ее величины не может заставить число x_1 удалиться от x_0 более чем на π/b. Следовательно, способ ограничительного уравнения Риккати даст лишь $\Gamma \geq \pi/b$.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + y = 0 \qquad (5)$$

с начальными условиями $y_0 = 0$, $y_0' = 0$ при $x_0 = 0$.

Способ ограничительного уравнения Риккати показывает, что радиус применимости теоремы о дифференциальном неравенстве больше или равен π. Покажем, что этот радиус не может превосходить число π. Интегральная кривая $y(x)$ уравнения (5) тождественно равна нулю. В качестве функции сравнения примем

$$v(x) = \int \alpha(s)\sin(x-s)ds, \qquad (6)$$

где $\alpha(x)$ – непрерывная положительная функция от x. Функция (6) является интегральной кривой дифференциального уравнения

$$v'' + v = \alpha(x), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0$$

и значит везде удовлетворяет дифференциальному неравенству $v'' + v > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое положительное число. Выберем функцию $\alpha(x)$ так, чтобы на отрезке $0 \leq x \leq \varepsilon$ она была тождественно равна 1, а на отрезке $\varepsilon \leq x \leq \varepsilon + \varepsilon^3$ была бы тождественно равна ε^3. Кроме того, на отрезке $\varepsilon \leq x \leq \varepsilon + \varepsilon^3$ выберем функцию $\alpha(x)$ линейной. Тогда для интеграла (6) имеем $v(\pi+\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\varepsilon^3} + \int_{\varepsilon+\varepsilon^3}^{\pi+\varepsilon}$, где $\int_0^{\varepsilon} = -2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$, $\left|\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\varepsilon^3}\right| < \varepsilon^3$, $\left|\int_{\varepsilon+\varepsilon^3}^{\pi+\varepsilon}\right| < 4\varepsilon^3$. Следовательно $v(\pi+\varepsilon) < -2\sin^2(\varepsilon/2) + 5\varepsilon^3 < 0$.

Следовательно, построенная функция $v(x)$, удовлетворяющая всюду дифференциальному неравенству $v'' + v > 0$ и начальным условиям $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, является в точке $X = \pi+\varepsilon$ отрицательной и для нее уже несправедливо неравенство $v(x) > y(x)$ на промежутке $(0, \pi+\varepsilon)$.

Таким образом, теорема С.А. Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для линейных дифференциальных уравнений второго порядка справедлива лишь на конечных промежутках, размер которых в ряде случаев в точности указывается способом ограничительного уравнения Риккати.

Следует отметить, что метод С.А. Чаплыгина интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичен классическому методу касательных Ньютона и имеет квадратичную сходимость.

Применение метода С.А. Чаплыгина к численному исследованию решения дифференциальных уравнений рассмотрено в работах [6–7].

Результаты данной работы могут быть использованы для изучения устойчивости транспортных динамических систем [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чаплыгин С.А.** Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Труды ЦАГИ. 1932. Вып. 130.
2. **Азбелев Н.В.** О границах применимости теоремы Чаплыгина // ДАН СССР. 1953. Т. 89. № 4. С. 589–592.
3. **Азбелев Н.В.** О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Матем. сб. 1956. Т.39 (81). С. 161–178.
4. **Wi1kins J.E.** The converse of a theorem of Tchaplygin on differential inequalities // Bull. Amer. Math. Soc.1947. V. 53. № 2. С. 126–129.
5. **Кащеев Н.А.** К вопросу о границе применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линейным дифференциальным уравнениям высшего порядка // Ученые записки Куйбышевского пед. ин-та. 1956. Вып. 14.
6. **Голечков Ю.И.** Модификация численно-аналитического метода Чаплыгина исследования решения дифференциальных уравнений // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. 2005. Вып. 9 (2). С. 88–94.
7. **Голечков Ю.И.** О приближенно-аналитическом методе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2006. № 11. С. 66–67.
8. **Голечков Ю.И., Корольков Е.П.** Устойчивость установок двухосной тележки при движении экипажа в кривых // Мир транспорта. 2006. № 2. С. 14–17.

Голечков Юрий Иванович, д.ф.-м.н., доцент кафедры высшей и прикладной математики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ)
127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9,
тел. 8(495) 799 95 77, e-mail: golechkov@yandex.ru

УДК 517.9

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ СИСТЕМЫ ПРЕДИКАТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О.В. Дружинина, О.Н. Масина
Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина

DEVELOPMENT OF METHOD OF LYAPUNOV FUNCTIONS FOR STABILITY ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS MODELING SYSTEMS OF PREDICATE CONTROL

O.V. Druzhinina, O.N. Masina

На основе развития второго метода Ляпунова даны условия устойчивости состояний равновесия дифференциальных уравнений, моделирующих системы предикатного управления.

Ключевые слова: устойчивость, нелинейные дифференциальные уравнения, система предикатного управления, функция Ляпунова.

Stability conditions of equilibrium states of differential equations modeling systems of predicate control on the basis of development of the second Lyapunov method are given.

Keywords: stability, nonlinear differential equations, system of predicate control, Lyapunov function.

Введение. При изучении динамических систем важной задачей является исследование устойчивости состояний равновесия дифференциальных уравнений, моделирующих системы предикатного управления [1–11]. Такие уравнения будем называть дифференциальными уравнениями систем предикатного управления. Одним из методов решения указанной задачи является метод функций Ляпунова [2, 4–6, 8, 10, 11].

Для динамических систем классическая теория устойчивости развивалась, начиная с работ А.М. Ляпунова [12], Н.Е. Жуковского [13], А. Пуанкаре [14], Н.Г. Четаева [15], в работах Н.Н. Красовского [16], А.А. Шестакова [5], Ю.Н. Меренкова [6] и других отечественных и зарубежных ученых.

Понятие устойчивости дифференциальных уравнений систем предикатного управления рассмотрено в [5], где необходимые и достаточные условия устойчивости получены с помощью обобщенных функций Ляпунова. В работах [8, 10] на основе развития прямого метода Ляпунова установлены условия устойчивости систем предикатного управления, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Условия устойчивости дифференциальных уравнений, моделирующих предикатную систему Такахи – Суджено на основе функций Ляпунова, получены в [11].

Системой предикатного управления называется система управления, функционирование которой описывается с помощью нечетких правил «если…то», определяющих взаимосвязь между входами и выходами исследуемой системы [10].

К системам предикатного управления относятся системы с логическими регуляторами [2, 4, 8, 10, 11]. Логический регулятор осуществляет процесс выработки управляющих воздействий на базе нечеткой логики. Большой класс логических регуляторов представляют регуляторы непрерывного действия с одним выходом [4]. Анализ устойчивости непрерывных систем предикатного управления может быть сведен к задачам, решаемым с помощью линейных матричных неравенств [8], которые обеспечивают требуемые свойства функций Ляпунова.

В настоящей статье получены условия равномерной устойчивости состояний равновесия дифференциальных уравнений систем предикатного управления с помощью метода дивергентных функций Ляпунова. Указанный метод основан на совместном использовании функций Ляпунова и дивергентных функций поля скоростей. Кроме того, получены условия устойчивости состояний равновесия обыкновенных дифференци-

альных уравнений непрерывной системы предикатного управления на основе комбинированного метода функций Ляпунова с использованием свойств линейных матричных неравенств.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим дифференциальное уравнение системы предикатного управления

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + b \cdot u, \quad f(0) = 0, u = F(x), F(0) = 0, \quad (1)$$

где $x \in X \subset R^n$, $f(x)$ – нелинейная монотонно возрастающая функция, b – n-мерный вектор, u – скалярная переменная управления, $u \in U$, $U \subset R$, $F(x)$ – нелинейная функция, определяемая в виде

$$F(x) = L_2(\mu_x \circ \mu_\Pi(x,u)),$$

где символ ° означает операцию композиции; L_2 – оператор дефаззификации; $\mu_{\Pi^{(i)}}(x,u) = \mu_{X_i}(x) * \mu_{U^i}(u)$ – степень принадлежности пары (x, u) к правилу $\Pi^{(i)}$, $\mu_{U^i}(u)$ – функция принадлежности u к множеству U^i, $\mu_{X_i}(x)$ – результат агрегирования степеней принадлежности входа x_i к множеству X_i, символ * означает операцию логического минимума или алгебраического произведения; $\mu_x = \mu^1_{X^i_1}(\bar{x}_1) * \mu^2_{X^i_2}(\bar{x}_2) * \ldots * \mu^i_{X^i_n}(\bar{x}_n)$, $i = 1, \ldots, n$, – нечеткий выход, соответствующий входу $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$; $\Pi = \bigcup \Pi^{(i)}$ – база правил логического регулятора. Результат действия $F(x)$ соответствует управляющему воздействию на объект управления.

Приведем далее результаты, которые будут использованы в дальнейшем для исследования дифференциального уравнения (1).

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = g(x,h), \; x \in R^n, \; h \in H \subset R^k, \quad (2)$$

которое определено на множестве $B(r) \times H$, где $B(r) = \{x \in R^n: \|x\| \le r\}$, $r > 0$.

Предполагается, что функция $g(x,h)$ удовлетворяет условию Липшица относительно $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для каждого $h \in H \subset R^k$, то есть

$$\exists\, L = L(h) > 0: \left|g(x^1,h) - g(x^2,h)\right| \le L\left|x^1 - x^2\right|$$
$$\forall\, x^1, x^2 \in B(r),$$

и решения $x(t, x_0, h)$ уравнения (2) непрерывно зависят как от начальной точки $x_0 = x(0, x_0, h)$, так и от параметра $h = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ для $k \ge 1$.

Решение $x = 0$ называется равномерно устойчивым относительно множества $H \subset R^k$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \;\; |x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, x_0, h)| < \varepsilon$$
$$\forall t \in R^+, \; \forall h \in H. \quad (3)$$

В (3) число δ зависит от ε, но не зависит от выбора точки $h \in H$.

Теорема 1 [8]**.** Если тривиальное состояние равновесия $x = 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво для каждого h, принадлежащего компактному множеству $H \subset R^k$, то состояние равновесия $x = 0$ уравнения (2) равномерно устойчиво относительно множества H.

Множителем Эйлера назовем функцию, положительную в окрестности состояния равновесия и равную нулю лишь в самом состоянии равновесия.

Известно [7], что если z – асимптотически устойчивое состояние равновесие дифференциального уравнения вида $\frac{dx}{dt} = g(x)$ и $V(x)$ – функция Ляпунова, для которой выполнено условие $-\dot{V} > \alpha_1 V^{\alpha_2}$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, то существует множитель Эйлера $\sigma(x)$, для которого дивергенция $\mathrm{div}(\sigma(x) f(x))$ является отрицательно определенной. Функцию Ляпунова, обладающую указанным свойством, назовем дивергентной функцией Ляпунова для состояния равновесия z.

Для уравнения

$$\dot{y} = G(y), \; y \in R^n, \quad (4)$$

где поле скоростей $(G_1, \ldots, G_n)$ непрерывно и удовлетворяет в некоторой области $Q \subset R^n$ фазового пространства R^n условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2 [7]. Пусть $\mathrm{div}\, G(x) \le 0$ в окрестности состояния равновесия $x = (x_1, \ldots, x_n) = 0$ уравнения (4) и существует дивергентная функция Ляпунова в силу указанного уравнения. Тогда состояние равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Обобщением теоремы 2 является теорема 3.

Теорема 3 [7]. Пусть $\mathrm{div}\,[\sigma(x)\, G(x)] \le 0$ в окрестности состояния равновесия $x = 0$ уравнения (4), где $\sigma(x)$ – множитель Эйлера, и пусть существует дивергентная функция Ляпунова в силу уравнения (4). Тогда состояние равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Вопросы устойчивости систем предикатного управления с помощью дивергентных функций Ляпунова рассмотрены в работе [8].

2. Метод дивергентных функций Ляпунова анализа устойчивости дифференциальных уравнений систем предикатного управления. Уравнение (4) представим в виде

$$\dot{x} = g(x,u), \quad x \in R^n, \; u \in U \subset R, \quad (5)$$

где множество U является компактным.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\mathrm{div}\; g(x,u) \le 0$ в окрестности состояния равновесия $x = 0$ уравнения (5) и существует дивергентная функция Ляпунова для состояния равновесия $x = 0$. Тогда это состояние равновесия уравнения (5) асимптотически устойчиво для каждого $u \in U$.

Доказательство. Представление уравнения (4) в виде (5) является аналогом (2) с заменой h на u. Поэтому все предположения относительно (2) справедливы и для уравнения (5). Применяя далее теорему 2, получим асимптотическую устойчивость состояния равновесия $x=0$ уравнения (5) для каждого $u \in U$.

Теорема 5. Пусть $\operatorname{div}[\sigma(x)\ g(x,u)] \le 0$ в окрестности состояния равновесия $x=0$ уравнения (5), где $\sigma(x)$ – множитель Эйлера, и пусть существует дивергентная функция Ляпунова для состояния равновесия $x=0$. Тогда это состояние равновесия асимптотически устойчиво для каждого $u \in U$.

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 4 с применением теоремы 3.

Теорема 6. Если состояние равновесия $x=0$ уравнения (5) асимптотически устойчиво для каждого u, принадлежащего компактному множеству $U \subset R$, то состояние равновесия $x=0$ уравнения (5) равномерно устойчиво относительно множества U.

Доказательство теоремы 6 следует из теоремы 1.

Найдем дивергенцию поля скоростей:

$$\operatorname{div}\ g(x,u) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Из теоремы 4 и свойства (6) вытекает следующая теорема.

Теорема 7. Пусть для уравнения (5) в окрестности состояния равновесия $x=0$ выполнено неравенство $\operatorname{div}\ g(x,\ u) \le 0$ и существует дивергентная функция Ляпунова для состояния равновесия $x=0$. Тогда это состояние равновесия уравнения (5) асимптотически устойчиво для каждого $u \in U$.

Из теоремы 6 и свойства (6) вытекает теорема 8.

Теорема 8. Если выполняются условия теоремы 7 для каждого u, принадлежащего компактному множеству $U \subset R$, то состояние равновесия $x=0$ уравнения (5) равномерно устойчиво относительно множества U.

Далее найдем

$$\operatorname{div}[\sigma(x)g(x)] = \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} g_2 + \ldots + \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} g_n + \\ + \sigma \operatorname{div} g(x,u). \quad (7)$$

Из теоремы 5 и свойства (7) вытекает теорема 9.

Теорема 9. Пусть для уравнения (5) в окрестности состояния равновесия выполнено неравенство

$$\sigma(x)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_1} g_1 + \\ + \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_2} g_2 + \ldots + \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_n} g_n \le 0$$

и пусть существует дивергентная функция Ляпунова для состояния равновесия $x=0$. Тогда это состояние равновесия уравнения (5) асимптотически устойчиво для каждого $u \in U$.

Из теоремы 6 и свойства (7) вытекает следующая теорема 10.

Теорема 10. Если выполняются условия теоремы 9 для каждого u, принадлежащего компактному множеству $U \subset R$, то состояние равновесия $x=0$ уравнения (5) равномерно устойчиво относительно множества U.

Отметим, что вопросы устойчивости управляемых технических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с помощью индексно-дивергентного метода, рассмотрены в статье [9].

3. Метод функций Ляпунова анализа устойчивости дифференциальных уравнений непрерывной системы предикатного управления. Непрерывная система предикатного управления задается правилами вида:

$$\text{ЕСЛИ } x(t) \text{ есть } \mu^{\sigma\tau}(x(t)), \\ \text{ТО } \dot{x}(t) \text{ есть } h(\sigma,\tau), \quad (8) \\ \sigma = 1, 2, \ldots, n_1, \quad \tau = 1, 2, \ldots, n_2,$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^*$ – двумерный вектор состояния; $\mu^{\sigma\tau}(x(t)) = (\mu_1^{\sigma}(x_1(t)), \mu_2^{\tau}(x_2(t)))^*$ – вектор-функция принадлежности $x_1(t)$ и $x_2(t)$; $h(\sigma,\tau) = (h_1(\sigma,\tau), h_2(\sigma,\tau))$ – вектор, соответствующий одноточечному множеству; n_1, $n_2 \ge 2$. Верхний индекс * означает транспонирование. Будем использовать упорядоченные координаты $d_1(1) < \ldots < d_1(\sigma) < d_1(\sigma+1) < \ldots < < d_1(n_1)$ для x_1 и $d_2(1) < \ldots < d_2(\tau) < d_2(\tau+1) < \ldots < d_2(n_2)$ для x_2.

Пусть $\Re^0{}_{\sigma\tau} = [d_1(\sigma), d_1(\sigma+1)][d_2(\tau), d_2(\tau+1)]$, $d_1(\sigma) < 0 < d_1(\sigma+1)$, $d_2(\tau) < 0 < d_2(\tau+1)$, – квадратная область, в которой выполняется условие $x(t) = 0 \to \dot{x}(t) = 0$. Правую часть в (8) можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma\tau}(x(t))x(t) + \beta_{\sigma\tau},$$

где $x(t) \in R_{\sigma\tau}$, $\beta_{\sigma\tau}$ определяется

$$\beta_{\sigma\tau} = \alpha_1^0 \alpha_2^0 h(\sigma,\tau) + \alpha_1^0 (1-\alpha_2^0) h(\sigma,\tau+1) + \\ + \alpha_2^0 (1-\alpha_1^0) h(\sigma+1,\tau) + (1-\alpha_1^0)(1-\alpha_2^0) h(\sigma+1,\tau+1),$$

$\alpha_1^0 = \alpha_1(0)$, $\alpha_2^0 = \alpha_2(0)$, $\beta_{\sigma\tau} = 0$ для $x(t) \in \Re^0{}_{\sigma\tau}$. Матрица $A_{\sigma\tau}(x(t))$ имеет четыре различных выражения в зависимости от матриц первого типа $S(i,\cdot)$, $i = \sigma$, $\sigma+1$, и матриц второго типа $S(\cdot,j)$, $j = \tau$, $\tau+1$, аналитический вид которых здесь не показан.

Производная функции Ляпунова $V(x) = x^* P x$ имеет вид

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^* Px + x^* P\dot{x} = -x^* \Phi(\alpha_1,\cdot)x + 2x^* P\beta_{\sigma\tau}, \quad (9)$$

где $\Phi(\alpha_1,\cdot) = -A(\alpha_1,\cdot)^* P - PA(\alpha_1,\cdot)$, матрица $A(\alpha_1,\cdot)$ определяется

$$A(\alpha_1,\cdot) = \alpha_1 S(\sigma,\cdot) + (1-\alpha_1)S(\sigma+1,\cdot). \quad (10)$$

Лемма 1. Неравенство $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ выполняется в области $\Re^0{}_{\sigma\tau}$ тогда и только тогда, когда справедливы следующие свойства:

$$\dot{V}(i,j) < 0, \; i = \sigma, \; \sigma+1, \; j = \tau, \; \tau+1, \quad (11)$$

где $\dot{V}(i,j) = h(i,j)^* Pd(i,j) + d(i,j)^* Ph(i,j)$, $i = \sigma$, $\sigma+1$, $j = \tau$, $\tau+1$;

$$\begin{aligned} &D(i,\cdot) < \sqrt{\dot{V}(i,\tau)\dot{V}(i,\tau+1)}, \quad i = \sigma, \sigma+1, \\ &D(\cdot,j) < \sqrt{\dot{V}(\sigma,j)\dot{V}(\sigma+1,j)}, \quad j = \tau, \tau+1, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$D(i,\cdot) = \frac{1}{2}\left[h(i,\tau)^* Pd(i,\tau+1) + h(i,\tau+1)^* Pd(i,\tau)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[d(i,\tau)^* Ph(i,\tau+1) + d(i,\tau+1)^* Ph(i,\tau)\right],$$

$$i = \sigma, \; \sigma+1,$$

$$D(\cdot,j) = \frac{1}{2}\left[h(\sigma,j)^* Pd(\sigma+1,j) + \right.$$

$$\left. + h(\sigma+1,j)^* Pd(\sigma,j)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[d(\sigma,j)^* Ph(\sigma+1,j) + d(\sigma+1,j)^* Ph(\sigma,j)\right],$$

$$j = \tau, \; \tau+1;$$

матрица $\Phi(\alpha_1,\cdot)$ является положительно определенной для $\alpha_1 = \alpha_1^0$. (13)

Рассмотрим дифференциальное уравнение непрерывной системы предикатного управления

$$\dot{x}(t) = A(\alpha_1,\cdot)x(t) + \beta_{\sigma\tau}, \; x(t) \in R_{\sigma\tau}, \quad (14)$$

где $\beta_{\sigma\tau} = 0$ в области $\Re^0{}_{\sigma\tau}$, а матрица $A(\alpha_1,\cdot)$ определяется (10).

Лемма 2. Если для уравнения (14) выполняются условия (11) и (12), то неравенство $\dot{V}(x) < 0$ справедливо всюду в области $R_{\sigma\tau}$.

Теорема 11. Состояние равновесия уравнения (14) асимптотически устойчиво в целом, если существует матрица $P > 0$ такая, что

1) в области $\Re^0{}_{\sigma\tau}$ выполняются неравенства (11), (12) для производной (9) функции Ляпунова и свойство $-A(\alpha_1^0,\cdot)^* P - PA(\alpha_1^0,\cdot) > 0$ гарантирующее выполнение условия (13);

2) в других областях производная (9) функции Ляпунова удовлетворяет неравенствам (11) и (12) для уравнений

$$\dot{x}(t) = S(\sigma,\cdot)x(t) + \beta_{\sigma\tau}, \quad (14)$$

и

$$\dot{x}(t) = S(\sigma+1,\cdot)x(t) + \beta_{\sigma\tau}. \quad (15)$$

Доказательство. Из леммы 1 следует выполнимость условия 1). Докажем выполнимость условия 2). Рассмотрим функции Ляпунова $V_\sigma(x)$ и $V_{\sigma+1}(x)$ для систем (14) и (15) соответственно. Тогда получим

$$\dot{V}(x) = \alpha_1 \dot{V}_\sigma(x) + (1-\alpha_1)\dot{V}_{\sigma+1}(x),$$

где

$$\dot{V}_\sigma(x) = -x^* \Phi(\sigma,\cdot)x + 2x^* P\beta_{\sigma\tau},$$

$$\dot{V}_{\sigma+1}(x) = -x^* \Phi(\sigma+1,\cdot)x + 2x^* P\beta_{\sigma\tau}.$$

Если справедливы свойства (11) и (12) леммы 1, то $\dot{V}_\sigma(x) < 0$ и $\dot{V}_{\sigma+1}(x) < 0$ в области $R_{\sigma\tau}$. Следовательно, $\dot{V}(x) < 0$ в области $R_{\sigma\tau}$.

Из леммы 2 следует, что если свойства (11) и (12) выполняются для уравнения (14), то $\dot{V}_\sigma(x) < 0$ всюду в области $R_{\sigma\tau}$. Если свойства (11) и (12) выполняются для уравнения (15), то $\dot{V}_{\sigma+1}(x) < 0$ всюду в области $R_{\sigma\tau}$. Это означает выполнимость условия 2). Теорема 11 доказана.

Получены условия асимптотической устойчивости в целом и для уравнения

$$\dot{x}(t) = A(\cdot,\alpha_2)x(t) + \beta_{\sigma\tau}, \; x(t) \in R_{\sigma\tau},$$

где $\beta_{\sigma\tau} = 0$ в области $\Re^0{}_{\sigma\tau}$, матрица $A(\cdot,\alpha_2)$ определяется

$$A(\cdot,\alpha_2) = \alpha_2 S(\cdot,\tau) + (1-\alpha_2)S(\cdot,\tau+1).$$

При этом использованы свойства производной (9) функции Ляпунова, записанной в виде

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^* Px + x^* P\dot{x} = -x^* \Phi(\cdot,\alpha_2)x + 2x^* P\beta_{\sigma\tau},$$

где $\Phi(\cdot,\alpha_2) = -A(\cdot,\alpha_2)^* P - PA(\cdot,\alpha_2)$.

Полученные в настоящей статье условия устойчивости дифференциальных уравнений систем предикатного управления на основе комбинированного метода функций Ляпунова могут быть использованы при решении задач устойчивости дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях. Условия устойчивости, полученные на основе метода дивергентных функций Ляпунова, могут служить основой для разработки алгоритмов исследования устойчивости движения динамических систем и использоваться в дальнейшем для реализации в виде компьютерных программ.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 13-08-00710-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Афанасьев В.Н.** Динамические системы управления с неполной информацией. Алгоритмическое конструирование. М.: КомКнига, 2007.
2. **Пегат А.** Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
3. **Красовский А.А.** Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
4. **Sugeno M.** On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 1999. V. 7. № 2. P. 201–224.
5. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.
6. **Меренков Ю.Н.** Математическое моделирование и качественный анализ математических моделей динамических систем. Дисс. … докт. физ.-матем. наук. М.: РГОТУПС, 2003.
7. **Дружинина О.В.** Индексно-дивергентный метод исследования устойчивости нелинейных динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2007.
8. **Масина О.Н., Дружинина О.В.** Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.
9. **Дружинина О.В., Масина О.Н.** Исследование устойчивости управляемых технических систем индексно-дивергентным методом // Нелинейный мир, 2011. Т. 9. № 10. С. 677–682.
10. **Шестаков А.А., Дружинина О.В., Масина О.Н.** Развитие прямого метода Ляпунова исследования устойчивости систем предикатного управления // Труды X Между-народной Четаевской конференции «Аналитиче-ская механика, устойчивость и управление». Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. Т. 2. С. 589–600.
11. **Масина О.Н., Дружинина О.В.** Метод мягких функций Ляпунова исследования устойчивости дифференциальных уравнений, моделирующих предикатную систему Такахи–Суджено // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения. 2012. Вып. 17. С. 47–53.
12. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
13. **Жуковский Н.Е.** О прочности движения // Уч. зап. Московского ун-та. 1882. Вып. 4. С. 1–104.
14. **Пуанкаре А.** Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.
15. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, 1962.
16. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

Дружинина Ольга Валентиновна, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской Академии наук

119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40,

тел.: +7 (499) 135-44-98, e-mail: ovdruzh@mail.ru

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Козлов
Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева

ASYMPTOTIC STABILITY IN THE WHOLE OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.V. Kozlov

Рассматриваются системы с малым параметром при производных. С использованием метода векторных функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения при достаточно малых значениях параметра.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость в целом, вектор-функция Ляпунова, малый параметр, сингулярно возмущенные системы, сложные системы дифференциальных уравнений.

The system of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative is considered. Sufficient conditions for the asymptotic stability of singularly perturbed systems for sufficiently small values of the parameter are obtained by using the method of vector Lyapunov functions.

Key words: asymptotic stability in the whole, vector Lyapunov function, small parameter, singularly perturbed systems, complex systems of differential equations.

В связи с широким применением сингулярно возмущенных систем при моделировании технических процессов большое значение имеет задача об устойчивости по Ляпунову решений таких систем. В настоящей статье предлагается вариант решения данной задачи, основанный на исследовании сингулярно возмущенной системы как сложной системы с линейными и нелинейными связями. Каждой подсистеме в этом случае соответствует определенным образом возмущенная или невозмущенная часть фазового вектора. В качестве основного инструмента используется результат Ф. Бейли [1, 2], а именно две его теоремы, гарантирующие при определенных условиях асимптотическую устойчивость в целом нулевого решения сложных систем с линейными и нелинейными связями. Метод Бейли является частным случаем применения теории вектор-функций Ляпунова и основан на методе сравнения, который позволяет вместо исходной системы (вообще говоря, нелинейной) исследовать более простую автономную линейную однородную систему. При этом размерность последней равна количеству подсистем, на которые разбита исходная система.

Под нормой вектора в работе понимается евклидова норма $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$; под нормой матрицы $\|A\| = \alpha$ – норма линейного оператора A , то есть нижняя грань чисел α , для которых выполнено неравенство $\|Ax\| \le \alpha \|x\|$.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(t,x) + B_1 y, \\ \varepsilon \dfrac{dy}{dt} = Y(y) + B_2 x, \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in R^k$, $y \in R^m$; $B_1 \in R^{k\times m}$, $B_2 \in R^{m\times k}$ – постоянные матрицы; $\varepsilon > 0$ – малый параметр; вектор-функции $X(t,x)$, $Y(y)$ удовлетворяют каким-либо условиям существования и единственности решения задачи Коши с любыми начальными данными; $X(t,0) \equiv 0$, $Y(0) = 0$. Вместе с данной системой рассмотрим еще две

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(y), \tag{3}$$

и предположим, что существуют Л-функции $v_1(t,x)$, $v_2(y)$, для которых справедливы соотношения

$$\begin{cases} c_{11}\|x\|^2 \le v_1(t,x) \le c_{12}\|x\|^2, \\ \dot{v}_1\big|_{(2)} \le -c_{13}\|x\|^2, \\ \|grad\ v_1\| \le c_{14}\|x\|, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} c_{21}\|y\|^2 \le v_1(y) \le c_{22}\|y\|^2, \\ \dot{v}_2\big|_{(3)} \le -c_{23}\|y\|^2, \\ \|grad\ v_2\| \le c_{24}\|y\|, \end{cases} \tag{5}$$

где $c_{ij} > 0$ – некоторые постоянные ($i = 1,2$, $j = 1,\ldots 4$). Как указано в [3, с. 72], данные условия эквивалентны экспоненциальной устойчивости нулевого решения в том случае, если правая часть системы непрерывна и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по фазовым координатам.

Рассмотрим матрицу $A = \{a_{sp}\}_{s,p=1}^{2}$, элементы которой образованы следующим образом:

$$a_{11} = -\frac{c_{13}}{2c_{12}}, \quad a_{12} = \frac{c_{14}^2\|B_1\|^2}{2c_{13}c_{21}},$$

$$a_{21} = \frac{c_{24}^2\|B_2\|^2}{2c_{23}c_{11}}, \quad a_{22} = -\frac{c_{23}}{2c_{22}}.$$

Теорема 1. Если существуют функции $v_1(t,x)$, $v_2(y)$, удовлетворяющие условиям (4–5) и при этом $\det A > 0$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ решение $x = 0$, $y = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Покажем, что функции $v_1(t,x)$, $v_2(y)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяют условиям теоремы Бейли применительно к системе (1). Для этого рассмотрим эту систему в нормальной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(t,x) + B_1 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon}Y(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}B_2 x. \end{cases} \tag{6}$$

Соответствующая ей подсистема относительно фазового вектора x совпадает с системой (2), а подсистема относительно вектора y будет иметь вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}Y(y). \tag{7}$$

Для функции $v_1(t,x)$ оценки (4) сохраняются в неизменном виде. Для функции $v_2(y)$ первое и третье неравенства (5) так же остаются справедливы. Оценку для производной функции $v_2(y)$, взятой в силу подсистемы (7), очевидно, можно получить из уже имеющейся оценки (5) добавлением множителя

$$\dot{v}_2\big|_{(7)} = \frac{1}{\varepsilon}\dot{v}_2\big|_{(3)} \le -\frac{1}{\varepsilon}c_{23}\|y\|^2.$$

С учетом данных обстоятельств матрица сравнения A^* для системы (1) будет выражена через элементы матрицы A следующим образом:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dfrac{1}{\varepsilon}a_{21} & \dfrac{1}{\varepsilon}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что собственные числа матрицы A^* при достаточно малых значениях ε имеют отрицательные вещественные части. В самом деле, характеристическое уравнение для матрицы A^* имеет вид

$$\lambda^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon}a_{22} + a_{11}\right)\lambda + \frac{1}{\varepsilon}det\ A = 0. \tag{8}$$

По своему определению $a_{22} < 0$, а следовательно, при $\varepsilon < \varepsilon_0 = -\dfrac{a_{22}}{a_{11}}$ коэффициент при λ в уравнении (8) будет положителен, то есть все коэффициенты в уравнении (8) являются положительными числами. К тому же легко убедиться, что дискриминант уравнения так же всегда положителен. Поэтому уравнение (8) имеет два отрицательных вещественных корня, что и требовалось доказать.

Таким образом, при $\varepsilon < \varepsilon_0 = -\dfrac{a_{22}}{a_{11}}$ для системы (1) выполняются условия теоремы Бейли, поэтому решение $x = 0$, $y = 0$ при данных значениях параметра ε асимптотически устойчиво в целом. Теорема доказана.

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Bx + f_1(y), \\ \varepsilon\dfrac{dy}{dt} = Cy + f_2(x), \end{cases} \tag{9}$$

где $x \in R^k$, $y \in R^m$; $B \in R^{k\times k}$, $C \in R^{m\times m}$ – постоянные матрицы; вектор-функции $f_1(y)$, $f_2(x)$ удовлетворяют каким-либо условиям существования и единственности решения задачи Коши с любыми начальными данными; $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$.

Предположим, что во всем пространстве выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|f_1(y)\| \le l_1\|y\|, \quad l_1 \ge 0, \\ \|f_2(x)\| \le l_2\|x\|, \quad l_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть для линейных систем

$$\frac{dx}{dt} = Bx, \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dt} = Cy \tag{12}$$

существуют определенно положительные квадратичные формы $v_1(x) = x^T D_1 x$, $v_2(y) = y^T D_2 y$ (D_1, D_2 – положительно определенные симмет-

ричные матрицы), для которых справедливы оценки

$$\begin{cases} \lambda_{11}\|x\|^2 \le v_1(x) \le \lambda_{12}\|x\|^2, \\ \dot{v}_1\big|_{(11)} \le -\mu_1\|x\|^2, \\ \|grad\ v_1\| \le 2\lambda_{12}\|x\|, \end{cases} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} \lambda_{21}\|y\|^2 \le v_2(y) \le \lambda_{22}\|y\|^2, \\ \dot{v}_2\big|_{(12)} \le -\mu_2\|y\|^2, \\ \|grad\ v_2\| \le 2\lambda_{22}\|y\|, \end{cases} \qquad (14)$$

где $\lambda_{1i} > 0$, $\lambda_{2i} > 0$ соответственно наименьшее и наибольшее из собственных чисел матриц D_i ($i = 1,2$); $\mu_1 > 0$ – наименьшее собственное число матрицы $B^T D_1 + D_1 B$, $\mu_2 > 0$ – наименьшее собственное число матрицы $C^T D_2 + D_2 C$.

Рассмотрим матрицу $A = \{a_{sp}\}_{s,p=1}^{2}$ с элементами

$$a_{11} = -\frac{\mu_1}{2\lambda_{12}}, \quad a_{12} = 2\frac{\lambda_{12}^2 l_1^2}{\mu_1\lambda_{21}},$$

$$a_{21} = 2\frac{\lambda_{22}^2 l_2^2}{\mu_2\lambda_{11}}, \quad a_{22} = -\frac{\mu_2}{2\lambda_{22}}.$$

Теорема 2. Если существуют квадратичные формы $v_1(x)$, $v_2(y)$, для которых справедливы неравенства (13–14), выполнены условия (10), а также $\det A > 0$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ решение $x = 0$, $y = 0$ системы (9) асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей. Величина ε_0 определяется по той же формуле $\varepsilon_0 = -\dfrac{a_{22}}{a_{11}}$.

Автор выражает благодарность В.Н. Щенникову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. **Bailey F.,N.** The application of Lyapunov's second method to interconnected systems // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1965(1966). A3, №3. P. 443–462.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 211 с.

Козлов Михаил Владимирович, аспирант кафедры дифференциальных уравнений Мордовского государственного университета имени Н. П. Огарева.
430000, г. Саранск, проспект Ленина, д. 15, тел. 89271780510, e-mail: kozlov.mvl@yandex.ru

УДК 517.95

ГЛАДКОСТЬ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.Н. Конёнков
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

SMOOTHNESS OF THE LEADING DERIVATIVES OF THE SIMPLE LAYER POTENTIAL FOR THE PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN A DOMAIN WITH NONSMOOTH BOUNDARY

A.N. Konenkov

Для равномерно-параболического уравнения второго порядка исследуется вопрос о принадлежности потенциала простого стоя анизотропному пространству Гёльдера $C^{2,\alpha}$ при условии, что боковая граница области принадлежит лишь классу $C^{1,\alpha}$. Показано, что если изменить ядро потенциала, умножив его на опеределенную функцию, зависящую от области и параболического оператора, то полученный потенциал в отличие от исходного потенциала простого слоя будет иметь старшие производные, удовлетворяющие условию Гёльдера в замыкании области при условии, что плотность принадлежит пространству $C^{1,\alpha}$ на боковой границе области.

Ключевые слова: параболические уравнения второго порядка, потенциал простого слоя, анизотропные пространства Гельдера.

For a uniformly parabolic equation of the second order the question of when the simple layer potential belongs to the anisotropic Hölder space $C^{2,\alpha}$ is concidered, provided that the the domain's lateral boundary belongs only to the class $C^{1,\alpha}$. It is shown that if to change the kernel of the potential, multiplying it on a certain function depending on the domain and the parabolic operator, the resulting potential, in contrast to the original single-layer potential, will have higher derivatives satisfying a Holder condition in the closure of the domain, provided that its density belongs to the class $C^{1,\alpha}$ on the side's boundary.

Keywords: parabolic equation of the second order, simple layer potential, anisotropic Hölder spaces.

В слое $D = R^n \times (0,T)$, $T < \infty$ рассматривается равномерно-параболическое уравнение второго порядка

$$Lu = u_t - a_{ij}(x,t)u_{ij} - b_i(x,t)u_i - c(x,t)u, \quad (1)$$

вещественнозначные коэффициенты которого удовлетворяют условию равномерной параболичности

$$(\exists \delta_0 > 0)\,(\forall P \in \overline{D}, \forall \xi \in R^n)$$

$$a_{ij}(P)\xi_i\xi_j \geq \delta_0 \,|\, \xi \,|^2; \quad (2)$$

и

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\overline{D}). \quad (3)$$

Определение используемых анизотропных пространств Гельдера $C^{k,\alpha}$ приведено ниже.

Гладкость потенциала простого слоя для параболических уравнений была предметом изучения многих работ. Для уравнения теплопроводности в области $\Omega \subset D$ с компактной негладкой боковой границей $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ этот вопрос исследовался в работе [1], а для общего параболического уравнения второго порядка – в [2]. Е.И. Бадерко для оператора L, удовлетворяющего (2), (3), были получены результаты о гладкости потенциала простого слоя в областях с некомпактной негладкой боковой границей (класса $C^{1,\alpha}$) в [3]. В частности, было установлено, что при плотности $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\Sigma)$ потенциал простого слоя $U\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. В работе [4] для одномерного уравнения теплопроводности была построена шкала гладкости потенциала простого слоя при $\Sigma \in C^{k+1,\alpha}$ и $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{k,\alpha}(\Sigma)$ $U\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ для $k \geq 0$.

Естественно возникает вопрос, будет ли эта шкала гладкости верной для общего параболического уравнения (1) с переменными коэффициентами? В настоящей статье мы даем отрицательный ответ для $k=1$, а именно: мы показываем, что для поверхности $\Sigma \in C^{2,\alpha}$ и плотности φ, даже из $C^{2,\alpha}(\Sigma)$, потенциал $U\varphi$ не принадлежит $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ для общего параболического уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2), (3). Кроме того, можно показать, что если поверхность $\Sigma \in C^{1,\alpha}$, то для уравнения теплопроводности и достаточно гладкой плотности $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Sigma)$ вторые пространственные производные $U\varphi$ могут, вообще говоря, неограниченно расти при приближении к боковой границе.

В настоящей работе устанавливается, что для параболического уравнения с переменными коэффициентами можно изменить определение потенциала простого слоя, домножив ядро потенциала на некоторую функцию, зависящую от области и параболического оператора, чтобы он для любой плотности $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$ принадлежал $\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, даже если граница Σ принадлежит лишь $C^{1,\alpha}$. То есть имеется естественное соответствие между классами гладкости плотности и потенциала, причем гладкость границы может быть ниже, чем гладкость вводимого нами потенциала в замыкании области.

Необходимые определения и обозначения

Введем следующие обозначения:

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n, |x|=(|x_1|^2+\dots+|x_n|^2)^{1/2};$$

$$P=(x,t)\in R^{n+1}, |P|_1=|x|+|t|^{1/2};$$

$$x'=(x_1,\dots,x_{n-1})\in R^{n-1}, P'=(x',t)\in R^n;$$

$$\partial_i=\partial_{x_i}, \partial_t=\partial_t, \partial_{ij}=\partial_{x_i}\partial_{x_j}.$$

Будем обозначать также $u_i=\partial_i u$, $u_{ij}=\partial_{ij}u$.

В слое D рассмотрим область $\Omega\in D$, граница которой $\partial\Omega=B_0\cup B_T\cup\Sigma$, где область B_0 на плоскости $t=0$, область B_T на плоскости $t=T$, Σ – n-мерная поверхность (с краем). Сечение $\Sigma_t=\Sigma\cap\{\tau=t\}$ для любых $\tau\in[0,T]$ является $(n-1)$-мерной поверхностью, которая в каждой своей точке имеет $(n-1)$-мерную касательную плоскость, лежащую в n-мерой плоскости $t=\tau$. В каждой точке P поверхности Σ существует вектор $\nu(P)$, который является ортом внутренней (по отношению к Ω) нормали в точке P к поверхности Σ_τ, лежащей в плоскости $t=\tau$. Обозначим также $\Omega^+=\Omega$, $\Omega^-=D\setminus\overline{\Omega}$, $B_\tau=(\overline{\Omega}\setminus\Sigma)\cap\{t=\tau\}$, $\tau\in[0,T]$.

В области Ω для $\alpha\in(0,1)$ рассмотрим анизотропные пространства Гёльдера $C^{i,\alpha}(\overline{D})$, $i=0,1,2$ [8] с нормами

$$\|f,\Omega\|^{(0,\alpha)}=\sup_{(x,t)\in\Omega}|f(x,t)|+$$
$$+\sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega}\left|\frac{f(x+\Delta x,t+\Delta t)-f(x,t)}{|\Delta x|^{\alpha}+|\Delta t|^{\alpha/2}}\right|,$$

$$\|f,\Omega\|^{(1,\alpha)}=\sup_{(x,t)\in\Omega}|f(x,t)|+$$
$$+\sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega}\left|\frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}}\right|+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\|\partial_l f,\Omega\|^{(0,\alpha)},$$

$$\|f,\Omega\|^{(2,\alpha)}=\sup_{(x,t)\in\Omega}|f(x,t)|+\sum_{l=1}^{n}\|\partial_l f,\Omega\|^{(1,\alpha)}+$$
$$+\|\partial_t f,\Omega\|^{(0,\alpha)},$$

$$\overset{\circ}{C}(\Sigma_0)=\{\varphi\in C(\overline{\Omega})\,|\,\varphi|_{\Sigma_0}=0\},$$

а также их подпространства

$$\overset{\circ}{C}{}^{i,\alpha}(\overline{\Omega})=\{f\in C^{i,\alpha}\,|\,f|_{t=0}=0\},\ i=0,1,$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})=\{f\in C^{2,\alpha}\,|\,f|_{t=0}=\partial_t f|_{t=0}=0\}.$$

Как известно [5], при условиях (2), (3) существует фундаментальное решение $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ для оператора L. Обозначим через $a(x,t)$ матрицу размером $n\times n$ $a(x,t)=(a_{ij}(x,t))$.

Для фундаментального решения $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ также имеет представление

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau)=Z(x-\xi,t,\tau;a(\xi,\tau))+W(x,t,\xi,\tau),$$

где W имеет слабую особенность по сравнению с Z [7, с. 409] и выбирается так, чтобы Γ удовлетворяло уравнению (1) по (x,t) при $t>\tau$. Обозначим

$$K(x,t,\xi,\tau)=-L_{(x,t)}Z(x-\xi,t,\tau;a(\xi,\tau)). \qquad (4)$$

Гладкость модифицированного потенциала

Рассмотрим объемный потенциал V с плотностью f:

$$Vf(P)=\int_{\Omega_t}\int\Gamma(P,Q)f(Q)dQ=$$
$$=\int_{\Omega_t}Z(x-y,t,\lambda;a(y,\lambda))f(y,\lambda)dyd\lambda+$$
$$+\int_{\Omega_t}W(x,t,y,\lambda)f(y,\lambda)dyd\lambda=V_1f(P)+V_2f(P).$$

В работе [6] проведено подробное исследование свойств объемного потенциала. Будем использовать следующий результат из этой работы. Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют (1), (2), $\Sigma\in C^{1,\alpha}$, $f\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\cap\overset{\circ}{C}(\Sigma_0)$. При этих условиях

$$V_1 f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$
$$\| V_1 f;\Omega \|^{(2,\alpha)} \le C \| f;\Omega \|^{(0,\alpha)} . \quad (5)$$

Покажем сначала, что

$$V_1 f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}^-),$$
$$\| V_1 f;\Omega^- \|^{(2,\alpha)} \le C \| f;\Omega \|^{(0,\alpha)} . \quad (6)$$

Действительно, функцию f можно продолжить в $\overline{D}$ до $\widetilde{f} \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$ (см. [5, с. 82]) так, что $\| \widetilde{f};D \|^{(0,\alpha)} \le C \| f;\Omega \|^{(0,\alpha)}$. Тогда

$$V_1 f(x,t) = \int_D Z(x-y,t,\lambda;a(y,\lambda))\widetilde{f}(y,\lambda)dyd\lambda -$$
$$-\int_{\Omega_t^-} Z(x-y,t,\lambda;a(y,\lambda))\widetilde{f}(y,\lambda)dyd\lambda, (x,t) \in \Omega^- .$$

Используя результаты о гладкости первого интеграла [7, с. 442–448] и (5), получаем (6) .

Для V_2 мы докажем несколько более сильное утверждение, чем в [6].

Лемма 1. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2), (3), поверх-ность $\Sigma \in C^{1,\alpha}$, а

$$f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \underset{\circ}{C}(\Sigma_0). \quad (7)$$

Тогда

$$V_2 f \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\overline{D}),$$
$$\| V_2 f;D \|^{(2,\alpha)} \le C \| f;\Omega \|^{(0,\alpha)} . \quad (8)$$

Доказательство. Обозначим

$$I(P) = \int_{\Omega_t} K(P,Q)f(Q)dQ.$$

Поскольку K имеет слабую особенность, то

$$I \in C(\overline{D}), \quad I|_{t=0} = 0. \quad (9)$$

Имеем:

$$V_2 f(P) = \int_{\Omega_t} W(P,Q)f(Q)dQ =$$
$$= \int_{\Omega_t} \left[\int_D \Gamma(P,\Lambda)K(\Lambda,Q)d\Lambda\right] f(Q)dQ = \quad (10)$$
$$= \int_D \Gamma(P,\Lambda)I(\Lambda)d\Lambda .$$

Перестановка порядка интегрирования возмож-на в силу абсолютной сходимости интеграла.

С другой стороны, имеем:

$$LV_1 f(P) = \begin{cases} f(P) - \int_{\Omega_t} K(P,Q)f(Q)dQ \\ \quad - \int_{\Omega_t} K(P,Q)f(Q)dQ \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} f(P) - I(P), P \in \Omega, \\ \quad - I(P), P \in \Omega. \end{cases}$$

Учитывая (5), (6) и (7), получаем, что

$$I \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}^-),$$
$$\| I;\Omega \|^{(0,\alpha)} \le C \| f,\Omega \|^{(0,\alpha)},$$
$$\| I;\Omega^- \|^{(0,\alpha)} \le C \| f,\Omega \|^{(0,\alpha)} .$$

Отсюда и из (9) заключаем, что

$$I \in \underset{\circ}{C}^{0,\alpha}(\overline{D}), \quad \| I;D \|^{(0,\alpha)} \le C \| f;\Omega \|^{(0,\alpha)} . \quad (11)$$

В силу представления (10) для $V_2 f$ и теоремы о гладкости объемного потенциала в слое [7, с. 443] получаем, что $V_2 f \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$,

$$\| V_2 f, D \|^{(2,\alpha)} \le C \| I, D \|^{(0,\alpha)} \le C_1 \| f,\Omega \|^{(0,\alpha)} .$$

Поскольку для $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $Vf|_{t=0} = 0$, то $D_x^k Vf|_{t=0} = 0$, $|k| \le 2$, и, так как объемный потенциал удовлетворяет в D уравнению $LVf = f$, имеем $V_t f|_{t=0} = f$. Поэтому, если $f \in \underset{\circ}{C}^{0,\alpha}(\overline{D})$, то $Vf \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\overline{D})$. Отсюда и из (11) получаем $V_2 f \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\overline{D})$.

Лемма доказана.

Из (5), (6) и леммы 1 следует, что

$$Vf \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}^-),$$
$$\| Vf;\Omega \|^{(2,\alpha)} \le C \| f,\Omega \|^{(0,\alpha)}, \quad (12)$$
$$\| Vf;\Omega^- \|^{(2,\alpha)} \le C \| f,\Omega \|^{(0,\alpha)} .$$

Если, кроме того, $f \in \underset{\circ}{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, то, учитывая равенство $V_t f|_{t=0} = f|_{t=0} = 0$ на B_0, получаем

$$Vf \in \underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\overline{D}). \quad (13)$$

Гладкость модифицированного потенциала простого слоя

Определение. Пусть $M(x,t,\partial_x,\partial_t)$ – дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами в $\overline{D}$, функция u определена в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ и такова, что $Mu \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}^-)$. Определим скачок Mu при переходе через границу как

$$[Mu](P) = M^+u(P) - M^-u(P), \quad P \in \Sigma,$$

где $M^+u(P) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} Mu(P + \varepsilon\nu(P))$, $M^-u(P) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} Mu(P - \varepsilon\nu(P))$.

Для непрерывных и ограниченных функций $f : \Sigma \to R$ будем рассматривать потенциал простого слоя

$$U\ \phi P) = \int_\Sigma \Gamma(P,Q)\varphi(Q)dQ. \quad (14)$$

Здесь и далее интеграл по Σ понимается как повторный: $\int_\Sigma dQ = \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_\tau} ds.$

Лемма 2. Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (2), (3), а поверхность $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ – компактна. Тогда для любой функции $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, такой, что $u|_\Sigma = 0$, $Lu \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, имеет место формула Грина:

$$\theta(P)u(P) = \int_\Omega \Gamma(P,Q)Lu(Q)dQ - \\ - \int_\Sigma \Gamma(P,Q)u_\eta(Q)dQ, \quad P \in \overline{D}, \tag{15}$$

где $\theta(P) = \begin{cases} 1, P \in \overline{\Omega}, \\ 0, P \in \overline{D} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$v(P) = -\int_\Sigma \Gamma(P,Q)u_\eta(Q)dQ, \; P \in \overline{D},$$

$$w(P) = \theta(P)u(P) - \int_\Omega \Gamma(P,Q)Lu(Q)dQ, \; P \in \overline{D}.$$

В силу условий леммы, гладкости потенциала простого слоя [8] и объемного потенциала [9] они обладают следующими свойствами:

$$v, w \in C^{2,1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

$$v, w \in C^{2,1}(\Omega^-) \cap \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}^-).$$

Используя формулу скачка производной по конормали потенциала простого слоя 8 и непрерывность первых пространственных производных объемного потенциала [9] при переходе через боковую границу области, получаем, что v и w являются решениями контактной задачи

$$\begin{cases} Lw(P) = 0, P \in \Omega \cup \Omega^-, \\ [w]|_\Sigma = 0, \\ [w_\eta]|_\Sigma = 0, \\ w|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

В силу единственности решения этой задачи [10] в классе $\overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}^-)$ заключаем, что $u \equiv v$ в $\Omega \cup \Omega^-$.

Так как все функции в формуле Грина (15) непрерывны в $\overline{D}$, то она будет справедлива и для $P \in \overline{D}$.

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2) и (3), граница области Ω $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ компактна. Тогда существует такая положительная функция

$$\psi \in C^{0,\alpha}(\Sigma), \quad (\exists \delta > 0)\, \psi(P) \ge \delta > 0 \quad \forall P \in \Sigma,$$

что модифицированный потенциал простого слоя $\hat{U}\varphi(P) = \int_\Sigma \Gamma(P,Q)\psi(Q)\varphi(Q)dQ$ является ограниченным оператором из $\overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$ в $\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, то есть $\hat{U}\varphi(P) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\; \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$, причем

$$(\exists\, C > 0)\; \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma) \; \| \hat{U}\varphi, \Omega \|^{(2,\alpha)} \le C \| \varphi; \Sigma \|^{(1,\alpha)}.$$

Доказательство. В слое $D' = \{(x,t) \in R^{n+1} \mid t \in (-T,T)\}$ рассмотрим равномерно-параболический оператор $L'u = u_t - a'_{ij}(x,t)u_{ij} - b'_i(x,t)u_i$, коэффициенты которого $a'_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{D'})$, $b'_i(x,t) \in C^{0,\alpha}(\overline{D'})$ являются продолжением в D' коэффициентов оператора L, симметричным относительно гиперплоскости $t = 0$:

$$a'_{ij}(x,t), b'_i(x,t) = \begin{cases} a_{ij}(x,t), b_i(x,t), & t \ge 0, \\ a_{ij}(x,-t), b_i(x,-t), & t < 0. \end{cases}$$

Продолжим область Ω в D' до области Ω', граница которой $\Sigma' \in C^{1,\alpha}$ при $t \ge 0$ совпадает с границей Σ, а при $t < 0$ является отражением Σ относительно гиперплоскости $t = 0$.

В области Ω' рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} L'u = 1, \\ u|_{\Sigma'} = 0, \\ u|_{t=-T} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Ее решение u существует и $u \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega'})$ (см. [8]).

На поверхности Σ рассмотрим функцию

$$\psi = u_\eta|_\Sigma \in C^{0,\alpha}(\Sigma). \tag{17}$$

Из принципа максимума следует, что $u > 0$ в Ω'. Поскольку $u|_{\Sigma'} = 0$, то в любой точке поверхности Σ выполнены условия теоремы типа Зарембы-Жиро о знаке косой производной [11]. Так как ψ отделена от нуля и $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\Sigma)$, то $1/\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\Sigma)$. Поэтому $\psi(P) = u_\eta(P) > 0\; \forall P \in \Sigma$. В силу компактности Σ существует $\delta > 0$: $\psi(P) \ge \delta > 0$ $\forall P \in \Sigma$.

В области Ω для произвольной функции $f \in \overset{\circ}{\tilde{N}}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$ рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} Lv = f, \\ v|_{\Sigma'} = \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma), \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Существует единственное решение $v \in \overset{\circ}{\tilde{N}}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ [8] этой задачи и $\| v, \Omega \|^{(1,\alpha)} \le C \| f, \Sigma \|^{(1,\alpha)}$.

Рассмотрим функцию $w = uv$ и обозначим $f = Lw$. Имеем: $f = L(uv) = uLv + vL'u - 2a_{ij}u_iv_j = v - 2a_{ij}u_iv_j \in \overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\Omega)$, $| f, \Omega \|^{(0,\alpha)} \le C_1 \| u, \Omega \|^{(1,\alpha)} \le C_2 \| f, \Sigma \|^{(1,\alpha)}$. Поскольку $w|_\Sigma = 0$, то, записав для w формулу Грина (15) и учитывая, что

$$w_\eta|_\Sigma = u_\eta v|_\Sigma + vu_\eta|_\Sigma = u_\eta v|_\Sigma = \psi f,$$

для области Ω^- получаем:

$$\hat{U}\varphi(P) = Vf(P), \quad P \in \overline{\Omega}^-.$$

Из оценок для объемного потенциала (12) и (13) теперь следует, что $\hat{U}\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}^-)$, причем

$$\| \hat{U}\varphi, \Omega^- \|^{(2,\alpha)} = \| Vf, \Omega^- \|^{(2,\alpha)} \le \\ \le C_1 \| f, \Omega \|^{(0,\alpha)} \le C_2 \| f, \Sigma \|^{(1,\alpha)}.$$

Для доказательства теоремы в области Ω достаточно в предыдущих рассуждениях поменять местами области Ω и Ω^-.

Теорема доказана.

Для области с границей из класса $C^{2,\alpha}$ теорему 3 можно уточнить. Покажем, что для такой поверхности можно взять $\psi = a[\nu]$.

Лемма 4. Пусть область $Q \in R^n$ ограничена, а ее граница $S \in C^{2,\alpha}$. Тогда существует функция $p \in C^{2,\alpha}(R^n)$ со свойствами:

1) $p|_S = 0$;

2) $(\exists \delta > 0)\ p_\nu|_S \geq \delta > 0$;

3) $(\exists R > 0)\ p(x) = 0$ при $|x| > R$.

Для такой функции имеет место равенство:

4) $p_\eta(x,t) = a[\nu](x,t)p_\nu(x) \quad \forall (x,t) \in \Sigma$.

Доказательство. Рассмотрим (единственное) решение $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа: $\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_S = 0. \end{cases}$

Как известно [12, гл. 6] $u \in C^{2,\alpha}(\overline{Q})$. Из принципа максимума следует, что $u(x) > 0$ для любого $x \in Q$. Рассмотрим произвольную точку $x \in S$. По теореме Жиро $u_\nu(x) > 0$, где u_ν – предельное значение производной по нормали изнутри области Q. В силу компактности S заключаем, что $(\exists \delta > 0)\ u_\nu(x) \geq \delta > 0\ \forall x \in S$.

Функцию u можно продолжить [12, гл. 6] до функции $p \in C^{2,\alpha}(R^n)$ так, чтобы выполнялось условие 3).

Докажем 4). Так как S является для функции p поверхностью уровня, то ее градиент направлен по нормали к поверхности:

$$\nabla p(x) = (\nabla p(x), \nu(x))\nu(x) = p_\nu(x)\nu(x),\ x \in S,$$

и

$$p_\eta(x,t) = (\nabla p(x), \eta(x,t)) =$$
$$= (\nu(x), \eta(x,t))(\nabla p(x), \nu(x)) = a[\nu](x,t)p_\nu(x).$$

Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (1) и (2), область Ω – цилиндрическая, а ее граница $\Sigma \in C^{2,\alpha}$ компактна. Тогда для $\psi = a[\nu]$

$$\hat{U}\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma), \tag{19}$$

$$(\exists\, C_1, C_2 > 0) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$$

$$C_1 \| \varphi; \Sigma \|^{(1,\alpha)} \leq \| \hat{U}f, \Omega \|^{(2,\alpha)} \leq C_2 \| f; \Sigma \|^{(1,\alpha)}.$$

Доказательство одинаково как для внутренней, так и внешней областей. Пусть для определенности, Ω ограничена и $p(x)$ – функция из леммы 4. Тогда $p_\nu \in C^{1,\alpha}(S)$ и в силу свойства 2) функции p, $1/p_\nu \in C^{1,\alpha}(S)$.

Для $f \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$ рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u|_\Sigma = \varphi/p_\nu \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma), \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Существует единственное решение $u \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ [8] этой задачи, и

$$\| u, \Omega \|^{(1,\alpha)} \leq C \| f/p_\nu, \Sigma \|^{(1,\alpha)} \leq C_1 \| f, \Sigma \|^{(1,\alpha)}. \tag{21}$$

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы 5, u – решение первой краевой задачи (20). Тогда

$$pu \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \| pu, \Omega \|^{(2,\alpha)} \leq C \| f, \Sigma \|^{(1,\alpha)}, \tag{3}$$

где p – функция из леммы 4.

Доказательство. Функция $v(x,t) = p(x)u(x,t)$ является решением первой краевой задачи:

$$\begin{cases} Lv = f, \\ v|_\Sigma = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где $f = L(pu)$. В силу леммы 4 и оценки (20) имеем:

$$f = pLu + u(L+c)p - 2a_{ij}\partial_i u \partial_j p =$$
$$= u(L+c)p - 2a_{ij}\partial_i u \partial_j p \in \overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),$$
$$\| f, \Omega \|^{(0,\alpha)} \leq C \| u, \Omega \|^{(1,\alpha)}.$$

Из теории Шаудера для параболических уравнений [7, гл. 4] и предыдущей оценки теперь следует, что

$$v \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \| v, \Omega \|^{(2,\alpha)} \leq C_1 \| f, \Omega \|^{(0,\alpha)} \leq$$
$$\leq C_2 \| u, \Omega \|^{(1,\alpha)} \leq C_3 \| f, \Sigma \|^{(1,\alpha)}.$$

Лемма доказана.

Учитывая свойства функции p (см. лемму 4), получаем:

$$\begin{aligned} \partial_\eta v\big|_\Sigma &= p\partial_\eta u\big|_\Sigma + u\partial_\eta p\big|_\Sigma = \\ &= f/p_\nu a[\nu]p_\nu = a[\nu]f. \end{aligned} \tag{23}$$

Запишем теперь для v формулу Грина:

$$v(P) = V[Lv](P) - \hat{U}\varphi(P), \quad P \in \overline{\Omega}. \tag{24}$$

Откуда, учитывая (12) и лемму 6, получаем:

$$\hat{U}\varphi = V[Lv] - v \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$
$$\| \hat{U}\varphi, \Omega \|^{(2,\alpha)} \leq C \| \varphi, \Sigma \|^{(1,\alpha)}. \tag{25}$$

Достаточность. Пусть $\hat{U}f \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Из результатов [8] следует, что существует единст-

венное решение $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\Sigma)$ интегрального уравнения

$$\hat{U}\varphi(P) = \psi(P) \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma),\ P \in \Sigma. \qquad (26)$$

Покажем, что это решение единственное в классе непрерывных функций на Σ. Действительно, пусть существуют два решения уравнения (26) $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\Sigma)$. Тогда функция $v(P) = \hat{U}\varphi_1(P) - \hat{U}\varphi_2(P)$ является решением внешней и внутренней первой краевой задачи

$$\begin{cases} Lv = 0, \\ v|_\Sigma = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

В силу единственности решения первой краевой задачи заключаем, что $v \equiv 0$ в $\overline{D}$. С другой стороны, по формуле скачка по конормали для потенциала простого слоя с непрерывной плотностью [2, с. 49] получаем

$$\hat{U}_\eta^+[\varphi_1 - \varphi_2](P) - \hat{U}_\eta^-[\varphi_1 - \varphi_2](P) =$$
$$= a[\nu](P)[\varphi_2(P) - \varphi_1(P)] = 0, \forall P \in \Sigma,$$

откуда $f_1 \equiv f_2$ на Σ; здесь $\hat{U}_\eta^+$ и $\hat{U}_\eta^-$ обозначают предельные значения производной по конормали изнутри и извне области соответственно.

В Ω^- потенциал $\hat{U}f$ является решением первой краевой задачи: $\begin{cases} Lu = 0, \\ u|_\Sigma = \hat{U}\varphi|_\Sigma \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\Sigma), \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$

Существует и единственно решение $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ этой задачи [7, гл. 4] и

$$\| u, \Omega^- \|^{(2,\alpha)} \le C_1 \| \hat{U}\varphi, \Sigma \|^{(2,\alpha)} \le C_2 \| \hat{U}\varphi, \Omega \|^{(2,\alpha)}.$$

В силу единственности $\hat{U}\varphi(P) = u(P), P \in \overline{\Omega}^-$. По формуле скачка для потенциала простого слоя по нормали получаем:

$$\varphi = \hat{U}_\nu^-\varphi - \hat{U}_\nu^+\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$\| \varphi, \Sigma \|^{(1,\alpha)} \le C \| \hat{U}\varphi, \Omega \|^{(2,\alpha)}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что для уравнения теплопроводности модифицированный потенциал простого слоя $\hat{U}\varphi$ в этом случае совпадает с потенциалом простого слоя $U\varphi$, так как $a[\nu] \equiv 1$.

Следствие 7. Пусть выполнены условия теоремы 5 и $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$. Тогда для потенциала простого слоя имеем:

$$U\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$(\exists\, C_1, C_2 > 0) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$$

$$C_1 \| \varphi, \Sigma \|^{(1,\alpha)} \le \| U\varphi, \Omega \|^{(2,\alpha)} \le C_2 \| \varphi, \Sigma \|^{(1,\alpha)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Камынин Л.И.** О гладкости тепловых потенциалов // Дифференциальные уравнения. Т. 2. № 5. 1966. С. 699–48.
2. **Черепова И.Ф.** О гладкости потенциала простого слоя. Деп. в ВИНИТИ, 29.06.88. № 5194–В88.
3. **Бадерко Е.И.** Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения // Дифференциальные уравнения. Т. 28. № 1. 1992. С. 17–23.
4. **Ван Тун.** Теория теплового потенциала Гладкость контурных параболических потенциалов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 3. С. 474–487.
5. **Фридман И.** Уравнения в частных производных параболического типа. М., 1968.
6. **Сиваков Д.С.** Некоторые свойства потенциала объемных масс для параболических уравнений. Деп. в ВИНИТИ. 05.10.94. № 2300–В94.
7. **Ладыженская О.И., Солонников С.Д., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. И.: Наука, 1968.
8. **Бадерко Е.И.** Решение методом граничных интегральных уравнений задач для линей-ных параболических уравнений произвольного порядка в негладких областях: дисс. д-ра. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1992.
9. **Черепова М.Ф.** Об оценках пространствен-ных производных второго порядка для параболического потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 4. С. 545–549.
10. **Шевелёва В.Н.** Контактные задачи для параболических уравнений и интегральные уравнения // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 3. С. 313–315.
11. **Камынин Л.И., Химченко Б.Н.** Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журнал. 1973. Т.14. № 1. С. 86–110.
12. **Гилбарг Д., Трудингер Р.** Эллиптические уравнения второго порядка. И., 1987.

Конёнков Андрей Николаевич, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru

УДК 517.91

МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ НАНОТЕХНОЛОГИЙ

Д.А. Куликов
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова

MECHANISM OF THE FORMATION OF THE WAVE DISSIPATIVE STRUCTURES IN ONE OF THE NANOTECHNOLOGICAL PROBLEMS

D.A. Kulikov

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными с отклоняющейся (преобразованной) пространственной переменной. Данное уравнение служит одной из математических моделей формирования рельефа на поверхности пластины под воздействием потока ионов. В работе изучена периодическая краевая задача. Предложен механизм формирования волнового нанорельефа как результат потери устойчивости плоского рельефа. Волновой рельеф находится в результате решения бифуркационных задач, для исследования которых использован аппарат теории нормальных форм, метод инвариантных многообразий. Для решений, описывающих волновой нанорельеф, приведены асимптотические формулы.

Ключевые слова: бифуркации и устойчивость, волновой нанорельеф, пространственно неоднородные решения.

The nonlocal equation of erosion simulating the process of surface shaping under ionic bombardment is considered. This equation contains the terms with transformed space variable. A periodic boundary value problem for this equation is studied. The possibility of a ripple topography formation is demonstrated by means of bifurcations theory methods. Asymptotic formulas for nanostructures are obtained by applying the method of normal forms and invariant manifolds.

Keywords: bifurcation, stability, ripple structures, space–nonhomogeneous solutions.

В работе рассматривается нелинейное уравнение с частными производными с отклоняющимся аргументом, которое моделирует формирование нанорельефа при бомбардировке ионами плоской поверхности мишени. Этот технологический процесс имеет широкое применение в микроэлектронике (наноэлектронике) при обработке полупроводниковых материалов. Математические модели базируются на основополагающих идеях П. Зигмунда (см., например, [1, 2]). В настоящее время широкую известность получила математическая модель, предложенная Брэдли–Харпером [3–5]. Для математической модели, которая носит название «уравнение Брэдли–Харпера» (иногда его называют уравнением Курамото–Сивашинского), в работе [5] был предложен один из возможных механизмов формирования наноструктур в результате потери устойчивости плоского состояния равновесия (СР) и локальных бифуркаций неоднородных диссипативных структур. В данной работе математическому анализу будет подвергнута иная модель, которая также получена на развитии идей П. Зигмунда, но учитывает нелокальные эффекты, возникающие при ионной бомбардировке (см. [6, 7]). В работах [6, 7] можно найти вывод этого уравнения, а также постановку задач, возникающих при исследовании указанной математической модели формирования неоднородных наноструктур. Приведем уравнение нелокальной эрозии уже в перенормированном виде

$$u_t = au_{xx} - cw_x + u - w + b_1(u-w)w_x + \\ + b_2(w_x)^2 + b_3(u-w)(w_x)^2, \tag{0.1}$$

где $u = u(t,x)$ – нормированное отклонение от плоского фронта мишени, $w = u(t, x-h)$, $h \in R$. Коэффициенты a, c, b_1, b_2, b_3 характеризуют условия, при которых происходит обработка мишени. Так, все они зависят от угла Θ между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности (см. рис. 1, где PQ – нормаль, стрелками указано направление пучка ионов). Наконец, $a, c > 0$. Положительный коэффициент a зависит от интенсивности потока ионов, то есть $a = a(J, \Theta)$ и при фиксированном Θ данная функция убывает при возрастании J, где J – интенсивность потока.

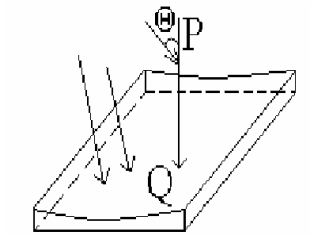

Рис. 1. Формирование нанорельефа

Как и в работах [3–7], уравнение (0.1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями. С учетом нормировок можно считать, что при всех $x, t \geq 0$ выполнено равенство

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \qquad (0.2)$$

Будем полагать, что $h = \pi / 2$. Иной, важный с точки зрения приложений случай, когда $h = \pi$, был рассмотрен в работе [8].

Рассмотрим далее вопрос, связанный с описанием структуры окрестности нулевого решения. Дополним краевую задачу (0.1), (0.2) начальными условиями

$$u(0, x) = f(x). \qquad (0.3)$$

В этом случае считаем, что $f(x) \in H_1$, где через H_1 обозначено пространство, состоящее из 2π-периодических функций $f(x) \in W_2^1[0; 2\pi]$, где через $W_2^1[0; 2\pi]$ обозначено пространство Соболева [9]. При таком выборе $f(x)$ из результатов работы [10] вытекает локальная разрешимость смешанной задачи (0.1)–(0.3).

Уравнение (0.1) входит в класс абстрактных параболических уравнений с преобразованным пространственным аргументом. Исследования краевых задач для отличных от (0.1) уравнений можно найти в работах [11–13], в которых рассматриваемые уравнения имеют, как правило, приложения в нелинейной оптике.

Отметим в заключении этого раздела, что краевая задача (0.1)–(0.3), наряду с решением $u(t, x)$, допускает решение $u(t, x) + C$, где C – произвольная постоянная. Далее будем рассматривать окрестность нулевого решения в смысле нормы фазового пространства. Окрестность иных СР $u(t, x) = C$ в силу вышесказанного может быть заменена на окрестность нулевого решения. С физической точки зрения замена $u \to u + C$ означает смену системы координат.

§ 1. Линейный анализ

Для исследования устойчивости нулевого СР рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (0.1)–(0.2) в окрестности тривиального СР. В результате получим линейную краевую задачу

$$u_t = A(a)u, \; u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \qquad (1.1)$$

где линейный дифференциальный оператор (ЛДО) $A(a)$ имеет в качестве области определения достаточно гладкие 2π-периодические функции по переменной x. Иначе,

$$A(a)v(x) = av'' - cv'_h + v - v_h, v_h = v(x - h).$$

В силу полноты семейства функций $\{\exp(ikx)\}$ в пространстве $L_2(0; 2\pi)$ собственные значения (СЗ) ЛДО $A(a)$ определяются равенством

$$\begin{aligned} \lambda_n = -an^2 - icn\exp(-inh) + \\ +1 - \exp(-inh), \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \qquad (1.2)$$

В частности, ЛДО $A(a)$ является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов [14], а краевую задачу (1.1) можно проинтерпретировать как абстрактное параболическое уравнение в $L_2(0; 2\pi)$. Добавим, что вне зависимости от выбора h справедливо равенство $\lambda_0 = 0$. Расположение остальных точек спектра на комплексной плоскости изучим детально при специальном выборе отклонения $h (h = \pi/2)$.

Тогда из равенства (1.2) вытекает, что при $n = 4k$, $k \in Z$, $\lambda_{4k} = -a(4k)^2 - 4ick$, $\operatorname{Re}\lambda_{4k} = -a(4k)^2$, $\operatorname{Im}\lambda_{4k} = 4kc$. Если $n = 4k + 1$, то $\lambda_{4k+1} = -a(4k+1)^2 - (4k+1)c + 1 + i$, $\operatorname{Re}\lambda_{4k+1} = -a(4k+1)^2 - (4k+1)c + 1$, $\operatorname{Im}\lambda_{k+1} = 1$. Аналогичные вычисления при $n = 4k + 2$ приводят к равенствам

$$\lambda_{4k+2} = -a(4k+2)^2 + ic(4k+2) + 2,$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{4k+2} = -a(4k+2)^2 + 2,$$
$$\operatorname{Im}\lambda_{k+2} = (4k+2)c.$$

Наконец, при $n = 4k + 3$ получаем, что

$$\lambda_{4k+3} = -a(4k+3)^2 + c(4k+3) + 1 - i,$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{4k+3} = -a(4k+3)^2 + (4k+3)c + 1,$$
$$\operatorname{Im}\lambda_{4k+3} = -1.$$

Сразу отметим, что $\lambda_0 = 0$ при всех рассматриваемых a и c. Поэтому вопрос об устойчивости СР сводится к проверке неравенств $\operatorname{Re}\lambda_n < 0$ при остальных n $(n \neq 0)$. При этом можно ограничиться рассмотрением лишь $n = 1, 2, \ldots$, так как $\lambda_{-n} = \overline{\lambda}_n$. При $n = 4k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ неравенство $\operatorname{Re}\lambda_{4k} < 0$ выполнено при всех $a > 0$. Если $n = 4k + 2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то неравенство $\operatorname{Re}\lambda_{4k+2} < 0$ будет выполнено, если $a > 2/(4k+2)^2$ при всех рассматриваемых k и, следовательно, с необходимостью $a > a_2 = 1/2$. При $a = a_2$ у ЛДО $A(a_2)$ есть СЗ $\lambda_{\pm 2} = \pm 2ci$. При $a < a_2$, по крайней мере, одна пара СЗ переходит в правую полуплоскость комплексной плоскости и СР $u(t, x) = C$ становятся заведомо неустойчивыми.

При $n = 4k+1$ аналогичные рассуждения приводят к неравенству $a > a_1 = 1-c$, гарантирующему выполнение условия $\operatorname{Re}\lambda_{4k+1} < 0$ при всех $k = 0,1,2,\ldots$, если, конечно, учесть условие $c > 0$.

Пусть теперь $n = 4k+3$. В данном случае неравенство $\operatorname{Re}\lambda_{4k+3} < 0$, если $k = 0,1,2,\ldots$, выполнено при всех $a > a_3 = (1+3c)/9$.

Положим, $a_{кр} = \max(a_1, a_2, a_3)$. Тогда при $a > a_{кр}$ справедливо неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n \le -\gamma_0 < < 0$, $\gamma_0 = Const > 0$. Наличие СЗ $\lambda_0 = 0$ означает, что нулевое решение краевой задачи устойчиво, но не может быть асимптотически устойчивым ни при каком выборе параметров задачи.

Если $a < a_{кр}$, то нулевое СР теряет устойчивость, так как у ЛДУ $A(a)$ появляются СЗ в правой полуплоскости комплексной плоскости. При $a = a_{кр}$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости.

Лемма 1. Пусть $c \in (0;1/2)$, тогда $a_{кр} = a_1 = 1-c$ и у ЛДО $A_1 = A(a_1)$ есть СЗ $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{\pm1} = \pm i\sigma_1$, $\sigma_1 = 1$, которым отвечают собственные функции (СФ) $e_0(x) = 1$, $e_{\pm1}(x) = \exp(\pm ix)$ соответственно. Для остальных СЗ ЛДО A_1 выполнено неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n \le -\gamma_0 < 0, \gamma_0 = Const > 0$.

Лемма 2. Пусть $c \in (1/2; 7/6)$. Тогда $a_{кр} = = a_2 = 1/2$. ЛДО $A_2 = A(a_2)$ имеет СЗ $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{\pm2} = \pm i\sigma_2$, $\sigma_2 = 2c$. Им соответствуют СФ $e_0(x) = 1$, $e_{\pm2}(x) = \exp(\pm 2ix)$. Для остальных СЗ выполнено неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n \le -\gamma_0 < 0$.

Лемма 3. Пусть $c \in (7/6;\infty)$. Тогда ЛДО $A_3 = A(a_3)$ ($a_{кр} = a_3 = (1+3c)/9$) имеет СЗ $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{\pm3} = \pm i\sigma_3$, $\sigma_3 = -1$, которым отвечают СФ $e_0(x) = 1$, $e_{\pm3}(x) = \exp(\pm 3ix)$ соответственно. Для остальных λ_n, как и ранее, $\operatorname{Re}\lambda_n \le -\gamma_0 < 0$, $\gamma_0 = Const > 0$.

Доказательство лемм сводится на первом этапе к вычислению a_1, a_2, a_3 с последующим их сравнением.

Замечание 1. Если $c = 1/2$, $a = 1/2$, то ЛДО $A(a)$ имеет СЗ $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности 2. Им отвечают СФ $e_{\pm1}(x) = \exp(\pm ix)$, $e_{\pm2}(x) = = \exp(\pm 2ix)$, и, конечно, как всегда, есть СЗ $\lambda_0 = 0$ ($e_0(x) = 1$).

При $c = 7/6$ и $a = 1/2$ у ЛДО $A(a)$ есть две пары чисто мнимых СЗ $\lambda_{\pm2} = \pm i\sigma_2$ ($\sigma_2 = 7/3$) и $\lambda_{\pm3} = \pm i\sigma_3$ ($\sigma_3 = -1$). Им отвечают СФ $e_{\pm2}(x) = \exp(\pm 2ix)$ и $e_{\pm3}(x) = \exp(\pm 3ix)$ соответственно. Конечно, СЗ $\lambda_0 = 0$ сохраняется.

Итак, при $c = 7/6$ и $c = 1/2$ имеют место критические случаи коразмерности 2 с дополнительным вырождением. При $c \in (0;1/2) \cup (1/2;7/6) \cup (7/6;\infty)$ реализуются критические случаи коразмерности 1. При изменении параметров задачи потеря устойчивости происходит колебательным образом.

Пусть $c \in (0;1/2)$, $a_{кр} = 1-c$. В рамках этой работы такой критический случай будем называть первым. При $c \in (1/2; 7/6)$, $a_{кр} = 1/2$ реализуется второй критический случай. Если же $c \in (7/6;\infty)$, $a_{кр} = (1+3c)/9$, то такой случай в данной работе будем называть третьим. Случаи коразмерности 2, когда $c = 1/2$, $a = 1/2$ и $c = 7/6$, $a = (1+3c)/9$, соответственно будем называть четвертым и пятым критическими случаями.

Ниже рассмотрим нелинейные краевые задачи в случаях, близких к отмеченным критическим.

§ 2. Критические случаи коразмерности 1

Положим, $a = a_{кр} - \gamma_1\varepsilon$, $a_{кр} = 1-c$, где $c \in (0;1/2)$, $\gamma_1 = \pm 1$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$, положительная постоянная ε_0 достаточно мала. Подчеркнем еще раз, что при таких предположениях реализуется случай, близкий к первому критическому случаю. Обозначим через $A_1(\varepsilon)$ ЛДО вида

$$A_1(\varepsilon)v(x) = (a_{кр} - \varepsilon)v''(x) - cv'(x - \pi/2) + \\ + [v(x) - v(x - \pi/2)], \quad A_1 = A_1(0),$$

область определения которого состоит из достаточно гладких 2π-периодических функций $v(x)$. У ЛДУ $A_1(\varepsilon)$ есть СЗ $\lambda_0(\varepsilon) = 0$, $\lambda_{\pm1}(\varepsilon) = \gamma_1\varepsilon \pm i\sigma_1$, $\sigma_1 = 1$, которые отвечают СФ $e_0(x) = 1$, $e_{\pm1} = \exp(\pm ix)$ соответственно. Следовательно, поведение решений краевой задачи при достаточно малых начальных условиях определяется поведением решений трехмерной системы дифференциальных уравнений на центральном инвариантном многообразии (см., например, [15–16]). Эту систему, если она записана в специальном и удобном виде, принято называть нормальной формой, а иногда и квазинормальной формой [17].

Для построения нормальной формы на трехмерном инвариантном многообразии воспользуемся аналогом метода Крылова–Боголюбова (см. [5, 17]) и решение нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2) (если, конечно, $h = \pi/2$, $a = a_{кр} - \gamma_1\varepsilon, c \in (0;1/2)$) будем искать в виде суммы

$$u(t,x,s,\varepsilon) = \psi_1(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t,x,s) + \\ + \varepsilon u_2(t,x,s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,x,s) + O(\varepsilon^2), \qquad (2.1)$$

где $j=1,2,3$, $s=\varepsilon t$, $0\le\varepsilon\ge 1$, $\psi_1(s)$, $u_j(t,x,s)$ – достаточно гладкие функции, которые по переменной x имеют период 2π (удовлетворяют краевым условиям (0.2)), а по t – период $2\pi/\sigma_1$. Уместно для дальнейших построений отметить, что $\frac{\partial}{\partial t}\left(u_j(t,x,\varepsilon t)\right)=\frac{\partial u_j}{\partial t}+\frac{\partial u_j}{\partial s}\varepsilon$. Ниже $w_j(t,x,s)=u_j(t,x-(\pi/2),s)$, $j=1,2,3$.

Подстановка суммы (2.1) в краевую задачу (0.1), (0.2) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях ε приводит к серии линейных краевых задач для определения u_j $(j=1,2,3)$. При их формировании и изучении будем интерпретировать s как параметр. Итак, получаем

$$u_{1t}=A_1u_1, \tag{2.2}$$

$$u_1(t,x+2\pi,s)=u_1(t,x,s), \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\psi_1'(s)+u_{2t}=A_1u_2+\\+b_1(u_1-w_1)w_{1x}+b_2(w_{1x})^2,\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$u_2(t,x+2\pi,s)=u_2(t,x,s), \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}u_{3t}=A_1u_3+b_1(u_1-w_1)w_{2x}+\\+b_1(u_2-w_2)w_{1x}+2b_2w_{1x}w_{2x}+\\+b_3(u_1-\omega_1)(w_{1x})^2-\gamma_1\varepsilon u_{1xx}-\\-z_1'(s)\exp(ix+i\sigma_1t)-\overline{z_1'}(s)\exp(-ix-i\sigma_1t),\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$u_3(t,x+2\pi,s)=u_3(t,x,s), \tag{2.7}$$

где штрихом обозначена производная по s.

Для всех трех краевых задач рассмотрим вопрос о существовании $2\pi/\sigma_1$-периодических решений по переменной t.

В качестве решения краевой задачи (2.2), (2.3) выберем функцию

$$\begin{gathered}u_1(t,x,s)=z_1\exp(ix+i\sigma_1t)+\\+\overline{z_1}\exp(-ix-i\sigma_1t),\end{gathered} \tag{2.8}$$

где функции $z_1=z_1(s)$, $\overline{z_1}=\overline{z_1}(s)$ будут определены ниже.

Замечание 2. Рассмотрим неоднородную краевую задачу $v_t=A_mv+g(t,x)$, $v(t,x+2\pi)=v(t,x)$, где $m=1,2,3$, а функция $g(t,x)$ имеет по переменной t период $2\pi/\sigma_m$, а по x – 2π. Тогда данная неоднородная краевая задача имеет $2\pi/\sigma_m$-периодическое решение по переменной t, если выполнены условия разрешимости:

$$\frac{\sigma_m}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi/\sigma_m}\int_0^{2\pi}g(t,x)dxdt=$$

$$=\frac{\sigma_m}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi/\sigma_m}\int_0^{2\pi}g(t,x)\exp(\pm imx\pm i\sigma_mt)dxdt=0.$$

Равенства

$$\frac{\sigma_m}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi/\sigma_m}\int_0^{2\pi}v(t,x)dxdt=$$

$$=\frac{\sigma_m}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi/\sigma_m}\int_0^{2\pi}v(t,x)\exp(\pm imx\pm i\sigma_mt)dxdt=0$$

выделяют одно подходящее решение.

Рассмотрим сначала неоднородную краевую задачу (2.4), (2.5). Из условий ее разрешимости и способа выбора решения краевой задачи (2.2), (2.3) (см. формулу (2.8)) получаем, что справедливо равенство

$$\psi_1'=q_1|z_1|^2, q_1=2(b_1+b_2). \tag{2.9}$$

При таком выборе $\psi_1=\psi_1(s)$ функция

$$u_2(t,x,s)=\xi z_1^2\exp(2ix+2i\sigma_1t)+\overline{\xi}\overline{z_1}^2\exp(-2ix-2i\sigma_1t)$$

будет решением краевой задачи (2.4), (2.5). Здесь $\sigma_1=1$, а $\xi=\xi_1+i\xi_2$. При этом

$$\xi_1=[(b_1+b_2)(1-2c)+b_1(1-c)]/2\theta_1,$$
$$\xi_2=[b_1(1-2c)-(1-c)(b_1+b_2)]/2\theta_1,$$
$$\theta_1=5c^2-6c+2.$$

Условия разрешимости в классе $2\pi/\sigma_1$-периодических функций по переменной t приводят к уравнениям для $z_1(s)$, $\overline{z_1}(s)$

$$z_1'=\gamma_1z_1+(d_1+ig_1)z_1|z_1|^2, \tag{2.10}$$

где

$$d_1=(b_2-b_1)(b_1+2b_2)c-(b_1+2b_2)b_2/\theta_1+3b_3,$$
$$g_1=-(b_1+2b_2)[(b_1+b_2)(1-2c)+b_1(1-c)]/\theta_1+b_3.$$

Для $\overline{z_1}$, естественно, получаем комплексно сопряженное уравнение к (2.10). Уравнения для ψ_1, z_1, $\overline{z_1}$ формируют укороченный вариант системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику решений изучаемой краевой задачи на трехмерном инвариантном многообразии $M_3(\varepsilon)$.

В системе (2.9),(2.10) положим

$$z_1(s)=\rho_1\exp(i\varphi_1(s)). \tag{2.11}$$

Замена (2.11) приводит изучаемую нормальную форму (2.9),(2.10) к системе из трех уже действительных уравнений

$$\begin{aligned}\psi_1'&=q_1\rho_1^2,\\ \varphi_1'&=g_1\rho_1^2,\\ \rho_1'&=\gamma_1\rho_1+d_1\rho_1^3.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Напомним, что γ_1 может принимать два значения 1 или –1.

Если $\gamma_1=1$, то нулевое решение краевой задачи (0.1), (0.2) при $a=a_{кр}-\gamma_1\varepsilon$ неустойчиво. Также не-

устойчиво СР $\rho_1 = 0$ третьего уравнения системы (2.12). Если при этом $d_1 < 0$, то третье уравнение системы (2.12) имеет ненулевое СР $\rho_1(s) = \rho_1 = \sqrt{-\gamma_1 / d_1}$, которое асимптотически устойчиво как решение дифференциального уравнения для $\rho_1(s)$. Итак, справедливо утверждение.

Лемма 4. При $\gamma_1 = 1$, $d_1 < 0$ система дифференциальных уравнений имеет устойчивое решение $\psi(s) = q_1 \rho_1^2 s + \psi_0$, $\varphi(s) = g_1 \rho_1^2 s + \varphi_0$, $\rho_1 = \sqrt{-\gamma_1 / d_1}$. При $\gamma_1 = -1$, $d_1 > 0$ данное решение также существует, но оно уже неустойчиво.

Из результатов, изложенных в монографии [17], вытекает, что справедливо утверждение, которое относится к краевой задаче (0.1), (0.2), если $a = a_{кр} - \gamma_1 \varepsilon$, а $c \in$ $\in (0; (1/2) - \delta_1]$, $\delta_1 = const > 0$.

Теорема 1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассматриваемая краевая задача (0.1), (0.2) имеет решение

$$u(t,x,\varepsilon) = [-\gamma_1 \varepsilon q_1 / d_1 + o(\varepsilon)]t +$$
$$+ \varepsilon^{1/2} (\sqrt{-\gamma_1 / d_1})[\exp(ix + i\sigma_1(\varepsilon)t)] + к.с.] +$$
$$+ \varepsilon(-\gamma_1 / d_1)[\xi \exp(2ix + 2i\sigma_1(\varepsilon)t)] + к.с.] + o(\varepsilon),$$

где знак *к.с.* заменяет комплексно сопряженную функцию к непосредственно ему предшествующему слагаемому, а $\sigma_1(\varepsilon) =$ $= \sigma_1 - \varepsilon g_1 \gamma_1 / d_1$.

Это решение существует, если $\gamma d_1 < 0$. При $d_1 < 0\,(\gamma_1 = 1)$ такое решение устойчиво и неустойчиво, если $d_1 > 0\,(\gamma_1 = -1)$.

Из теоремы 1 вытекает, что основную роль в ее формулировке играет знак ляпуновской величины d_1, которую можно записать в следующей форме:

$$d_1 = \left(-b_1^2 c - 2b_2^2(1-c) - b_1 b_2 (c+1)\right) / \theta_1 + 3b_3.$$

Ситуация, когда $d_1 < 0$, а значит решения, найденные в рамках теоремы 1, устойчивы и, следовательно, физически реализуемы, достаточно типична. Если $b_1 b_2 > 0$, то первое слагаемое в формуле для величины d_1 всегда меньше нуля при $c \in (0; 1/2)$. Поэтому, если $b_3 \le 0$ или b_3 достаточно мало, то в данной ситуации $d_3 < 0$. Последнее неравенство также реализуется, если $b_3 < 0$, а b_1, b_2 достаточно малы. Можно привести и иные варианты выбора постоянных b_1, b_2, b_3, когда реализуется неравенство $d_3 < 0$.

Перейдем теперь к случаю, когда $c \in (1/2; 7/6)$. Напомним, что при этом $a_{кр} = a_2 = 1/2$, а ЛДО A_2 имеет СЗ $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{\pm 2} = \pm i\sigma_2$, $\sigma_2 = 2c$, которым отвечают СФ $e_0(x) = 1$, $e_2(x) = \exp(2ix)$, $\bar{e}_2(x) = \exp(-2ix)$.

Перейдем ко второму случаю и, положим $a = a_{êð} - \gamma_2 \varepsilon$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$. В этой ситуации выпишем нормальную форму исследуемой нелинейной краевой задачи. Построения в рамках этого случая в значительной мере повторяют построения предыдущего. Поэтому ограничимся сокращенным вариантом изложения. Как и в предыдущем случае, решения на трехмерном инвариантном многообразии будем искать в специальном виде

$$\begin{aligned} u(t,x,s,\varepsilon) &= \psi_2(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(t,x,s) + \\ &+ \varepsilon u_2(t,x,s) + \varepsilon^{3/2} u_3(t,x,s) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $t = \varepsilon s$, $\psi_2(s)$, $u_j(t,x,s)$ – достаточно гладкие функции, $j = 1,2,3$. Последние три функции по переменным t, x имеют период $2\pi/\sigma_2$, 2π соответственно. Положим теперь

$$u_1(t,x,s) = z_2 \exp(2ix + i\sigma_2 t) + \overline{z_2} \exp(-2ix - i\sigma_2 t),$$

где функции $z_2 = z_2(s)$, $\overline{z_2} = \overline{z_2}(s)$, $\psi_2 = \psi_2(s)$ подлежат определению как решения системы дифференциальных уравнений нормальной формы. Приступим к ее построению.

Подставляя сумму (2.13) в краевую задачу (0.1), (0.2) при $a = a_{êð} - \gamma_2 \varepsilon$, $\gamma_2 = \pm 1$, $c \in (1/2; 7/6)$, а затем приравнивая члены полученного равенства при одинаковых степенях ε, получим две неоднородные краевые задачи для u_2, u_3. Итак, в данном случае они имеют вид, аналогичный краевым задачам (2.4), (2.5), (2.6), (2.7):

$$\begin{aligned} \psi_2' + u_{2t} &= A_2 u_2 + \\ &+ b_1(u_1 - w_1) w_{1x} + b_2 (w_{1x})^2, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$u_2(t, x + 2\pi, s) = u_2(t,x,s), \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} u_1' + u_{3t} &= A_2 u_3 - \gamma_2 u_{1xx} + \\ b_1[u_1 - w_1] w_{2x} &+ b_1[u_2 - w_2] w_{1x} + \\ &+ 2b_2 w_{1x} w_{2x} + b_3[u_1 - w_1] w_{1x}^2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u_3(t, x + 2\pi, s) = u_3(t,x,s). \tag{2.17}$$

Выше, как и ранее, штрихом обозначена частная производная по s. Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (2.14), (2.15) в классе периодических по t функций с периодом $2\pi/\sigma_2$ находим, что ψ_2 удовлетворяет уравнению

$$\psi_2' = q_2 |z_2|^2, \tag{2.18}$$

где $q_2 = 8b_2$. В таком случае решения краевой задачи (2.14), (2.15) можно и следует выбрать в виде суммы

$$u_2(t,x,s)=\eta z_2^2\exp(4ix+2i\sigma_2 t)+$$
$$+\bar{\eta}\bar{z}_1^2\exp(-4ix-2i\sigma_2 t),$$

$\eta=\eta_1+i\eta_2$, а $\eta_1=-\dfrac{b_2+\mathrm{c}b_1}{2(1+c^2)},\eta_2=-\dfrac{b_1-\mathrm{c}b_2}{2(1+c^2)}$.

В свою очередь разрешимость неоднородной краевой задачи (2.16), (2.17) приводит к формированию уравнения для z_2

$$z_2'=\gamma_2 z_2+(d_2+ig_2)z_2|z_2|^2, \qquad (2.19)$$

где $\mathrm{d}_2=4(2b_2^2+b_1^2+\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2c)/(1+c^2)+8b_3$, $\mathrm{g}_2=$ $=4((2b_2^2-b_1^2)c-3b_1b_2)/(1+c^2)$. Сразу отметим, что неравенство $d_2<0$ реализуется относительно «редко», например, если $b_3<0$, а постоянные b_1, b_2 достаточно малы.

Рассмотрим, как и ранее, более детально систему дифференциальных уравнений (2.18), (2.19) и, положим, что

$$z_2=\rho_2\exp(i\varphi_2),$$
$$\rho_2=\rho_2(s)\geq 0,$$
$$\varphi_2=\varphi_2(s)\in R.$$

В результате получим систему уже из трех действительных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\psi_2'&=q_2\rho_2^2,\\ \varphi_2'&=g_2\rho_2^2,\\ \rho_2'&=\gamma_2\rho_2+d_2\rho_2^3.\end{aligned} \qquad (2.20)$$

Лемма 5. Пусть $d_2<0$, $\gamma_2=1$. Тогда система (2.20) имеет устойчивое решение $\psi_2=$ $=q_2\rho_2^2 s+\psi_{20}$, $\varphi_2=\mathrm{g}_2\rho_2^2 s+\varphi_{20}$, $\rho_2=$ $=\sqrt{-\gamma_2/d_2}$. При $d_2>0$, $\gamma_2=-1$ это решение также существует, но оно неустойчиво.

Теорема 2. Пусть $a=a_{кр}-\gamma_2\varepsilon$ $(\gamma_2=\pm1)$, $\mathrm{c}\in[(1/2)+\delta;(7/6)-\delta]$, $\delta>0$. Существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ краевая задача (0.1), (0,2) имеет решение, для которого справедлива асимптотическая формула

$$u(t,x,\varepsilon)=[-\varepsilon q_2\gamma_2/d_2+\mathrm{o}(\varepsilon)]t+$$
$$+\varepsilon^{1/2}(\sqrt{-\gamma_2/d_2})[\exp(2ix+i\sigma_2(\varepsilon)t)]+к.с.]+$$
$$+\varepsilon(-\gamma_2/d_2)[\eta\exp(4ix+2i\sigma_2(\varepsilon)t)]+к.с.]+\mathrm{o}(\varepsilon),$$

где *к.с.* обозначает слагаемое, которое комплексно сопряжено предшествующему и выписанному явно, а $\sigma_2(\varepsilon)=\sigma_2-\varepsilon g_2\gamma_2/d_2$.

Это решение существует, если $\gamma_2 d_2<0$ $(\gamma_2=\pm1)$. При $d_2<0$ $(\gamma_2=1)$ оно устойчиво и неустойчиво при $d_2>0$ $(\gamma_2=-1)$.

Доказательство теоремы 2 проводится по относительно стандартной схеме (см. [5, 17]). Уместно также отметить, что в теоремах 1, 2 речь идет не об одном решении, а об их семействе, так как наряду с указанным решением $u(t,x,\varepsilon)$ можно выбрать и решение как $u(t+\alpha,x,\varepsilon)+\beta$, $\alpha,\beta\in R$.

Перейдем к рассмотрению третьего случая. Пусть $c\in(7/6;\infty)$, $a=a_{кр}-\gamma_3\varepsilon$, $a_{кр}=(1+3c)/9$. В этом случае решения будем искать в виде

$$\begin{aligned}u(t,x,\varepsilon)&=\psi_3(s)+\varepsilon^{1/2}u_1(t,s,x)+\\ &+\varepsilon u_2(t,s,x)+\varepsilon^{3/2}u_3(t,s,x)+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \qquad (2.21)$$

где $s=\varepsilon t$, то есть в форме, аналогичной (2.1), (2.13). В формуле (2.21), положим,

$$u_1(t,x,\varepsilon)=\mathrm{z}_3\exp(3ix+i\sigma_3 t)+\overline{z_3}\exp(-3ix-i\sigma_3 t),$$

где функции $z_3=z_3(s)$, $\overline{z_3}=\overline{z_3}(s)$, $\psi_3=\psi_3(s)$, как и в первых двух случаях, подлежат определению.

Опуская детальный анализ построения нормальной формы, вопрос сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\psi_3'&=q_3|z_3|^2,\\ z_3'&=\gamma_3 z_3+(d_3+ig_3)z_3|z_3|^2,\end{aligned} \qquad (2.22)$$

которую можно записать в иной форме, если $z_3=\rho_3\exp(i\varphi_3)$. В итоге получим действительную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\psi_3'&=q_3\rho_3^2,\varphi_3'=g_3\rho_3^2,\\ \rho_3'&=\gamma_3\rho_3+d_3\rho_3^3.\end{aligned} \qquad (2.23)$$

В системах (2.22), (2.23) постоянные d_3, q_3, g_3 определяются в процессе реализации алгоритма

$$q_3=18b_2-6b_1,\Theta_3=(1+6c)^2+(1+3c)^2.$$
$$d_3=27(b_1^2c+b_1b_2(1-3c)-$$
$$-6b_2^2(1+3c))/\Theta_3+27b_3,$$
$$\mathrm{g}_3=9(6b_2-b_1)(3b_2(1+6c)-b_1(9c+2))/\Theta_3.$$

Как и в двух предыдущих случаях справедливо утверждение, аналогичное теоремам 1, 2.

Теорема 3. Пусть $a=a_{кр}-\gamma_3\varepsilon$ $(a_{кр}=a_3)$, $\gamma_3=sign(a_{кр}-\varepsilon)$, $c\in[7/6+\delta;\infty)$, $\delta>0$. Существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ краевая задача (0.1), (0,2) имеет решение

$$u(t,x,\varepsilon)=[-\gamma_3 q_3\varepsilon/d_3+\mathrm{o}(\varepsilon)]t+$$
$$+\varepsilon^{1/2}(\sqrt{-\gamma_3/d_3})[\exp(3ix+i\sigma_3(\varepsilon)t)]+к.с.]+$$
$$+\varepsilon(-\gamma_3/d_3)[\zeta\exp(6ix+2i\sigma_3(\varepsilon)t)]+к.с.]+\mathrm{o}(\varepsilon),$$

где *к.с.*, как и ранее, обозначает слагаемое, комплексно сопряженное предшествующему и выписанному явно, а $\sigma_3(\varepsilon)=\sigma_3-\varepsilon g_3\gamma_3/d_3$. Наконец

$$\zeta=\zeta_1+i\zeta_2,\zeta_1=3[3b_2(1+6c)-b_1(2+9c)]/2\Theta_3,$$
$$\zeta_2=9[b_1c+b_2(1+3c)]/2\Theta_3.$$

Данное решение существует, если $\gamma_3 d_3<0$. При $d_3<0$ оно устойчиво и неустойчиво, если $d_3>0$. Отметим, что здесь речь идет не об одном решении, а о семействе таких решений вида

$$u(t+\alpha,x,\varepsilon)+\beta,\ \alpha,\beta\in R.$$

В заключение этого раздела отметим, что в теоремах 1, 2, 3 указаны решения одного типа, где функция, задающая эти решения, состоит из двух частей: линейной относительно t и периодической функции по переменной t. Такие решения иногда называют периодическими решениями второго рода.

§ 3. Критические случаи коразмерности 2

Напомним, что при $\tilde{n} = 7/6$, $\tilde{n} = 1/2$ в задаче об устойчивости нулевого решения могут реализоваться критические случаи, когда на мнимой оси находятся пять СЗ с учетом кратности.

Рассмотрим сначала случай, когда $a = 1/2$, $c = 1/2$. При таком выборе коэффициентов ЛДУ $A_0(a)v(x) = v''/2 - v_h'/2 + [v - v_h]$, $v_h = v(x - \pi/2)$ имеет нулевое СЗ, а также двукратные СЗ i и $-i$.

Положим,

$$a = 1/2 - \alpha\varepsilon, c = 1/2 - \beta\varepsilon, \qquad (3.1)$$

где $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ будем далее рассматривать в качестве малого параметра. С учетом равенств (3.1) ЛДО $A_0(a)$ можно записать в виде

$$A(\varepsilon)v(x) = (1/2 - \alpha\varepsilon)v'' - (1/2 - \beta\varepsilon)v_h' + [v - v_h].$$

Заметим, что полученный ЛДО определен на достаточно гладких 2π-периодических функциях. Этот ЛДО имеет СЗ $\lambda_0(\varepsilon) = 0$ при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$, которому отвечает СФ $e_0(x) = 1$. Наконец, СФ $\exp(\pm ix)$, $\exp(\pm 2ix)$ отвечают СЗ

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = (\alpha + \beta)\varepsilon \pm i,\ \lambda_{3,4}(\varepsilon) = 4\alpha\varepsilon \pm i(1 - 2\beta\varepsilon).$$

Напомним, что для остальных СЗ ЛДО $A_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\lambda_k \le -\gamma_0,\ k = \pm 3, \pm 4, ...,\ \gamma_0 = const > 0.$$

Ясно, что $A_0 = A(0)$. Рассмотрим теперь нелинейную краевую задачу (0.1), (0.2) при $a = (1/2) - \alpha\varepsilon$, $c = (1/2) - \beta\varepsilon$. При таком варианте выбора коэффициентов краевая задача (0.1), (0.2) в окрестности любого из выбранных однородных СР имеет центральное многообразие $M_5(\varepsilon)$ размерности 5 [15–16]. При этом динамику решений на нем определяет система из пяти дифференциальных уравнений – нормальная форма. В предыдущем разделе во всех трёх случаях соответствующее центральное многообразие было трехмерным, и нормальная форма содержала три дифференциальных уравнения. Для построения нормальной формы используем практически тот же алгоритм, что и в предыдущем разделе с некоторыми модификациями.

Решения на многообразии $M_5(\varepsilon)$ будем искать в следующей форме

$$\begin{aligned} u(t,x,\varepsilon) = \psi_4(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t,s,x) + \\ + \varepsilon^2 u_2(t,s,x) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,s,x) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \qquad (3.2)$$

где, как и ранее, $s = \varepsilon t$, но в нашем случае следует положить

$$\begin{aligned} u_1(t,s,x) = z_1(s)\exp(ix + it) + \overline{z_1}(s)\exp(-ix - it) + \\ + z_2(s)\exp(2ix + it) + \overline{z_2}(s)\exp(-2ix - it). \end{aligned}$$

Достаточно гладкие по совокупности переменных функции $u_j(t,s,x)(j = 2,3)$ по переменным t, x имеют период 2π.

Подстановка суммы (3.2) в краевую задачу (0.1), (0.2) при выбранных a и c ($a = (1/2) - \alpha\varepsilon$, $c = (1/2) - \beta\varepsilon$) приводит к двум неоднородным краевым задачам для определения функции $u_j(t,s,x)$ ($j = 2,3$). Ниже, как и ранее, штрихом обозначена производная по s.

$$u_{2t} - A_0u_2 + \psi_4' = b_1[u_1 - w_1]w_{1x} + b_2w_{1x}^2, \qquad (3.3)$$

$$u_2(t,s,x + 2\pi) = u_2(t,x). \qquad (3.4)$$

$$\begin{aligned} u_{3t} - A_0u_3 + z_1'\exp(ix + it) + \overline{z_1'}\exp(-ix - it) + \\ + z_2'\exp(2ix + it) + \overline{z_2'}\exp(-2ix - it) = \\ = -\alpha u_{1xx} + \beta w_1 + b_1[u_1 - w_1]w_{2x} + \\ + b_1[u_2 - w_2]w_{1x} + 2b_2w_{1x}w_{2x} + b_3[u_1 - w_1]w_{1x}^2, \end{aligned} \qquad (3.5)$$

$$u_3(t,s,x + 2\pi) = u_3(t,s,x). \qquad (3.6)$$

Здесь $w_j(t,s,x) = u_j(t,s,x - (\pi/2)), j = 1,2$.

Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (3.3), (3.4) в классе 2π-периоди-ческих по t функций получаем уравнение для определения ψ_4'. В нашем случае оказалось, что

$$\psi_4' = c_1|z_1|^2 + c_2|z_2|^2, \qquad (3.7)$$

где $c_1 = 2(b_1 + b_2), c_2 = 8b_2$.

Далее, как обычно, следует найти $u_2(t,s,x)$ – решение неоднородной краевой задачи (3.3), (3.4).

Замечание 3. Рассмотрим неоднородную краевую задачу $u_t - A_0u = F(t,x)$, $u(t,x + 2\pi) \equiv u(t,x)$, где $F(t,x)$ – 2π-периодическая функция переменных t, x. Условиями разрешимости данной краевой задачи в классе 2π-периодических по t функций служат следующие пять равенств:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t,x)\exp(\pm imx \pm it)dxdt, m = 1,2,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t,x)dxdt = 0.$$

С помощью аналогичных равенств для $u(t,x)$ единственным образом выбираются подходящие решения неоднородного уравнения. После не очень сложных, но относительно громоздких вычислений можно показать, что соответствующее решение имеет вид

$$\mathrm{u}_2(t,s,x)=\eta_1 z_1^2(s)\exp(2ix+2it)+$$
$$+\eta_2 z_2^2(s)\exp(4ix+2it)+$$
$$+\eta_3 z_1 z_2(s)\exp(3ix+2it)+\eta_4 z_1\overline{z_2}\exp(-ix)+к.с.$$
$$\eta_1=b_1+(-b_1-b_2)i,$$
$$\eta_2=-\frac{2b_2+b_1}{5}+\frac{-b_2+2b_1}{5}i,$$
$$\eta_3=\frac{2}{13}(b_1-6b_2)-\frac{8}{13}(2b_1+b_2)i,$$
$$\eta_4=2(b_1+2b_2).$$

В свою очередь условия разрешимости неоднородной краевой задачи (3.5), (3.6) позволяют выписать уравнения для $z_1=z_1(s)$, $z_2=z_2(s)$:

$$z_1'=\mu_1 z_1+z_1\left(d_{11}|z_1|^2+d_{12}|z_2|^2\right),$$
$$z_2'=\mu_2 z_2+z_2\left(d_{21}|z_1|^2+d_{22}|z_2|^2\right), \qquad (3.8)$$

где оказалось, что

$$\mu_1=\alpha+\beta,\mu_2=4\alpha-2i\beta,$$
$$d_{jk}=a_{jk}+ib_{jk},j,k=1,2$$
$$a_{11}=3b_3-2\left(b_1^2+3b_1b_2+2b_2^2\right),$$
$$a_{12}=8b_3+8(3b_1^2-16b_1b_2-12b_2^2)/13,$$
$$a_{21}=4b_3+2(27b_1^2+25b_1b_2+62b_2^2)/13,$$
$$a_{22}=8b_3+(32b_2^2+8b_1b_2+16b_1^2)/5.$$

Явные выражения для b_{jk} приводить не будем по двум причинам. Во-первых, из-за их громоздкости, а во-вторых, как будет видно ниже, их величина не играет заметной роли при формулировке результатов и тем более их обоснования.

Отметим, что при анализе задачи в линейной постановке оказалось, что СЗ $\pm i$ ЛДО A_0 двукратные, но специфика данной краевой задачи такая, что приводит к изучению нерезонансной нормальной формы (3.7), (3.8).

Положим $z_j=\rho_j\exp(i\varphi_j)$, $j=1,2$. Последняя замена позволяет переписать систему дифференциальных уравнений (3.7), (3.8) в биполярной системе координат

$$\rho_1'=F_1(\rho_1,\rho_2)=(\alpha+\beta)\rho_1+$$
$$+\rho_1(a_{11}\rho_1^2+a_{12}\rho_2^2),$$
$$\rho_2'=F_2(\rho_1,\rho_2)=4\alpha\rho_2+ \qquad (3.9)$$
$$+\rho_2(a_{21}\rho_1^2+a_{22}\rho_2^2),$$

$$\varphi_1'=G_1(p_1,p_2)=(b_{11}\rho_1^2+b_{12}\rho_2^2),$$
$$\varphi_2'=G_2(p_1,p_2)=(b_{21}\rho_1^2+b_{22}\rho_2^2), \qquad (3.10)$$

$$\psi_4'=G_0(\rho_1,\rho_2)=c_1\rho_1^2+c_2\rho_2^2. \qquad (3.11)$$

Центральную роль при исследовании играет замкнутая подсистема дифференциальных уравнений (3.9) для амплитудных переменных p_1, p_2. Она имеет нулевое СР, которое асимптотически устойчиво, если $\alpha<0,\alpha+\beta<0$. Пусть, кроме нулевого СР, система дифференциальных уравнений (3.9) имеет и ненулевые СР:

$$\rho_1(s)=\rho_{10}\ge 0,\ \rho_2(s)=\rho_{20}\ge 0,\ \rho_{10}^2+\rho_{20}^2>0.$$

Вопрос об устойчивости каждого из них решается, как хорошо известно, с использованием теоремы об устойчивости по первому приближению и в таком случае приближение сводится к исследованию спектра матрицы Якоби

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial\rho_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial\rho_2}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial\rho_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial\rho_2}\end{pmatrix}_{\substack{\rho_1=\rho_{10}\\ \rho_2=\rho_{20}}}.$$

В нашем случае ненулевые СР могут быть трех типов: $S_1:\rho_{10}>0,\rho_{20}=0$, $S_2:\rho_{10}=0,\rho_{20}>0$, $S_3:\rho_{10}>0,\rho_{20}>0$. Так, например, если имеем СР S_3, то соответствующую матрицу обозначим

$$J_3=\begin{pmatrix}2a_{11}\rho_{10}^2 & 2a_{12}\rho_{10}\rho_{20}\\ 2a_{21}\rho_{10}\rho_{20} & 2a_{22}\rho_{20}^2\end{pmatrix}.$$

При реализации СР S_1 получаем матрицу

$$J_1=\begin{pmatrix}2a_{11}\rho_{10}^2 & 0\\ 0 & 4\alpha+a_{21}\rho_{10}^2\end{pmatrix}.$$

Наконец, если реализуемое СР S_2, то получаем матрицу

$$J_2=\begin{pmatrix}\alpha+\beta+a_{21}\rho_{20}^2 & 0\\ 0 & 2a_{22}\rho_{20}^2\end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что СЗ μ_{km} матрицы J_k, где $k=1,2,3$, $m=1,2$ такие, что для них выполнено условие $Re\,\mu_{km}\ne 0$ при всех рассматриваемых k,m, то есть S_k – грубые СР.

Справедливо утверждение, доказательство которого повторяет известные конструкции из работы [5], а также использует результаты работы [17].

Теорема 4. Существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ и $a=(1/2)-\alpha\varepsilon$, $c=(1/2)-\beta\varepsilon$ краевая задача (0.1), (0.2) имеет решение, порождаемое СР S_1,S_2,S_3 системы дифференциальных уравнений (3.9)

$$u(t,x,\varepsilon)=(G_0\varepsilon+o(\varepsilon))t+$$
$$+\varepsilon^{1/2}(\rho_{10}\exp(ix+it+i\varepsilon G_1t)+к.с.)+$$
$$+\varepsilon^{1/2}(\rho_{20}\exp(2ix+it+i\varepsilon G_2t)+к.с.)+$$
$$+\varepsilon(\rho_{10}^2\exp(2ix+2it+2i\varepsilon G_1t)+к.с.)+$$
$$+\varepsilon(\rho_{20}^2\exp(4ix+2it+2i\varepsilon G_2t)+к.с.)+$$
$$+\varepsilon(\rho_{10}\rho_{20}\exp(3ix+2it+i\varepsilon(G_1+G_2)t)+к.с.)+$$
$$+\varepsilon(\rho_{10}\rho_{20}\exp(-ix+i\varepsilon(G_1-G_2)t)+к.с.)+o(\varepsilon),$$

где ρ_{10}, ρ_{20} координаты одного из СР (S_1, S_2, S_3), а $G_m = G_m(\rho_{10}, \rho_{20}), \quad m = 0,1,2$. Данное решение наследует устойчивость соответствующего грубого СР.

Отметим, что СР S_1 и S_2 соответствуют решения, которые фактически указывались в предыдущем разделе, то есть периодические решения второго рода. Иной вариант реализуется, если рассматривается случай, когда $\rho_{10} \neq 0, \rho_{20} \neq 0$. Тогда из СР бифурцирует пространственно неоднородное решение, у которого есть две составляющие: линейная функция от t и квазипериодическая (в общем случае) функция переменного t. Условно такие решения можно назвать квазипериодическими решениями второго рода.

Аналогичный результат можно получить, если $a = (1/2) - \alpha\varepsilon, \quad c = (7/6) - \beta\varepsilon$. Исследование краевой задачи (0.1), (0.2) также сводится к исследованию нормальной формы, схожей с системой дифференциальных уравнений (3.9), (3.10), (3.11).

§ 4. Заключение

В работе рассмотрена периодическая краевая задача для нелокального уравнения эрозии. Показано, что при выборе этой математической модели сохраняется механизм образования наноструктур, который был выявлен для модели Бредли – Харпера в работе [5]. Суть данного механизма состоит в том, что волновые структуры могут сформироваться при потере устойчивости плоского фронта обработки мишени ионов (см. также [5, 7, 8]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-2298.2013.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sigmund P.** A mechanism of surface microrougening by ion bombardment // J. Mat. Sci. 1973. V. 8. P. 1545.
2. **Sigmund P.** Theory of sputtering. Sputtering yields of amorhous and polycrystalline targets // Phys. Rev. 1969. V. 184. № 2. P. 383–416.
3. **Bradley R.M., Harper J.M.E.** Theory of ripple topography induced by ion bombardement // J. Vac. Technol. 1988. A6(4). P. 2390–2395.
4. **Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Стриханов М.Н.** Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т. 1. № 2. С. 151–158.
5. **Куликов А.Н., Куликов Д.А.** Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 930–945.
6. **Рудый А.С., Бачурин В.И.** Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Сер. Физическая. 2008. Т. 72. № 5. С. 624–629.
7. **Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В.** Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении ионной бомбардировкой // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 2. С. 109–118.
8. **Куликов Д.А., Рудый А.С.** Формирование волнового нанорельефа при распылении поверхности ионной бомбардировкой. Нелокальная модель эрозии // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. № 5. С. 82–91.
9. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 2000. 255 с.
10. **Соболевский П.Е.** Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Моск. матем. о-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
11. **Белан Е.П.** Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом // Динамические системы. 2000. В. 16. С. 160–167.
12. **Белан Е.П., Лыкова О.Б.** Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1348–1357.
13. **Белан Е.П.** О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журнал математической физики, анализа и геометрии. 2005. Т. 1. № 1. С. 3–34.
14. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М: Наука, 1967. 464 с.
15. **Марсден Дж., Мак-Кракен М.** Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М: Мир, 1950. 367 с.
16. **Куликов А.Н.** О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных опера-торов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1976. С. 114–129.
17. **Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.** Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М: Физматлит, 2005. 430 с.

Куликов Дмитрий Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова
150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14,
e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

УДК 517.925.51

ОДНА ЗАДАЧА ВИБРАЦИОННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

В.Н. Курашин, Е.И. Троицкий

Рязанское высшее воздушно-десантное командное училище имени генерала армии В.Ф. Маргелова
Рязанский государственный агротехнологический университет имени П.А. Костычева

ONE VIBRATIONAL STABILIZATION TASK

V.N. Kurashin, E.I. Troickiy

Изучена ограниченность решений линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Получены достаточные условия устойчивости. Рассмотрен пример вибрационной стабилизации неустойчивого линейного уравнения второго порядка.

Ключевые слова: система линейных дифференциальных уравнений, устойчивость, стабилизация.

The linear differential system with periodic coefficient limitation has been considered. They received sufficient conditions of stability. They have considered the vibrational stabilization example of instable linear equation of the second degree.

Keywords: the system of linear differential equations, stability, stabilization.

В работах [1, 2] рассматривалась задача об устойчивости дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \mathrm{p}(t)x = 0 \qquad (1)$$

с T-периодическим коэффициентом $\mathrm{p}(t)$, a – const, $a > 0$. При этом

$$\sup \mathrm{p}(t) = \mathrm{M}, \inf \mathrm{p}(t) = -\mathrm{m}, \int_0^T \mathrm{p}(t)\mathrm{M} = \theta_0 , \qquad (2)$$

$$\mathrm{p}(t) \not\equiv \mathrm{const}, \mathrm{M} > 0, \mathrm{m} > 0.$$

Вопрос об устойчивости сводился к задаче оптимального управления, решаемой с помощью принципа максимума. Пусть D и d – дискриминанты характеристического уравнения (1) при $\mathrm{p}(t) = M$ и $\mathrm{p}(t) = -m$ соответственно. В работе [1] исследовался случай $D = 0$, $d > 0$. В работе [2] рассматривался случай, когда $D < 0$, $d = 0$.

В настоящей статье обсуждается задача об устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с T-периодическими коэффициентами, удовлетворяющими условию (2),

$$\dot{x} = (A + \mathrm{p}(t)B)\, x \qquad (3)$$

в случае $D = -\Delta^2 < 0$, $\mathrm{d} = 0$. Кроме того,

$$AB - BA \neq 0, \qquad \mathrm{q} = \int_0^T \mathrm{Sp}\left[A + \mathrm{p}(t)B\right]\mathrm{d}t < 0.$$

Для дальнейших рассуждений примем следующие обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_A = SpA = a_1 + a_4, \quad \sigma_B = SpB = b_1 + b_4,$$

$$\sigma_{AB} = SpAB = a_1b_1 + a_4b_4 + a_2b_3 + a_3b_2,$$

$$\sigma_0 = 2\sigma_{AB} - \sigma_A\sigma_B, \quad D_A = \sigma_A^2 - 4\cdot\det A,$$

$$D_B = \sigma_B^2 - 4\cdot\det B$$

(D_A, D_B – дискриминанты характеристических уравнений матриц A и B соответственно).

Константа Ляпунова $\overline{A}_T$ для T/K-периодического процесса имеет вид $\overline{A}_T = \exp(\frac{q}{2k})\cdot r(k)$, $k \in N$, где

$$r(k) = \cos\frac{\Delta}{2}\tau + \frac{\omega}{\Delta}(M+m)(\sigma_0 - mD_B)\sin\frac{\Delta}{2}\tau.$$

Используя результаты [2, 3], получим следующие достаточные условия устойчивости системы (3) в рассматриваемом нами случае.

Теорема. Пусть согласно принятым предположениям (2) о системе (3) выполнены условия

$$\begin{gathered} -mT \le \theta_0 \le MT, \\ \sigma_A\cdot T + \sigma_B\cdot\theta_0 < 0, \\ D_A + 2M\sigma_0 + M^2D_B = -\Delta^2 < 0, \\ D_A - 2m\sigma_0 + m^2D_B = 0, \\ 0 < \frac{\Delta(mT+\theta_0)}{(M+m)} < \pi, \\ 0 < \frac{MT-\theta_0}{\Delta}(mD_B - \sigma_0) \le 2. \end{gathered} \qquad (4)$$

Тогда система (3) устойчива.

В качестве примера рассмотрим задачу о вибрационной стабилизации неустойчивого уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, a < 0, b > 0. \qquad (5)$$

Определим условия, накладываемые на параметры периодической функции $\mathrm{p}(t)$, чтобы тривиальное решение уравнения

$$\ddot{x} + (a + \mathrm{p}(t))\,\dot{x} + bx = 0, \theta_0 > 0. \qquad (6)$$

было устойчиво. Уравнение (6) равносильно в смысле устойчивости системе (7)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - (a + p(t))x_2. \end{aligned} \qquad (7)$$

При этом

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -b, a_4 = -a,$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = 0, b_4 = -1,$$
$$\sigma_A = -a, \sigma_B = -1, \sigma_0 = a,$$
$$D_A = a^2 - 4b, D_B = 1.$$

Стабилизация уравнения (5) осуществляется при помощи вибраций конечной амплитуды с известным средним значением за период периодического коэффициента, добавляемых к постоянному параметру a. Заметим, что при решении практических задач трудно обеспечить вибрацию всех параметров [4].

Полагая для простоты, что $a = -1$, $b = 4$, $T = 1$, $M = m$, получим следующие условия вибрационной стабилизации:

$$\begin{aligned} -M \le \theta_0 \le M, \quad 1 - \theta_0 < 0, \\ M^2 - 2M - 15 < 0, \\ M^2 + 2M - 15 = 0, \\ 0 < 3 + \theta_0 < \pi\sqrt{3}, \quad 0 < 3 - \theta_0 \le \sqrt{3}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Из (8) с учетом положительности M и неравенства $D < 0$ находим значение M для амплитуды вибраций, равное 3. Окончательно из (8) получаем условие для среднего значения $\theta_0 (\theta_0 > 0)$ периодической функции p(t) на периоде [0; 1]

$$3 - \sqrt{3} \le \theta_0 < \sqrt{3}(\pi - \sqrt{3}).$$

Заметим, что уравнение $d = 0$ в (4) может не иметь действительных корней или положительные корни не удовлетворяют неравенству $D < 0$. В этих случаях стабилизация неустойчивого уравнения (5) предлагаемым способом невозможна.

Может показаться, что условие $d = 0$ накладывает жесткие ограничения на параметры системы (3). Однако проверка условий устойчивости (4) в рассматриваемом случае проще, чем в знаковых случаях: $D < 0$, $d < 0$; $D < 0$, $d > 0$ [3, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Курашин В.Н., Троицкий Е.И.** Исследование устойчивости одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2009. № 14. С. 68 – 70.
2. **Курашин В.Н., Троицкий Е.И.** Об устойчивости одного дифференциального уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом // Математические методы в научных исследованиях: межвуз. сб. науч. тр. / Ряз. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2008. С. 42 – 45.
3. **Курашин В.Н., Троицкий Е.И.** Об устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2011. № 16. С. 51 – 53.
4. **Розенблат Г.М.** О стабилизации неустойчивых систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. 1979. №10. С. 19 – 26.
5. **Курашин В.Н., Троицкий Е.И.** К устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. / РГПИ. Рязань, 1981. С. 59 – 63.

Курашин Владимир Николаевич, к. ф.-м. н., профессор кафедры математических и естественно-научных дисциплин Рязанского высшего воздушно-десантного командного училища имени генерала армии В.Ф. Маргелова
390031. г. Рязань, пл. им. генерала армии В.Ф. Маргелова, д. 1, тел.: +7 (4912) 21-51-04.

УДК 517.977

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБРИДНЫХ ФУНЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ГФДСП)

А.С. Ларионов, П.М. Симонов
Братский государственный университет,
Пермский государственный национальный исследовательский университет

STABILITY OF HYBRID FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT (HFDSA)

A.S. Larionov, P.M. Simonov

Рассматривается абстрактная гибридная система фунционально-дифференциальных уравнений. Получены условия её разрешимости в парах пространств. Рассмотрены простые примеры.

Ключевые слова: гибридная система фунционально-дифференциальных уравнений, устойчивость, метод модельных уравнений.

The abstract hybrid system of the functional differential equations is considered. Conditions of its resolvability in couple of spaces are received. Simple examples are considered.

Keywords: hybrid system of functional differential equations, stability, model equations' method.

1. Введение

Исследование по устойчивости решений ГФДСП мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных ГФДСП. Для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t)\ ,$$
$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h)\ ,$$

$x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^k$, $x_2(\tau) = \psi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0)$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\psi : [-h, 0) \to \mathbb{R}^{n-k}$ – кусочно-непрерывная вектор-функция, получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости [1].

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [2] позволила дать ясное и лаконичное описание их основных свойств. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГФДСП, а именно гибридных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГФДУП), формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости.

2. Постановка задачи: одно уравнение – линейное разностное, определенное на полуоси, а другое – линейное функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ЛФДУП) на полуоси. Сводим к ЛФДУП на полуоси.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f, g, y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt$ для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерыв-

ных функций $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]}=\|\dot{x}\|_{L[0,T]}+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T>0$. Операторы $\mathcal{L}_{11},F_{11}:D\to L$, $\mathcal{L}_{12},F_{12}:L\to L$, $\mathcal{L}_{21},F_{21}:D\to L$, $\mathcal{L}_{22},F_{22}:L\to L$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Обозначим $(\Delta y)(t)=y(t)-y(t-h)$, где $t\ge h>0$, и $(\Delta y)(t)=y(t), t\in[0,h)$.

Пусть модельное уравнений [2, 4–6] $\mathcal{L}_{11}x=z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B\subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Например, $\sup\limits_{t\ge0}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$. Тогда, положив $\mathcal{L}_{11}x\overset{def}{=}\dot{x}+x=z$, принимаем в качестве банахова пространства B банахово пространство L_∞ измеримых и ограниченных в существенном функций $z:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\operatorname{vrai\,sup}\limits_{t\ge0}\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$. Пространство $D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t)=(\mathcal{W}z)(t)+(\mathcal{U}\alpha)(t)=\int_0^t e^{-(t-s)}z(s)ds+\alpha e^{-t}$$

$$(\alpha\in\mathbb{R}^n,\ z\in L_\infty).$$

Эти решения ограничены ($\sup\limits_{t\ge0}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$) и их производная $\dot{x}=-x+z$ принадлежит пространству L_∞. Все решения этого уравнения образуют банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)}=\operatorname{vrai\,sup}_{t\ge0}\|\dot{x}(t)+x(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty,$$

которое линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_\infty^{(1)}[0,\infty)$ с нормой

$$\|x\|_{W_\infty^{(1)}[0,\infty)}=\sup_{t\ge0}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\operatorname{vrai\,sup}_{t\ge0}\|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Дальше будем это пространство обозначать как W_∞. При этом $W_\infty\subset D$ и это вложение непрерывно.

Аналогично можно для банахова пространства $B\subset L$ ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11},B)$ с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11},B)}=\|\dot{x}+x\|_B+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n},$$

где вложение $B\subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор $\mathcal{W}$ действует из пространства B в пространство B, а оператор $\mathcal{U}$ действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство B. Это условие эквивалентно тому [2 – 5], что пространство $D(\mathcal{L}_{11},B)$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}[0,\infty)$ с нормой

$$\|x\|_{W_B^{(1)}[0,\infty)}=\|\dot{x}\|_B+\|x\|_B.$$

Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом $W_B\subset D$ и это вложение непрерывно.

Операторы $\mathcal{L}_{11},\mathcal{L}_{21},F_{11},F_{12}:D\to L$ рассматриваются как приведения на пару (W_B,B): $\mathcal{L}_{11},\mathcal{L}_{21},F_{11},F_{21}:W_B\to B$. Операторы

$$\Delta y,\mathcal{L}_{12},\mathcal{L}_{22},F_{12},F_{22}:L\to L$$

также рассматриваются как приведения на пару (B,B): $\Delta y,\mathcal{L}_{12},\mathcal{L}_{22},F_{12},F_{22}:B\to B$ предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11}x=f$ для $f\in L$ принадлежит пространству D и представляется формулой Коши

$$x(t)=X_{11}(t)x(0)+\int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds.$$

Будем считать, что оператор $\mathcal{L}_{22}:L\to L$ вольтеррово обратим, то есть существует $\mathcal{L}_{22}^{-1}:L\to L$ и оператор $\mathcal{L}_{22}^{-1}:L\to L$ вольтерров.

Поставим задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f,g\}\in B\times B$ ее решения $\{x,y\}\in W_B\times B$.

Рассмотрим второе уравнения $\mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}y=g$. Предположим, что оператор $\mathcal{L}_{22}:B\to B$ вольтеррово обратим. Тогда это уравнение запишется в виде $\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x+y=\mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Выразим y: $y=-\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}^{-1}g$ и подставим в первое уравнение $\mathcal{L}_{11}x+\mathcal{L}_{12}y=f$: $(\mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x=f-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$.

Обозначим $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}$ и $f_1=f-$ $-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Получим уравнение $\mathcal{L}x=f_1$. Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}:W_B\to B$ вольтеррово обратим, то есть если для уравнения $\mathcal{L}x=f_1$ при любом $f_1\in B$ его решения $x\in W_B$ и оператор $\mathcal{L}^{-1}:B\to W_B^0$ вольтерров, где $W_B^0=\{x\in W_B,x(0)=0\}$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f,g\}\in B\times B$ ее решения $\{x,y\}\in W_B\times B$.

Пример 1. Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)+ax(t)+by(t)=f(t),\ t\in[0,\infty),\\&y(t)-dy(t-h)+cx(t)=g(t),\ t\in[h,\infty),\end{aligned}\qquad(2)$$

и

$$y(t)+cx(t)=g(t),\ t\in[0,h).$$

Введем оператор $(Sy)(t) = dy(t-h),\ \ t \ge h,$ $(Sy)(t) = 0, t \in [0,h)$. Тогда второе уравнение запишется в виде $y(t) - (Sy)(t) + cx(t) = g(t),$ $t \in [0,\infty)$.

Рассмотрим оператор $S : L_\infty \to L_\infty$. Известно, что оператор $(I-S) : L_\infty \to L_\infty$ вольтеррово обратим тогда и только тогда, когда спектральный радиус оператора $\rho_{L_\infty}(S)$ в пространстве L_∞ меньше единицы: $\rho_{L_\infty}(S) < 1$ [3, 4.2.3, 4.4.3; 7]. Для оператора S условие $\rho_{L_\infty}(S) < 1$ эквивалентно неравенству $|d| < 1$ [7].

Введем обозначения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) = \dot{x}(t) + ax(t)\ ,\ (\mathcal{L}_{12}y)(t) = by(t)\ ,$$

$$(\mathcal{L}_{21}x)(t) = cx(t)\ ,\ (\mathcal{L}_{22}y)(t) = y(t) - (Sy)(t)\ .$$

Выполним преобразование

$$\mathcal{L}x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g = f_1\ .$$

Запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t) \ = \ \dot{x}(t) + ax(t) - bc((I-S)^{-1}x)(t) \ =$$
$$= \ f(t) - b((I-S)^{-1}g)(t) = f_1(t)\ ,\ t \in [0,\infty)\ .$$

Обратим оператор $(I-S)^{-1} : L_\infty \to L_\infty$. Получаем уравнение

$$\dot{x}(t) - (S\dot{x})(t) + (a-bc)x(t) - a(Sx)(t) = f_2(t) \ = \ = \ f_1(t) - (Sf_1)(t)\ ,\ t \in [0,\infty)\ . \qquad (3)$$

Соответствующий характеристический многочлен (квазиполином) имеет вид

$$\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 e^{-\lambda h} + \alpha_3 \lambda e^{-\lambda h}\ ,$$

где $\alpha_1 = a - bc$, $\alpha_2 = -ad$, $\alpha_3 = -d$.

Воспользовавшись результатами из [1], получаем, что корни квазиполинома имеют отрицательные вещественные корни, отделенные от мнимой оси каким-то положительным числом, тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1)\ |d| < 1,\quad a - bc > |ad|\ ;$$

или

$$2)\ |d| < 1,\ \ ad > |a - bc|,\ \ h < h^*\ ,$$

где h^* вычисляется по формуле

$$h^* = \sqrt{\frac{1-d^2}{a^2d^2 - (a-bc)^2}}\arccos\left(\frac{a - bc + ad^2}{(bc-2a)d}\right).$$

В этом случае гибридное уравнение будет асимптотически и даже экспоненциально устойчиво. Тогда для фундаментального решения и функции Коши уравнения (3) справедливы экспоненциальные оценки с отрицательным показателем. Отсюда следует, что для любого $f_2 \in L_\infty$ решение $x \in L_\infty$ и его производная $\dot{x} \in L_\infty$, то есть $x \in W_\infty$.

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (2) при любом $\{f, g\} \in L_\infty \times L_\infty$ ее решения $\{x, y\} \in W_\infty \times L_\infty$.

Замечание 1. Часто второе уравнение в (2) записывается в виде

$$y(t) - dy(t-h) + cx(t) = g(t)\ ,\ t \in [0,\infty)\ ,$$

где $y(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in [-h, 0)$. Тогда оператор в левой части уравнения при $t \in [0,\infty)$ можно переписать в виде

$$dy(t-h) \ = \begin{cases} dy(t-h), & t \ge h, \\ 0, & t \in [0,h) \end{cases} \ +$$
$$+ \begin{cases} 0, & t \ge h, \\ d\varphi(t-h), & t \in [0,h) \end{cases} \ =$$
$$= \ (Sx)(t) \ + \ d\varphi^h(t)\ .$$

Второе уравнение в (2) перепишем в виде

$$y(t) - (Sy)(t) + cx(t) = g_1(t) = g(t) + d\varphi^h(t)\ .$$

2. Постановка задачи: одно уравнение – линейное разностное, определенное на полуоси, а другое – ЛФДУП на полуоси. Сводим к линейному разностному уравнению с последействием на полуоси.

Операторы $\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{21} : D \to L$ рассматриваются как приведения на пару (W_B, B): $\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{21} : W_B \to B$, предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными. Операторы $\mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{22} : L \to L$ также рассматриваются как приведения на пару (B, B): $\mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{22} : B \to B$, предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Допустим, общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11}x = f$ для $f \in L$ принадлежит пространству D и представляется формулой Коши

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds\ .$$

Запишем это так: $x = X_{11}x(0) + C_{11}f$, где

$$(X_{11}x(0))(t) = X_{11}(t)x(0)\ ,$$

$$(C_{11}f)(t) \ = \ \int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds\ .$$

Из первого уравнения в системе (1) выразим x:

$$x = X_{11}x(0) + C_{11}f - C_{11}\mathcal{L}_{12}y\ .$$

Подставим значение x во второе уравнение в системе (1):

$$\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y \ =$$
$$= \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) + \mathcal{L}_{21}C_{11}f - \mathcal{L}_{21}C_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{22}y \ = \ g\ .$$

Получим уравнение вида $\mathcal{L}y = g_1$, где

$$\mathcal{L} \ = \ \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}C_{11}\mathcal{L}_{12}\ ,\ g_1 \ = \ g - \mathcal{L}_{21}C_{11}f - \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0)\ .$$

Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}: B \to B$ вольтеррово обратим, то есть если для уравнения $\mathcal{L}y = g_1$ при любом $g_1 \in B$ его единственное решение $x \in B$ и оператор $\mathcal{L}^{-1}: B \to B$ вольтерров. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times B$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times B$.

Пример 2. Рассмотрим два уравнения из примера 1. Воспользовавшись формулой Коши для x, первое уравнение в системе (2) запишем в виде

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)(f(s) - by(s))ds,$$

или так:

$$x(t) = e^{-at}x(0) + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - by(s))ds.$$

Подставим x во второе уравнение системы (2):

$$y(t) - (Sy)(t) + c(e^{-at}x(0) +$$

$$+ \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - by(s))ds) = g(t),$$

$$y(t) - (Sy)(t) - bc\int_0^t e^{-a(t-s)}y(s)ds = g_1(t) =$$

$$= g(t) - ce^{-at}x(0) - c\int_0^t e^{-a(t-s)}f(s)ds.$$

Обозначим $(Ky)(t) = bc\int_0^t e^{-a(t-s)}y(s)ds$. Предположим, что $a > 0$. Найдем оценку нормы $\|(I-S)^{-1}K\|_{L_\infty \to L_\infty}$:

$$\|(I-S)^{-1}K\|_{L_\infty \to L_\infty} \le \|(I-S)^{-1}\|_{L_\infty \to L_\infty} \cdot \|K\|_{L_\infty \to L_\infty} \le$$

$$\le \frac{1}{1-|d|} \cdot \frac{|bc|}{a}.$$

Получаем, что норма оператора $\|(I-S)^{-1}K\|_{L_\infty \to L_\infty}$ меньше 1, когда $|bc| < a(1-|d|)$.

Итак, для любого $g_1 \in L_\infty$ решение y уравнения $\mathrm{L}y = g_1$ принадлежит пространству L_∞.

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (2) при любом $\{f, g\} \in L_\infty \times L_\infty$ ее решения $\{x, y\} \in W_\infty \times L_\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.** Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728–740.
2. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 230 с.
3. **Курбатов В.Г.** Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. 168 с.
4. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием II // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 555–562.
5. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием IV // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 196–204.
6. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6 (421). С. 3–16.
7. **Курбатов В.Г.** О спектре оператора суперпозиции. Воронеж. 1979. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 05.12.79, № 4317-79.

Ларионов Александр Степанович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики Братского государственного университета

665709, Иркутская область, г. Братск, ул. Макаренко, д. 40.

тел.: +7(3953)32-53-84, e-mail: larios84@yandex.ru

УДК 517.925.51

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Малышев, П.С. Атаманов
Казанский государственный технологический университет
Чувашский государственный университет

SYSTEM OF LINEAR DIFFERETIAL EQUATIONS

Yu.V. Malyshev, P.S. Atamanov

Предложены методы сведения систем дифференциальных уравнений третьего порядка к линейным дифференциальным уравнениям третьего порядка. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, факторизованный оператор, однородное и неоднородное уравнения, операторный метод.

It is proposed methods of reducing a systems of differential equations of the third order to linear differential equations of the third order. The examples are considered.

Keywords: linear differential equation, factorized operator, homogeneous and non-homogeneous equations, symbolic method.

Получены линейные уравнения третьего порядка относительно любой неизвестной функции однородной и неоднородной системы третьего порядка обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

1. Однородные системы

Система

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + a_{13}(t)x_3(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + a_{23}(t)x_3(t), \\ x_3'(t) = a_{31}(t)x_1(t) + a_{32}(t)x_2(t) + a_{33}(t)x_3(t) \end{cases}$$

с непрерывными и дифференцируемыми функциями $a_{ij}(t)$ в некоторой области с помощью оператора $D = d/dt$ приводится к виду [1]:

$$\begin{cases} (D - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 = 0, \\ -a_{21}x_1 + (D - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 = 0, \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (D - a_{33})x_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

А) Пусть $a_{12} \neq 0$ в рассматриваемой области. Исключая неизвестную функцию x_2 из системы (1), будем иметь

$$\begin{cases} \left[(D - a_{22})(D - a_{11})/a_{12} - a_{21}\right]x_1 - \\ \qquad -\left[(D - a_{22})a_{13}/a_{12} + a_{23}\right]x_3 = 0, \\ -\left[a_{32}(D - a_{11})/a_{12} + a_{31}\right]x_1 + \\ \qquad +\left[(D - a_{33}) + a_{13}a_{32}/a_{12}\right]x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Сложением равенств системы (2) получим уравнение, в котором присутствуют все коэффициенты системы (1):

$$\left[\frac{(D - a_{22})(D - a_{11})}{a_{12}} - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D - a_{11}) - a_{21} - a_{31}\right]x_1 + \\ + \left[(D - a_{33}) - (D - a_{22})\frac{a_{13}}{a_{12}} + \frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}} - a_{23}\right]x_3 = 0. \quad (3)$$

1. Пусть $a_{12} = a_{13} \neq 0$. Тогда (3) примет следующий вид:

$$\left[\frac{(D - a_{22})(D - a_{11})}{a_{12}} - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D - a_{11}) - a_{21} - a_{31}\right]x_1 + \\ + (a_{32} - a_{33} + a_{22} - a_{23})x_3 = 0. \quad (4)$$

Если выражение функции x_3 из (4) подставить в первое уравнение системы (2), то получим дифференциальное уравнение третьего порядка относительно неизвестной функции x_1:

$$\left[(D - a_{22})(D - a_{11})/a_{12} - a_{21}\right]x_1 - \\ - \frac{(D - a_{22}) + a_{23}}{a_{33} - a_{32} + a_{23} - a_{22}}\left[\frac{(D - a_{22})(D - a_{11})}{a_{12}} - \right. \\ \left. - a_{32}(D - a_{11})/a_{12} - a_{21} - a_{31}\right]x_1 = 0, \quad (5)$$

($a_{33} - a_{32} + a_{23} - a_{22} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} \neq 0$).

Уравнение (5) решается операторным методом [2].

2. Пусть $a_{13} = 0$. Тогда система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \left[(D - a_{22})(D - a_{11})/a_{12} - a_{21}\right]x_1 - a_{23}x_3 = 0, \\ -\left[a_{32}(D - a_{11})/a_{12} + a_{31}\right]x_1 + (D - a_{33})x_3 = 0. \end{cases}$$

Исключая из нее x_3, получим уравнение относительно x_1:

$$\frac{(D-a_{33})}{a_{23}}\left[\frac{(D-a_{22})(D-a_{11})}{a_{12}}-a_{21}\right]x_1- \\ -\left[a_{32}(D-a_{11})/a_{12}+a_{31}\right]x_1=0 \quad (6)$$

($a_{12}\neq 0$, $a_{23}\neq 0$, $a_{13}=0$).

3. Пусть $a_{32}=0$. Составив для этого случая систему (2), исключив из нее функцию x_1, получим уравнение третьего порядка относительно неизвестной функции x_3:

$$\left[\frac{(D-a_{22})(D-a_{11})}{a_{12}}-a_{21}\right]\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})x_3- \\ -\left[(D-a_{22})a_{13}/a_{12}+a_{23}\right]x_3=0 \quad (7)$$

($a_{12}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$, $a_{32}=0$).

B) Пусть $a_{13}\neq 0$. Исключая x_3 из системы (1), получим

$$\begin{cases}\left[(D-a_{33})(D-a_{11})/a_{13}-a_{31}\right]x_1- \\ \quad -\left[(D-a_{33})a_{12}/a_{13}+a_{32}\right]x_2=0, \\ -\left[a_{23}(D-a_{11})/a_{13}+a_{21}\right]x_1+ \\ \quad +\left[a_{12}a_{23}/a_{13}+(D-a_{22})\right]x_2=0.\end{cases} \quad (8)$$

Сложением равенств системы (8) получим уравнение

$$\left[(D-a_{33})(D-a_{11})/a_{13}- \\ -\grave{a}_{23}(D-a_{11})/a_{13}-a_{21}-a_{31}\right]x_1+ \\ +\left[a_{12}a_{23}/a_{13}+(D-a_{22})- \\ -(D-a_{33})a_{12}/a_{13}-a_{32}\right]x_2=0. \quad (9)$$

Рассуждая как в п. A), получим еще три уравнения третьего порядка относительно неизвестных функций.

4. Пусть $a_{12}=a_{13}\neq 0$. Получаем уравнение относительно функции x_1:

$$\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-a_{31}\right]x_1- \\ -\frac{(D-a_{33})+a_{32}}{a_{22}-a_{23}-a_{33}+a_{32}}\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}- \right. \\ \left. -\frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})-a_{31}-a_{21}\right]x_1=0 \quad (10)$$

($a_{22}-a_{23}-a_{33}+a_{32}\neq 0$, $a_{12}=a_{13}\neq 0$).

5. Пусть $a_{12}=0$. Получаем уравнение относительно x_1:

$$\left[\grave{a}_{23}(D-a_{11})/a_{13}+a_{21}\right]x_1- \\ -\frac{(D-a_{22})}{a_{32}}\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-a_{31}\right]x_1=0 \quad (11)$$

($a_{13}\neq 0$, $a_{32}\neq 0$, $a_{12}=0$).

6. Пусть $a_{23}=0$. В этом случае получается уравнение относительно функции x_2:

$$\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-a_{31}\right]\frac{(D-a_{22})}{a_{21}}x_2- \\ -\left[(D-a_{33})\grave{a}_{12}/a_{13}+a_{32}\right]x_2=0 \quad (12)$$

($a_{13}\neq 0$, $a_{21}\neq 0$, $a_{23}=0$).

C) Пусть $a_{31}\neq 0$. Исключая функцию x_1 из системы, получим

$$\begin{cases}-\left[(D-a_{11})\grave{a}_{32}/a_{31}+a_{12}\right]x_2+ \\ \quad +\left[(D-a_{11})(D-a_{33})/a_{31}-a_{13}\right]x_3=0, \\ \left[(D-a_{22})+a_{21}a_{32}/a_{31}\right]x_2- \\ \quad -\left[\grave{a}_{21}(D-a_{33})/a_{31}+a_{23}\right]x_3=0.\end{cases} \quad (13)$$

Из системы (13) следует

$$\left[(D-a_{11})\frac{a_{32}}{a_{31}}+(D-a_{22})+\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}+a_{12}\right]x_2- \\ -\left[(D-a_{11})(D-a_{33})/\grave{a}_{31}+ \right. \\ \left. +\grave{a}_{21}(D-a_{33})/\grave{a}_{31}-a_{13}+a_{23}\right]x_3=0. \quad (14)$$

7. Пусть $a_{31}=-a_{32}\neq 0$. Получаем уравнение относительно неизвестной функции x_3:

$$\frac{[-(D-a_{11})+a_{12}]}{a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}}\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}+ \right. \\ \left. +a_{21}(D-a_{33})/a_{31}-a_{13}+a_{23}\right]x_3- \\ -\left[(D-a_{11})(D-a_{33})/a_{31}-a_{13}\right]x_3=0 \quad (15)$$

($a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}\neq 0$, $a_{31}=-a_{32}\neq 0$).

8. Пусть $a_{32}=0$. Тогда уравнение относительно функции x_3 имеет следующий вид:

$$\frac{(D-a_{22})}{a_{12}}\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}-a_{13}\right]x_3- \\ -\left[a_{21}(D-a_{33})/a_{31}+a_{23}\right]x_3=0 \quad (16)$$

($a_{12}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$, $a_{32}=0$).

9. Пусть $a_{21}=0$. Для этого случая получим уравнение относительно функции x_2:

$$\left[(D-a_{11})a_{32}/a_{31}+a_{12}\right]x_2- \\ -\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}-a_{13}\right]\frac{(D-a_{22})}{a_{23}}x_2=0 \quad (17)$$

($a_{23}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$, $a_{21}=0$).

Пример 1. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases}x_1'=x_2/t-x_3/t, \\ x_2'=-2x_2/t+2x_3/t, \\ x_3'=-3x_1/t.\end{cases}$$

Решение. Система удовлетворяет ограничениям уравнения (17):

$$x_2/t-\left[D(-t/3)D+1/t\left(D+\frac{2}{t}\right)2/tx_2t/2=0\right.,$$

$x_2'''+5x_2''/t=0$ или $\left(D^3+5D^2/t\right)x_2=0$. После фак-

торизации [3] $(D+1/t)(D+4/t)Dx_2=0$ или $DDt^4Dx_2/t^3=0$; $x_2=C_1t+C_2/t^3+C_3$. Функцию x_3 определяем из второго уравнения системы: $x_3=(x_2'+2x_2/t)t/2$ или $x_3=3C_1t/2-C_2/(2t^3)+$ $+C_3$. С помощью первого уравнения вычисляем $x_1=-C_1t/2-C_2/(2t^3)$.

Ответ. Функции $x_1=-C_1t/2-C_2/(2t^3)$, $x_2=C_1t+C_2/t^3+C_3$, $x_3=3C_1t/2-C_2/(2t^3)+C_3$ составляют общее решение системы.

2. Общий случай для однородной системы

Преобразуем систему уравнений (8) при $a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$:

$$\begin{cases}\left[\dfrac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-a_{31}\right]x_1-\dfrac{a_{12}}{a_{13}}\Big[D+\\ \quad+\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{13}}\right)'-a_{33}+\dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}\Big]x_2=0,\\ -\left[a_{23}(D-a_{11})/a_{13}+a_{21}\right]x_1+\left[D-\\ \quad-(a_{22}-a_{12}a_{23}/a_{13})\right]x_2=0.\end{cases}\tag{18}$$

Если $a=-\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{13}}\right)'+a_{33}-\dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}$, $b=a_{22}-$ $-\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$, то система (18) примет следующий вид:

$$\begin{cases}\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left[\dfrac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-a_{31}\right]x_1-\\ \qquad-(D-a)x_2=0,\\ -\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1+(D-b)x_2=0.\end{cases}\tag{19}$$

Замечания:

1) $(D-a)x_2=e^uDe^{-u}x_2$, $u=\int a\,dt$; если $e^{-u}x_2=z(t)$, то $(D-a)x_2=e^uDz$;

2) $(D-b)x_2=(D-b)e^ue^{-u}x_2=e^u(D-b+$ $+u')e^{-u}x_2=e^u(D-c)z$, $c=b-u'$.

С учетом замечаний и умножения обоих уравнений системы (19) на e^{-u} получим систему относительно функций $x_1(t)$ и $z(t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}\left[\dfrac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-a_{31}\right]x_1-Dz=0,\\ -e^{-u}\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1+(D-c)z=0.\end{cases}\tag{20}$$

Применив к первому уравнению системы оператор $D-c-c'/D$, ко второму — оператор D и сложив оба уравнения, получим интегро-дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции x_1:

$$\left(D-c-\frac{c'}{D}\right)\frac{a_{13}}{a_{12}}e^{-u}\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-\right.$$
$$\left.-a_{31}\right]x_1-De^{-u}\left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1=0,\tag{21}$$

в нем $c=b-a$, $b=a_{22}-\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$, $a=\dfrac{a_{13}'}{a_{13}}-\dfrac{a_{12}'}{a_{12}}+$ $+a_{33}-\dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}$, $u=\int a\,dt$, $a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$.

После преобразований уравнение (21) будет линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами.

3. О факторизации оператора линейного уравнения четвертого порядка.

Пусть уравнение приведено к виду

$$x^{(IV)}(t)+a_1(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+$$
$$+a_3(t)x'(t)+a_4(t)x(t)=f(t).\tag{22}$$

Через оператор $D=d/dt$ оно представляется как равенство

$$[D^4+a_1(t)D^3+a_2(t)D^2+$$
$$+a_3(t)D+a_4(t)]x(t)=f(t).\tag{23}$$

Пусть линейному оператору уравнения (23) соответствует некоторый факторизованный оператор, то есть

$$D^4+a_1(t)D^3+a_2(t)D^2+a_3(t)D+a_4(t)=$$
$$=[D-u'(t)][D-v'(t)][D-w'(t)][D-\gamma'(t)],$$

функции $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$, $\gamma(t)$ — непрерывные и дифференцируемые в некоторой области до четвертого порядка. Тогда, опуская аргумент функций, уравнение (23) представим в виде

$$(D-u')(D-v')(D-w')(D-\gamma')x=f.\tag{24}$$

Задача состоит в нахождении u', v', w', γ' через коэффициенты уравнения (22).

Раскрываем операторы в левой части уравнения (24), собираем слагаемые, содержащие x, x', x'', x''', $x^{(IV)}$. Приравнивая левые части уравнений (22) и (24), приходим к системе уравнений, которой удовлетворяют элементы u', v', w', γ' факторизованного оператора

$$\begin{cases}\gamma'+s_1=-a_1,\\ -3\gamma''+s_1\gamma'+s_2=a_2,\\ -3\gamma'''+2s_1\gamma''-s_2\gamma'+s_3=a_3,\\ -\gamma^{(IV)}+s_1\gamma'''-s_2\gamma''-s_3\gamma'=a_4;\end{cases}\tag{25}$$

в ней $s_1=u'+v'+w'$, $s_2=u'v'+u'w'+v'w'-v''-$ $-2w''$, $s_3=u'w''+v'w''+w'v''-u'v'w'-w'''$.

Пример 2. Операторным методом найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1' = -x_2/t + x_3/t, \\ x_2' = x_1/t - 3x_2/t + 2x_3/t, \\ x_3' = -x_1/t + x_2/t. \end{cases}$$

Решение. Для применения формулы (21), вычисляем $a = 1/t$, $b = -1/t$, $c = -2/t$, $u = \ln t$. Получаем уравнения

$$\left(D + \frac{2}{t} - \frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{D}\right)\frac{1}{t}\left(DtD + \frac{1}{t}\right)x_1 + D\frac{1}{t}\left(2D + \frac{1}{t}\right)x_1 = 0,$$

$$x_1''' + \frac{5x_1''}{t} + \frac{x_1'}{t^2} - \frac{2x_1}{t^3} - \frac{2}{t^2}\int\left(\frac{1}{t}x_1' + x_1'' + \frac{x_1}{t^2}\right)dt = 0.$$

Умножая последнее равенство на t^2, применяя к полученному результату оператор D, приходим к уравнению четвертого порядка

$$x_1^{(IV)} + 7x_1'''/t + 4x_1''/t^2 - 4x_1'/t^3 = 0.$$

Пусть линейный оператор уравнения факторизуется:

$$D^4 + (7/t)D^3/t + (4/t^2)D^2 - (4/t^3)D = \\ = (D-u')(D-v')(D-w')(D-\gamma').$$

По системе (25) находим, что $u' = -1/t$, $v' = -2/t$, $w' = -4/t$, $\gamma' = 0$. Решаем операторное уравнение

$$(D + 1/t)(D + 2/t)(D + 4/t)Dx_1 = 0.$$

Функция $x_1 = C_1t^2 + C_2\ln t + \tilde{N}_3/t^3 + C_4$ является его общим решением. Функции x_2 и x_3 соответственно будут иметь вид

$$x_2 = C_5t^2 + C_6\ln t + C_7/t^3 + C_8,$$

$$x_3 = C_9t^2 + C_{10}\ln t + C_{11}/t^3 + C_{12}.$$

Подстановкой функций x_1, x_2, x_3 в систему уравнений находим связи между C_i, $i = \overline{1,12}$: $C_1 = C_5 = C_9 = 0$, $C_2 = C_6 = C_{10}$, $C_7 = 2{,}5C_3$, $C_8 = C_2 + C_4$, $C_{11} = -0{,}5C_3$, $C_{12} = 2C_2 + C_4$.

Тогда система функций

$$x_1 = C_2\ln t + C_3/t^3 + C_4,$$

$$x_2 = C_2\ln t + 2{,}5C_3/t^3 + C_2 + C_4,$$

$$x_3 = C_2\ln t + 0{,}5C_3/t^3 + 2C_2 + C_4$$

является общим решением системы уравнений. Если полагать $C_2 = \overline{C}_1$, $C_3 = \overline{C}_2$, $C_4 = \overline{C}_3$, то ответ будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = \overline{C}_1\ln t + \overline{N}_2/t^3 + \overline{C}_3, \\ x_2 = \overline{C}_1\ln t + 2{,}5\overline{N}_2/t^3 + \overline{C}_1 + \overline{C}_3, \\ x_3 = \overline{C}_1\ln t + 0{,}5\overline{N}_2/t^3 + 2\overline{C}_1 + \overline{C}_3. \end{cases}$$

4. Неоднородные системы. Система

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + a_{13}(t)x_3(t) + f_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + a_{23}(t)x_3(t) + f_2(t), \\ x_3'(t) = a_{31}(t)x_1(t) + a_{32}(t)x_2(t) + a_{33}(t)x_3(t) + f_3(t) \end{cases}$$

с непрерывными и дифференцируемыми функциями $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ в некоторой области с помощью оператора $D = d/dt$ приводится к виду

$$\begin{cases} (D - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 = f_1, \\ -a_{21}x_1 + (D - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 = f_2, \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (D - a_{33})x_3 = f_3. \end{cases} \quad (26)$$

А) Полагая, $a_{12} \neq 0$, исключим x_2 из системы

$$\begin{cases} \left[\dfrac{(D-a_{22})(D-a_{11})}{a_{12}} - a_{21}\right]x_1 - \\ -\left[(D-a_{22})\dfrac{a_{13}}{a_{12}} + a_{23}\right]x_3 = \dfrac{(D-a_{22})f_1}{a_{12}} + f_2, \\ -\left[\dfrac{a_{32}}{a_{12}}(D-a_{11}) + a_{31}\right]x_1 + \\ \left[(D-a_{33}) + \dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}\right]x_3 = -\dfrac{a_{32}}{a_{12}}f_1 + f_3. \end{cases} \quad (27)$$

Сложением равенств системы (27) получим

$$\left[\frac{(D-a_{22})(D-a_{11})}{a_{12}} - a_{21} - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D-a_{11}) - \right. \\ \left. - a_{31}\right]x_1 + \left[\frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}} + (D-a_{33}) - (D-a_{22})\frac{a_{13}}{a_{12}} - \right. \quad (28) \\ \left. - a_{23}\right]x_3 = (D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} + f_2 - \frac{a_{32}}{a_{12}}f_1 + f_3.$$

5. Частные случаи. 1. Пусть $a_{12} = a_{13} \neq 0$. Тогда равенство (28) примет следующий вид:

$$\left[\frac{(D-a_{22})(D-a_{11})}{a_{12}} - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D-a_{11}) - \right. \\ \left. - a_{21} - a_{31}\right]x_1 + (a_{32} - a_{33} + a_{22} - a_{23})x_3 = \quad (29) \\ = (D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} + f_2 - \frac{a_{32}}{a_{12}}f_1 + f_3.$$

С помощью системы (27) и равенства (29) получаем линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции x_1:

$$\left[\frac{(D-a_{22})(D-a_{11})}{a_{12}} - a_{21}\right]x_1 - \\ - \frac{[(D-a_{22}) + a_{23}]}{a_{33} - a_{32} + a_{23} - a_{22}} \times \\ \times\left\{\left[\frac{(D-a_{22})(D-a_{11})}{a_{12}} - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D-a_{11}) - \right.\right. \quad (30) \\ \left. - a_{21} - a_{31}\right]x_1 - (D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} + \frac{a_{32}}{a_{12}}f_1 - \\ \left. - f_2 - f_3\right\} = (D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} + f_2.$$

($a_{33} - a_{32} + a_{23} - a_{22} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} \neq 0$).

Если уравнение (30) факторизуется, то его можно решать операторным методом.

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1' = tx_2 + tx_3, \\ x_2' = tx_1 - tx_3 - t^3, \\ x_3' = -2tx_1 - tx_2 + tx_3 + t^3. \end{cases}$$

Решение. По формуле (30) получаем уравнение $x_1''' - (t + 3/t)x_1'' + (1 + 3/t^2)x_1' = t^5$. С факторизованным оператором оно имеет вид

$$[D - (t + 2/t)](D - 1/t)Dx_1 = t^5.$$

Функция $x_1 = -t^6/24 - t^4/4 + C_1 e^{t^2/2} + C_2 t^2 + C_3$ является его общим решением.

Сложением первого и третьего уравнений системы и после подстановки x_1 в полученное равенство построим линейное уравнение относительно неизвестной функции x_3: $x_3' - 2tx_3 = \varphi(t)$,

$$\varphi(t) = \frac{t^7}{12} + \frac{3t^5}{4} + 2t^3 - 3C_1 t e^{\frac{t^2}{2}} - 2(C_2 + C_3)t - 2C_2 t^3.$$

Последнее решается операторным методом:

$$(D - 2t)x_3 = \varphi(t),\ e^{t^2} D e^{-t^2} x_3 = \varphi(t),$$

$$x_3 = e^{t^2} \int e^{-t^2} \varphi(t)\, dt,$$

$$x_3 = -t^6/24 - t^4/2 - 2t^2 - 2 + 3C_1 e^{t^2/2} + C_2 t^2 + 2C_2 + C_3.$$

Из первого уравнения системы определяется x_2:

$$x_2 = t^6/24 + t^4/4 + t^2 + 2 - 2C_1 e^{t^2/2} - C_2 t^2 - C_3.$$

Ответ. Функции

$$x_1 = -t^6/24 - t^4/4 + C_1 e^{t^2/2} + C_2 t^2 + C_3,$$

$$x_2 = t^6/24 + t^4/4 + t^2 + 2 - 2C_1 e^{t^2/2} - C_2 t^2 - C_3,$$

$$x_3 = -\frac{t^6}{24} - \frac{t^4}{2} - 2t^2 - 2 + 3C_1 e^{\frac{t^2}{2}} + C_2 t^2 + 2C_2 + C_3$$

составляют общее решение системы.

2. Пусть $a_{13} = 0$. Из системы (27) следует уравнение третьего порядка относительно функции x_1:

$$\frac{(D - a_{33})}{a_{23}} \left\{ \left[\frac{(D - a_{22})(D - a_{11})}{a_{12}} - a_{21} \right] x_1 - (D - a_{22}) \frac{f_1}{a_{12}} - f_2 \right\} - \left[\frac{a_{32}}{a_{12}} (D - a_{11}) + a_{31} \right] x_1 = \quad (31)$$

$$= f_3 - \frac{a_{32}}{a_{12}} f_1, (a_{12} \neq 0, a_{23} \neq 0, a_{13} = 0).$$

3. Пусть $a_{32} = 0$. По системе (27) получаем уравнение относительно неизвестной функции x_3:

$$\left[\frac{(D - a_{22})(D - a_{11})}{a_{12}} - a_{21} \right] \frac{(D - a_{33})x_3 - f_3}{a_{31}} - \left[(D - a_{22}) \frac{a_{13}}{a_{12}} + a_{23} \right] x_3 = (D - a_{22}) \frac{f_1}{a_{12}} + f_2 \quad (32)$$

$$(a_{12} \neq 0, a_{31} \neq 0, a_{32} = 0).$$

В) Исключая x_3 из системы при $a_{13} \neq 0$, получим равенства:

$$\begin{cases} \left[\frac{(D - a_{33})(D - a_{11})}{a_{13}} - a_{31} \right] x_1 - \left[(D - a_{33}) \frac{a_{12}}{a_{13}} + a_{32} \right] x_2 = (D - a_{33}) \frac{f_1}{a_{13}} + f_3, \\ -\left[\frac{a_{23}}{a_{13}} (D - a_{11}) + a_{21} \right] x_1 + \left[\frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} + (D - a_{22}) \right] x_2 = f_2 - \frac{a_{23}}{a_{13}} f_1. \end{cases} \quad (33)$$

Сложение равенств (33) приведет к соотношению, в котором присутствуют все коэффициенты системы (26) и функции правых частей:

$$\left[\frac{(D - a_{33})(D - a_{11})}{a_{13}} - a_{31} - \frac{a_{23}}{a_{13}} (D - a_{11}) - a_{21} \right] x_1 + \left[\frac{a_{12} a_{23}}{a_{13}} + (D - a_{22}) - (D - a_{33}) \frac{a_{12}}{a_{13}} - a_{32} \right] x_2 = (D - a_{33}) \frac{f_1}{a_{13}} + f_3 - \frac{a_{23}}{a_{13}} f_1 + f_2. \quad (34)$$

4. Пусть $a_{12} = a_{13} \neq 0$. Тогда из уравнения (34) и системы (33) получим уравнение третьего порядка относительно функции x_1:

$$\left[\frac{(D - a_{33})(D - a_{11})}{a_{13}} - a_{31} \right] x_1 - \frac{(D - a_{33}) + a_{32}}{a_{22} - a_{23} - a_{33} + a_{32}} \left\{ \left[\frac{(D - a_{33})(D - a_{11})}{a_{13}} - a_{31} - \frac{a_{23}}{a_{13}} (D - a_{11}) - a_{21} \right] x_1 - (D - a_{33}) \frac{f_1}{a_{13}} - f_3 + \frac{a_{23}}{a_{13}} f_1 - f_2 \right\} = (D - a_{33}) \frac{f_1}{a_{13}} + f_3 \quad (35)$$

($a_{22} - a_{23} - a_{33} + a_{32} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} \neq 0$).

5. Пусть $a_{12} = 0$. Из системы (33) следует линейное уравнение третьего порядка относительно неизвестной функции x_1:

$$[a_{23}'(D - a_{11})/a_{13} + a_{21}] x_1 - (D - a_{22}) \{ [(D - a_{33})(D - a_{11})/a_{13} - a_{31}] x_1 - (D - a_{33}) f_1/a_{13} - f_3 \} / a_{32}' = a_{23}' f_1/a_{13} - f_2 \quad (36)$$

$$(a_{13} \neq 0, a_{32} \neq 0, a_{12} = 0).$$

6. Пусть $a_{23}=0$. Тогда из системы (33) получим уравнение относительно функции x_2:

$$\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-a_{31}\right]\frac{[(D-a_{22})x_2-f_2]}{a_{21}} -\left[(D-a_{33})\frac{a_{12}}{a_{13}}+a_{32}\right]x_2=(D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}}+f_3 \quad (37)$$

$(a_{13}\neq 0, a_{21}\neq 0, a_{23}=0)$.

C) Исключая x_1 из системы при $a_{31}\neq 0$, получим равенства

$$\begin{cases} -\left[(D-a_{11})\grave{a}_{32}/\grave{a}_{31}+a_{12}\right]x_2+ \\ \quad +\left[(D-a_{11})(D-a_{33})/\grave{a}_{31}-a_{13}\right]x_3= \\ \qquad =(D-a_{11})f_3/a_{31}+f_1, \\ \left[a_{21}a_{32}/a_{31}+(D-a_{22})\right]x_2- \\ \quad -\left[a_{21}(D-a_{33})/a_{31}+a_{23}\right]x_3= \\ \qquad =f_2-a_{21}f_3/a_{31}. \end{cases} \quad (38)$$

После сложения равенств (38) получим

$$\left[\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}+(D-a_{22})-(D-a_{11})\frac{a_{32}}{a_{31}}-a_{12}\right]x_2+ +\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}-a_{13}-\frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})- -a_{23}\right]x_3=(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}+f_1+f_2-\frac{a_{21}}{a_{31}}f_3. \quad (39)$$

7. Пусть $a_{31}=a_{32}\neq 0$. С помощью равенств (38) и (39) получим линейное уравнение третьего порядка относительно функции x_3:

$$-\frac{[(D-a_{11})+a_{12}]}{a_{21}-a_{22}+a_{11}-a_{12}}\left\{-\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}- -\frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})-a_{13}-a_{23}\right]x_3+(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}- -\frac{a_{21}}{a_{31}}f_3+f_1+f_2\right\}+\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}- -a_{13}\right]x_3=(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}+f_1 \quad (40)$$

($a_{21}-a_{22}+a_{11}-a_{12}\neq 0$, $a_{31}=a_{32}\neq 0$).

8. Пусть $a_{32}=0$. Из системы (38) следует уравнение относительно неизвестной функции x_3:

$$\frac{(D-a_{22})}{a_{12}}\left\{\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}-a_{13}\right]x_3- -(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}-f_1\right\}-\left[\frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})+a_{23}\right]x_3= =f_2-\frac{a_{21}}{a_{31}}f_3 \quad (41)$$

$(a_{12}\neq 0, a_{31}\neq 0, a_{32}=0)$.

9. Пусть $a_{21}=0$. Из системы (38) следует уравнение относительно неизвестной функции x_2:

$$-\left[(D-a_{11})\frac{a_{32}}{a_{31}}+a_{12}\right]x_2+\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}- -a_{13}\right]\frac{1}{a_{23}}[(D-a_{22})x_2-f_2]=(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}+f_1 \quad (42)$$

$(a_{23}\neq 0, a_{31}\neq 0, a_{21}=0)$.

Пример 4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1'=x_2/t-x_3/t+t^2, \\ x_2'=-2x_2/t+2x_3/t, \\ x_3'=-3x_1/t-t^2. \end{cases}$$

Решение. В системе $a_{23}=2/t$, $a_{31}=-3/t$, $a_{21}=0$. Составим уравнение по формуле (42) для вычисления функции x_2:

$$-x_2/t+\left[D(-t/3)D+1/t\right](t/2)(D+2/t)x_2=Dt^3/3+t^2.$$

После применения операторов получим уравнение $x_2'''+(5/t)x_2''=-12$, или $\left(D^3+(5/t)D^2\right)x_2= =-12$, $(D+1/t)(D+4/t)Dx_2=-12$, или $t^{-1}Dt^{-3}Dt^4Dx_2=-12$.

Функция $x_2=-t^3/3+C_1t+C_2/t^3+C_3$ является общим решением уравнения. По второму уравнению системы находим

$$x_3=-(5/6)t^3+(3/2)C_1t-C_2/(2t^3)+C_3.$$

По первому уравнению системы получим

$$x_1=t^3/2-C_1t/2-C_2/(2t^3).$$

Ответ. Функции

$$\begin{cases} x_1=t^3/2-C_1t/2-C_2/(2t^3), \\ x_2=-t^3/3+C_1t+C_2/t^3+C_3, \\ x_3=-(5/6)t^3+(3/2)C_1t-C_2/(2t^3)+C_3 \end{cases}$$

являются общим решением системы.

6. Общий случай для неоднородной системы

Пусть коэффициенты системы (26) не удовлетворяют условиям ни одного из рассмотренных девяти случаев. Получим дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций системы (26) в общем случае.

Систему (33) приведем к следующему виду при $a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{a_{13}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D-a_{11})-a_{31}\right]x_1- \\ \quad -(D-a)x_2=\frac{a_{13}}{a_{12}}(D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}}+\frac{a_{13}}{a_{12}}f_3, \\ -\left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1+(D-b)x_2= \\ \quad =f_2-\grave{a}_{23}f_1/\grave{a}_{13}, \end{cases} \quad (43)$$

где

$$a=-\frac{a_{13}}{a_{12}}\left(\frac{a_{12}}{a_{13}}\right)'+a_{33}-\frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}},\quad b=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}.$$

Рассуждая как в п. 2, получим интегро-дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции x_1:

$$\left\{\left(D-c-c'\cdot\frac{1}{D}\right)\frac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{11})}{a_{13}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-a_{31}\right]-De^{-u}\left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]\right\}x_1= \quad (44$$
$$=\left(D-c-c'\cdot\frac{1}{D}\right)\frac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}}+f_3\right]+$$
$$+De^{-u}\left(f_2-a_{23}f_1/a_{13}\right)$$
$$)$$

($a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$, $c=b-a$, $u=\int a\,dt$).

Уравнение (44) преобразуется в линейное неоднородное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции x_1.

Аналогично получим уравнение относительно функции x_2:

$$\left\{\left(D-c-c'\cdot\frac{1}{D}\right)\frac{a_{23}e^{-u}}{a_{21}}\left[\frac{(D-a_{33})(D-a_{22})}{a_{23}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-a_{32}\right]-De^{-u}\left[a_{13}(D-a_{22})/a_{23}+a_{12}\right]\right\}x_2= \quad (45)$$
$$=\left(D-c-c'/D\right)a_{23}e^{-u}/a_{21}\left[(D-a_{33})f_2/a_{23}\right.$$
$$\left.+f_3\right]+De^{-u}\left(f_1-a_{13}f_2/a_{23}\right),$$

($a_{21}\neq 0$, $a_{23}\neq 0$, $c=a_{11}-\frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}}+\frac{a'_{21}}{a_{21}}-\frac{a'_{23}}{a_{23}}+$
$+\frac{a_{23}a_{31}}{a_{21}}-a_{33}$, $u=\int\left(\frac{a'_{23}}{a_{23}}-\frac{a'_{21}}{a_{21}}+a_{33}-\frac{a_{23}a_{31}}{a_{21}}\right)dt$).

Приведем уравнение относительно неизвестной функции x_3:

$$\left\{\left(D-c-c'\cdot\frac{1}{D}\right)\frac{a_{31}e^{-u}}{a_{32}}\left[\frac{(D-a_{11})(D-a_{33})}{a_{31}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-a_{13}\right]-De^{-u}\left[a_{21}(D-a_{33})/a_{31}+a_{23}\right]\right\}x_3= \quad (46)$$
$$=\left(D-c-c'\cdot\frac{1}{D}\right)\frac{a_{31}e^{-u}}{a_{32}}\left[(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}+f_1\right]+$$
$$+De^{-u}\left(f_2-a_{21}f_3/a_{31}\right)$$

($a_{31}\neq 0$, $a_{32}\neq 0$, $c=a_{22}-\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}+\frac{a'_{32}}{a_{32}}-\frac{a'_{31}}{a_{31}}+$
$+\frac{a_{12}a_{31}}{a_{32}}-a_{11}$, $u=\int\left(\frac{a'_{31}}{a_{31}}-\frac{a'_{32}}{a_{32}}+a_{11}-\frac{a_{12}a_{31}}{a_{32}}\right)dt$).

Пример 5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}x'_1=-x_2/t+x_3/t+t,\\ x'_2=x_1/t-3x_2/t+4x_3/t-t,\\ x'_3=x_1/t+x_2/t.\end{cases}$$

Решение. В системе $a_{12}=-1/t$, $a_{13}=1/t$ применима формула (44). Вычисляем $c=0$, $u=\ln t$. Из формулы (44) получаем линейное уравнение $x'''_1+(5/t)x''_1-(5/t^2)x'_1=0$, которое факторизуется, и операторное уравнение принимает вид $(D+6/t)(D-1/t)Dx_1=0$. Функция $x_1=$ $=C_1/t^4+C_2t^2+C_3$ является его общим решением. Для вычисления функции x_2 составим уравнение (45), где $c=15/(4t)$, $u=-4\ln t$. Получим уравнение: $x_2^{(IV)}+(12/t)x'''_2+(30/t^2)x''_2=15/t^2$. Функция $x_2=t^2/4+C_5/t^3+C_6/t^4+C_7t+C_8$ – его общее решение. По формуле (46) составим уравнение для вычисления x_3, где $c=-5/t$, $u=\ln t$. Уравнение примет следующий вид: $x_3^{(IV)}+(7/t)x'''_3=0$. По системе (25) получаем операторное уравнение $(D+7/t)DDDx_3=0$. Функция $x_3=C_9/t^4+C_{10}t^2+C_{11}t+C_{12}$ является его общим решением. Подставив x_1, x_2, x_3 в систему, найдем связи между произвольными постоянными: $C_5=0$, $C_6=3C_1$, $C_8=-C_3$, $C_9=-C_1$, $C_{10}=5/12$, $C_{11}=C_7$, $C_{12}=-C_3$, $C_2=7/12$. Применив связи в функциях x_1, x_2, x_3, общее решение системы составим в следующем виде:

$$\begin{cases}x_1=7t^2/12+C_1/t^4+C_3,\\ x_2=t^2/4+3C_1/4+C_7t-C_3,\\ x_3=5t^2/12-C_1/t^4+C_7t-C_3.\end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малышев Ю.В., Атаманов П.С.** Факторизованные операторы и системы дифференциальных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2011. № 16. С. 54 – 61.
2. **Малышев Ю.В., Атаманов П.С.** О решении системы линейных дифференциальных уравнений операторным методом // Вестник Чувашского ун-та. 2011. № 3. С. 155–159.
3. **Малышев Ю.В., Атаманов П.С.** Интегрирование дифференциальных уравнений операторным методом // Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2011. 176 с.

Малышев Юрий Валентинович, д. ф.-м. н., профессор кафедры высшей математики Казанского государственного технологического университета
420015. г. Казань, ул. К. Маркса, д. 68, тел.: +7 (843) 272-67-98, e-mail: office@kstu.ru.

УДК 517.91

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

С.С. Мамонов, И.В. Ионова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE EXISTENCE OF CYCLES SECOND-TYPE PHASE-LOCKED LOOP

S.S. Mamonov, I.V. Ionova

Рассматривается математическая модель системы фазовой автоподстройки частоты с матрицей линейного приближения, имеющей собственные значения с мнимой частью. Получены условия существования предельных циклов второго рода. Для системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром нижних частот второго порядка предложен алгоритм определения области фазового пространства, содержащей предельный цикла второго рода.

Ключевые слова: предельный цикл второго рода, матричные уравнения, фазовая автоподстройка.

A mathematical model of a phase-locked loop with a matrix of linear approximation, which has its own value to the imaginary part. Conditions for the existence of limit cycles of the second type. For a system of phase-locked loop with a low pass filter second-order algorithm determining the phase space containing the limit cycle of the second type.

Keywords: limit cycle of the second type, the matrix equation, phase-locked

Введение. В работе рассматривается математическая модель системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП), которые нашли широкое применение для решения задач синхронизации, стабилизации частоты, управления частотой и фазой радиоколебаний, фильтрации, демодуляции, формирования и обработки сигналов, а также ряда других задач [1, 2]. Для систем ФАП рассматривается как важная для практики задача подавления паразитных автомодуляционных колебаний, так и альтернативная задача усиления эффектов автомодуляции в целях создания на этой основе эффективных генераторов сложномодулированных колебаний [3–7]. Базовая математическая модель системы ФАП приводится к системе дифференциальных уравнений [8]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x, \qquad (1)$$

где $x, b, c \in R^n$, $\varphi(\sigma) - \Delta$-периодическая, непрерывно дифференцируемая функция. Одним из видов автомодуляционных колебаний системы ФАП является угловая модуляция, определяемая решением системы (1) периодическим по фазовой переменной σ. Система (1) рассматривалась в работах [3–7], в которых методом нелокального сведения получены частотные условия существования циклов второго рода системы (1). В указанном методе используются частотные условия существования решения системы матричных неравенств при наличии линейной связи, обладающего определенными свойствами, а именно определение решения матричного уравнения Ляпунова, имеющего одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение. Для системы (1) с матрицей A, имеющей собственные значения с мнимой частью, возникает необходимость нахождения решения системы матричных уравнений, одно из которых является модифицированным уравнением Ляпунова, другое – уравнением линейной связи. С использованием метода нелокального сведения и полученных в работе [5] результатов нами предложен подход к исследованию системы (1), который позволяет сформулировать условия существования циклов второго рода и определить область фазового пространства, содержащую цикл.

Теоретические исследования. Условия, обеспечивающие автомодуляционные режимы системы ФАП, определяются результатами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) система матричных уравнений

$$A^T H + HA = L + 2\varepsilon c c^T - 2\alpha H, \; Hb = c \qquad (2)$$

при $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, $c^T b = -\Gamma < 0$ имеет решение $H = H^T$, $L < 0$, матрица H имеет одно отрица-

тельное и $(n-1)$ положительное собственное значение;

2) $c^T A = l^T$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $rang\|c,l\| = 2$, $l^T b = \nu > 0$;

3) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma),\ \dot{\sigma} = y \tag{3}$$

при $\mu = \mu_1 = (\Gamma\varepsilon + \alpha)\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma)$, $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

4) существует значение $\lambda > 0$, для которого справедливы неравенства $-\delta_\lambda = \lambda(\alpha_1 - \lambda) - \beta_1 < < 0$, $-\delta_\lambda \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) + (\nu - \lambda\Gamma)\varphi(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

5) система (3) при $\mu = \mu_2 < \lambda\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma)$, $0 < F_1(\sigma) < < F_2(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

6) справедливо неравенство $F_2(\sigma) - \alpha(\varepsilon\Gamma)^{-1} \times \times F_1(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

7) для вектора $q_\lambda \in R^n$, определяемого равенствами $c^T q_\lambda = 1$, $l^T q_\lambda = -\lambda$, выполняется соотношение $\Gamma F_2^2(\sigma) q_\lambda^T H q_\lambda < -F_1^2(\sigma)$ для любого $\sigma \in \in (-\infty;+\infty)$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(z) = = x^T Hx + F_1^2(\sigma)$, $W_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma)$, $l^T x + + \lambda c^T x = W_2(z)$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям 3)–7) теоремы. Пусть $\Omega_1 = \{z : V_1(z) \le 0, c^T x \ge 0\}$, $\Omega_2 = \{z : W_1(z) \le \le 0\}$, $\Omega_3 = \{z : W_2(z) \le 0\}$. Используя условие 1) теоремы и теорему Шура [4], найдем определитель матрицы $(H + \tau^{-1} cc^T)$:

$$\begin{aligned} \det(H + \tau^{-1} cc^T) &= \det H \det(E + \tau^{-1} H^{-1} cc^T) = \\ &= \det H \det(E + \tau^{-1} bc^T) = (1 + \tau^{-1} b^T c) \det H = \\ &= (1 - \tau^{-1}\Gamma) \det H. \end{aligned} \tag{4}$$

В силу соотношения (4) и того, что $cc^T \ge 0$, матрица H имеет одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение, получим:

$$H + \Gamma^{-1} cc^T \ge 0. \tag{5}$$

Если $z \in \Omega_1$, то из (5) следует соотношение

$$c^T x \ge \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma). \tag{6}$$

Пусть $\tau^{-1}\Gamma > 1$. Тогда $\det(H + \tau^{-1} cc^T) > 0$, матрица $(H + \tau^{-1} cc^T)$ является положительно определенной. Если $z \in \Omega_1 \bigcap \Omega_2$, $\tau = 2^{-1}\Gamma$, то существует $d > 0$, для которого выполняется неравенство

$$\begin{aligned} 0 < \tau^{-1}(c^T x)^2 + x^T Hx &\le \tau^{-1}\Gamma F_2^2(\sigma) - F_1^2(\sigma) = \\ &= 2F_2^2(\sigma) - F_1^2(\sigma) \le d \end{aligned} \tag{7}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $x^T(2\Gamma^{-1} cc^T + H)x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, из (7) следует, что множество $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ является ограниченным.

Пусть $\partial\overline{\Omega}_2 = \{z : W_1(\sigma) = 0\}$, $\partial\overline{\Omega}_3 = \{z : W_2(\sigma) = = 0\}$, $x_\lambda = \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) q_\lambda$, где q_λ удовлетворяет условию 7) теоремы. Тогда $x_\lambda \in \partial\overline{\Omega}_2 \bigcap \partial\overline{\Omega}_3$, $x_\lambda^T H x_\lambda = \Gamma F_2^2(\sigma) q_\lambda^T H q_\lambda < -F_1^2(\sigma)$, $x_\lambda \in \overline{\Omega}_1 = \{z : V_1(z) < 0, c^T x > 0\}$, множество $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcap \Omega_3$ содержит внутренние точки. Граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2 \bigcup \partial\Omega_3$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, c^T x > 0, W_1(z) \le 0, W_2(z) \le 0\},$$

$$\partial\Omega_2 = \{z : W_1(z) = 0,\ V_1(z) \le 0, W_2(z) \le 0\},$$

$$\partial\Omega_3 = \{z : W_2(z) = 0, c^T x > 0, V_1(z) \le 0, W_1(z) \le 0\}.$$

Используя условия 2), 5) теоремы, найдем производную функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2$:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(z) &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \sqrt{\Gamma}\,\frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} c^T x \le \\ &\le -\lambda c^T x - \Gamma F_2(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_2(\sigma)} + \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma}\right) = \\ &\mu_2 \Gamma F_2(\sigma) - \lambda\sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) = \\ &= \Gamma F_2(\sigma)\left(\mu_2 - \lambda\Gamma^{-1/2}\right) < 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Из соотношения (6), условий 2), 3), 4) теоремы следует, что производная функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_3$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(z) &= -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x + \nu\varphi(\sigma) + \lambda l^T x - \lambda\Gamma\varphi(\sigma) = \\ &= \lambda\alpha_1 c^T x - \beta_1 c^T x - \lambda^2 c^T x + (\nu - \lambda\Gamma)\varphi(\sigma) = \\ &= (\lambda(\alpha_1 - \lambda) - \beta_1) c^T x + (\nu - \lambda\Gamma)\varphi(\sigma) \le \\ &\le -\delta_\lambda \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) + (\nu - \lambda\Gamma)\varphi(\sigma) < 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\lambda(\alpha_1 - \lambda) - \beta_1 = -\delta_\lambda < 0$.

Рассмотрим множество $\partial\Omega_1$. Для вектора $z \in \in \partial\Omega_1$ справедливы соотношения

$$c^T x \le \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma), \tag{10}$$

$$x^T Hx = -F_1^2(\sigma). \tag{11}$$

Используя (10), (11) и условия 1), 3) теоремы, найдем производную функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$:

$$\dot{V}_1(z) = x^T(A^T H + HA)x + 2x^T Hb\varphi(\sigma) + \\ + 2F_1(\sigma)\frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma}c^T x < 2\varepsilon(c^T x)^2 + 2\alpha F_1^2(\sigma) + \\ + 2c^T xF_1(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_1(\sigma)} + \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma}\right) = 2\varepsilon(c^T x)^2 - \\ - 2\mu_1 c^T xF_1(\sigma) + 2\alpha F_1^2(\sigma). \quad (12)$$

Введем обозначения: $y = c^T x$, $y_1 = \sqrt{\Gamma}F_1(\sigma)$, $y_2 = \sqrt{\Gamma}F_2(\sigma)$, $Q(y) = y^2 - \mu_1\varepsilon^{-1}yF_1(\sigma) + \alpha\varepsilon^{-1}F_1^2(\sigma)$. Используя условие 3) теоремы, найдем $Q(y_1) = F_1^2(\sigma)(\Gamma + \alpha\varepsilon^{-1} - \sqrt{\Gamma}\mu_1\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1}F_1^2(\sigma)(\Gamma\varepsilon + \alpha - \sqrt{\Gamma}\mu_1) = 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$. Если $\mu_1 = (\Gamma\varepsilon + \alpha)\Gamma^{-1/2}$, то $Q(y) = \left(y - \alpha\varepsilon^{-1}\Gamma^{-1/2}F_1(\sigma)\right)\times(y - \sqrt{\Gamma}F_1(\sigma))$. Найдем значение $Q(y_2) = \Gamma(F_2(\sigma) - F_1(\sigma))\left(F_2(\sigma) - \alpha\varepsilon^{-1}\Gamma^{-1}F_1(\sigma)\right)$. Следовательно, в силу условий 5), 6) теоремы справедливо неравенство $Q(y_2) < 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$. Используя (6), (10) и условие 5) теоремы, для $z \in \partial\Omega_1$ получим соотношение

$$y_1 = \sqrt{\Gamma}F_1(\sigma) \le y = c^T x \le \sqrt{\Gamma}F_2(\sigma) = y_2. \quad (13)$$

Неравенства (12), (13) позволяют определить знак производной функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\dot{V}_1(z) < 0. \quad (14)$$

Из (8), (9), (14) следует, что множество Ω является положительно инвариантным, а множество $\Omega \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ – выпуклым, замкнутым и ограниченным. В силу соотношения (6) и теоремы Брауэра [4] множество Ω содержит предельный цикл второго рода.

Замечание. Условие 4) теоремы может выполняться при $\lambda = \nu\Gamma^{-1}$. В этом случае параметры системы (1) должны удовлетворять неравенствам

$$\mu_2 < \frac{\nu}{\Gamma\sqrt{\Gamma}}, \; -\delta_\lambda = \frac{\nu}{\Gamma}\left(\alpha_1 - \frac{\nu}{\Gamma}\right) - \beta_1 < 0. \quad (15)$$

Условие 7) теоремы будет справедливо при $q_\lambda = -\Gamma^{-1}b$. Соотношения (15) позволяют получить грубые оценки для параметров, при которых система (1) имеет предельный цикл второго рода. Более точные результаты могут быть получены за счет увеличения значения $\lambda = \nu\Gamma^{-1} + \lambda_1$, $\lambda_1 > 0$, что приводит к увеличению μ_2 и уменьшению значений функции $F_2(\sigma)$, задействованной в условии 6) теоремы. Увеличение λ приводит к необходимости проверки неравенств из условий 4), 5), 6), для чего целесообразно использовать численные методы.

Практические исследования. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}\varphi(\sigma), \; \dot{\sigma} = \tilde{c}^T\tilde{x}, \quad (16)$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\alpha_1, \beta_1, \nu, \Gamma \in R^+$. Матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = -2^{-1} \pm 2^{-1}\sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}$. Если $4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0$, то матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения с мнимой частью. В системе (16) сделаем замену переменных $\tilde{x} = Sx$, и систему (16) приведем к системе (1), где $A = S^{-1}\tilde{A}S$, $b = S^{-1}\tilde{b}$, $c^T = \tilde{c}^T S$. Пусть $S = \begin{pmatrix} \beta - \beta_1 & \alpha \\ \alpha & \beta - 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \alpha_1/2$, $4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0$, $\beta = 2^{-1}\sqrt{4\beta_1 - \alpha_1^2}$. Тогда $\det S = \Delta_s = \beta(2\beta - \beta_1 - 1) \ne 0$, $\begin{pmatrix} \beta - 1 & -\alpha \\ -\alpha & \beta - \beta_1 \end{pmatrix}\times\Delta_s^{-1} = S^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha E + \beta J^T$, E – единичная матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \nu(\beta - 1) + \alpha\Gamma \\ -\nu\alpha - \Gamma(\beta - \beta_1) \end{pmatrix}\times\Delta_s^{-1} = b$, $c = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 1 \end{pmatrix}$, $c^T b = \tilde{c}^T SS^{-1}\tilde{b} = \tilde{c}^T\tilde{b} = -\Gamma$.

Рассмотрим систему матричных уравнений (2). Пусть $L = L_1 - 2\varepsilon cc^T$, $\Delta_b = b^T b$, $\varepsilon = \varepsilon_1\beta\Delta_b^{-1}$, $\varepsilon_1 = \Delta_b\varepsilon\beta^{-1}$. Тогда непосредственной подстановкой в (2) проверяется, что матрицы $H = H^T$, $L_1 = L_1^T$,

$$H = \Delta_b^{-1}(cb^T + Jcb^T J) + 2t\left(E - \Delta_b^{-1}bb^T\right), \quad (17)$$

$$L_1 = \frac{2\beta}{\Delta_b}(Jcb^T + cb^T J^T) + 2\beta t\left(J - \frac{2}{\Delta_b}Jbb^T\right), \quad (18)$$

где $t \in R$, удовлетворяют системе матричных уравнений (2). Для определителей матриц H, $L = L_1 - 2\varepsilon cc^T = (l_{ij}), i, j = 1, 2$, выполняются соотношения

$$\det H = \Delta_b^{-1}(2tb^T c - \Delta_c), \quad (19)$$

$$\det L = -4\beta^2\Delta_b^{-2}\left(\varepsilon_1(2tc^T b - \Delta_c)(c^T Jb) + \\ + t^2\Delta_b^2 - \Delta_b(2tc^T b - \Delta_c)\right), \quad (20)$$

где $\Delta_c = c^T c$, $t \in R$. Если выполнены неравенства

$$2tb^T c - \Delta_c < 0, \quad (21)$$

$$l_{11} = 2tb_1 b_2 - (c_1 b_2 + c_2 b_1) - \varepsilon_1 c_1^2 < 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon_1(2tc^T b-\Delta_c)(c^T Jb)+t^2\Delta_b^2- \\ -\Delta_b(2tc^T b-\Delta_c)<0, \quad (23)$$

то используя критерий Сильвестра и равенства (19), (20), получим, что матрица H имеет одно положительное и одно отрицательное собственное значение, матрица L является отрицательно определенной. Соотношения (21)–(23) определяют значения t, ε, при которых выполняется условие 1) теоремы. Пусть $\tau=c^T Jb=c_2b_1-c_1b_2>0$. Тогда в рассматриваемом примере неравенства (21)–(23) примут вид

$$t>-\Delta_c(2\Gamma)^{-1},\ \tau=c^T Jb=c_2b_1-c_1b_2>0, \quad (24)$$

$$\varepsilon_1>c_1^{-2}(2tb_1b_2-(c_1b_2+c_2b_1))=f_2(t), \quad (25)$$

$$\varepsilon_1>\frac{t^2\Delta_b^2}{(2t\Gamma+\Delta_c)\tau}+\frac{\Delta_b}{\tau}=f_1(t). \quad (26)$$

Для функции $f_1(t)$ на интервале $\left(-\Delta_c(2\Gamma)^{-1};+\infty\right)$ существует точка минимума $t_0=0$, $f_1(0)=\Delta_b\tau^{-1}$. Таким образом, если выполнены соотношения

$$\tau=c_2b_1-c_1b_2>0,\ \varepsilon>\beta\tau^{-1}, \quad (27)$$

$$\varepsilon>-\beta\left(\Delta_b c_1^2\right)^{-1}(c_1b_2+c_2b_1), \quad (28)$$

то при $\varepsilon_1=\Delta_b\beta^{-1}\varepsilon$, $t=0$ выполняются неравенства (24)–(26) и матрицы H, L имеют вид

$$H=\Delta_b^{-1}(cb^T+Jcb^TJ), \quad (29)$$

$$L=2\beta\Delta_b^{-1}(Jcb^T+cb^TJ^T)-2\varepsilon cc^T. \quad (30)$$

Проверим условие 2) теоремы, найдем $c^TA=$ $=\tilde{c}^TSS^{-1}\tilde{A}S=\tilde{c}^T\tilde{A}S=$ $l^T=(1;0)S=(\beta-\beta_1;\ \alpha)$, $l^TA=(-\alpha(2\beta-\beta_1);\beta(\beta-\beta_1)-\alpha^2)=-\alpha_1l^T-\beta_1c^T$, $l^Tb=\tilde{c}^T\tilde{A}S^{-1}\tilde{b}=\nu$, $\det\|c,l\|=\det\left(S\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=-\Delta_s$, $-\Delta_s\neq0$, $rang\|c,l\|=2$. Таким образом, для рассматриваемого примера выполняется условие 2) теоремы.

Для системы (1) найдем грубые оценки параметров, положив $\lambda=\nu\Gamma^{-1}$ в условиях 4), 5), 7). В качестве вектора q_λ из условия 7) возьмем $q_\lambda=-\Gamma^{-1}b$. Если для системы (3) при $\mu=\mu_1$, $\mu=\mu_2$ существуют предельные циклы второго рода $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$, $0<F_1(\sigma)<F_2(\sigma)$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$ и выполняются соотношения

$$\mu_2<\nu\Gamma^{-3/2},\ \mu_1=(\varepsilon\Gamma+\alpha)\Gamma^{-1/2}, \quad (31)$$

$$-\delta_\lambda=\frac{\nu}{\Gamma}\left(\alpha_1-\frac{\nu}{\Gamma}\right)-\beta_1<0, \quad (32)$$

$$F_2(\sigma)-F_1(\sigma)\alpha(\varepsilon\Gamma)^{-1}<0, \quad (33)$$

для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$, где ε удовлетворяет неравенствам (27), (28), то справедливы условия 3)–7) теоремы и системы (1), (16) имеют предельный цикл второго рода.

Рассмотрим систему (16) при $\alpha_1=5/4$, $\beta_1=$ $=5\beta_0/4$, $\nu=5/16$, $\Gamma=5/4$ [4]. Определим элементы матрицы A, $\alpha=\alpha_1/2=5/8$, $\beta^2=\beta_1-$ $-\alpha^2=(5\beta_0)/4-25/64$, $\beta_0=(4/5)\beta^2+5/16$. Если $\beta_0>5/16$, то матрица A имеет собственные значения с мнимой частью и для системы (1) не выполняются условия 2), 3) теоремы 3.15.1 [4]. Для неравенств (27) найдем τ. В рассматриваемом примере справедливо соотношение $\det S=\Delta_s=$ $=-\beta\Delta_c$ и значение τ определяется равенством

$$\tau=c_2b_1-c_1b_2=\Delta_s^{-1}(\nu(\beta-1)^2+\alpha\Gamma(\beta-1)+\nu\alpha^2+ \\ +\Gamma\alpha(\beta-\beta_1))=\Delta_s^{-1}(\nu\Delta_c+\alpha\Gamma(2\beta-\beta_1-1))= \\ =\Delta_s^{-1}(\nu\Delta_c+\alpha\Gamma\beta^{-1}\Delta_s)=\Delta_s^{-1}(\nu\Delta_c-\alpha\Gamma\Delta_c)= \\ =\Delta_s^{-1}\Delta_c(\nu-\alpha\Gamma)=\beta^{-1}(\alpha\Gamma-\nu)=15/(32\beta).$$

Из (27) получим

$$\varepsilon>\beta\tau^{-1}=(32\beta^2)/15. \quad (34)$$

Пусть $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma$, $\gamma=0.8$, тогда $\mu_2=$ $=0.2236<\lambda\Gamma^{-1/2}=\nu\Gamma^{-3/2}$. Численными методами определяются начальные условия $y_2(0)=$ $=3.851$, $\sigma(0)=0$ предельного цикла второго рода $F_2(\sigma)$ системы (3) при $\mu=\mu_2$. Следовательно, для системы (1) выполняется условие 5) теоремы. Возьмем значение $\varepsilon=0.059$, найдем $\mu_1=\Gamma^{-1/2}\times$ $\times(\Gamma\varepsilon+\alpha)=0.625$. Численно определим начальные условия $y_1(0)=1.882$, $\sigma(0)=0$ предельного цикла второго рода $F_1(\sigma)$ системы (3) при значении $\mu=\mu_1$. Для системы (1) выполняется условие 3) теоремы и справедливо неравенство

$$\frac{\alpha}{\varepsilon\Gamma}F_1(\sigma)-F_2(\sigma)\geq0.01>0 \quad (35)$$

для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$. Из (35) следует справедливость условия 6) теоремы. Используя (34), определим значения $\beta=0.166$, $\beta_1=\beta^2+\alpha^2=0.418$, $\beta_0=8.93$, найдем $\delta_\lambda=\nu\Gamma^{-1}\left(\nu\Gamma^{-1}-\alpha_1\right)+\beta_1=$ $=0.168$. Для системы (1) выполнено условие 4) теоремы. Для значения $\varepsilon=0.059$ проверим неравенство (28), найдем $c_1b_2+c_2b_1=1.99$. Следовательно, $-\beta\left(\Delta_b c_1^2\right)^{-1}(c_1b_2+c_2b_1)<0<\varepsilon$, выполняются неравенства (27), (28) и справедливо условие 1) теоремы. Системы (1), (16) имеют предельный цикл второго рода. Численными методами проверяется, что при увеличении ε неравенство (35)

перестает выполняться для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$. Это приводит к нарушению условия 6) теоремы.

Для увеличения верхней границы значения β_0 следует увеличить значение λ. При этом целесообразно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм проверки условий теоремы.

1. Выбрать значение $\varepsilon = 0.0718$. Применяя соотношение (34), определить значения $\beta = 0.183 < (15\varepsilon/32)^{1/2}$, $\beta_1 = \beta^2 + \alpha^2 = 0.424$, $\beta_0 = 0.8\beta_1 = 0.339$.

2. Проверить неравенство (28) для $\varepsilon = 0.0718$, $-\beta(\Delta_b c_1^2)^{-1}(c_1 b_2 + c_2 b_1) = -0.363 < \varepsilon$.

3. Найти начальные условия предельного цикла второго рода $F_1(\sigma)$ системы (3) при $\mu = \mu_1 = (\Gamma\varepsilon + \alpha)\Gamma^{-1/2} = 0.639$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.8$. С помощью численных методов определить начальные условия $y_1(0) = 1.86$, $\sigma(0) = 0$.

4. Взять значение $\lambda = \nu\Gamma^{-1} + \lambda_0$, определить $\lambda_0 = 0.08062$, найти $\lambda = 0.331$. Для значения λ проверить неравенство $-\delta_\lambda = \lambda(\alpha_1 - \lambda) - \beta_1 = -0.12 < 0$, С помощью численных методов определить значение e_1, для которого выполняется неравенство $F_1(\sigma) + \dfrac{\lambda_0\sqrt{\Gamma}}{\delta_\lambda}\varphi(\sigma) \ge e_1 = 2\cdot 10^{-4} > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$.

5. Найти начальные условия предельного цикла второго рода $F_2(\sigma)$ системы (3) при $\mu = \mu_2 = 0.2957 < \lambda\Gamma^{-1/2}$. С помощью численных методов определить начальные условия $y_2(0) = 3.06$, $\sigma(0) = 0$.

6. Численными методами найти значение e_2, для которого выполняется неравенство $\alpha(\varepsilon\Gamma)^{-1} \times F_1(\sigma) - F_2(\sigma) \ge e_2 = 0.013 > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$.

7. Проверить условие 7) теоремы. Найти вектор q_λ, удовлетворяющий системе уравнений $\begin{pmatrix} c^T \\ l^T \end{pmatrix} q_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} c^T \\ l^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}^T S \\ \tilde{l}^T S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}^T \\ \tilde{l}^T \end{pmatrix} S = S \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D$, $D^{-1} = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta - 1 & -\alpha \\ -\alpha & \beta - \beta_1 \end{pmatrix} \times \Delta_s^{-1} = S^{-1}$. Следовательно, q_λ определяется равенством $q_\lambda = D^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} = S^{-1} \times \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$. В силу (29) матрица H имеет вид $H = \Delta_b^{-1}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & -h_1 \end{pmatrix}$, $h_1 = c_1 b_1 - c_2 b_2$, $h_2 = c_1 b_2 + c_2 b_1$.

Найдем матрицу $M = \left(S^{-1}\right)^T H S^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$,

$$m_1 = (\Delta_b \Delta_s^2)^{-1}(h_1(\beta-1)^2 - 2\alpha h_2(\beta-1) - \alpha^2 h_1),$$

$$m_2 = (\Delta_b \Delta_s^2)^{-1}(-\alpha h_1(\beta-1) + \alpha^2 h_2 + h_2(\beta-1)(\beta-\beta_1) + \alpha h_1(\beta-\beta_1)),$$

$$m_3 = (\Delta_b \Delta_s^2)^{-1}(\alpha^2 h_1 - 2\alpha h_2(\beta-\beta_1) - h_1(\beta-\beta_1)^2).$$

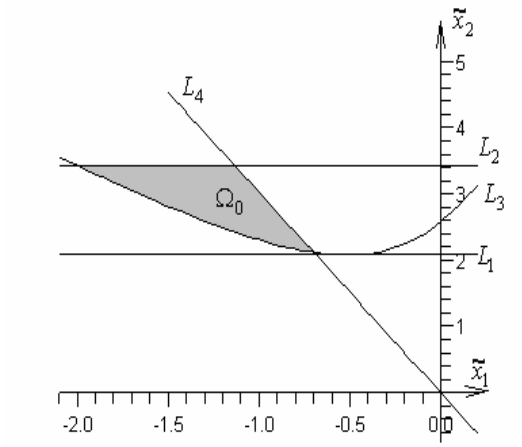

Рис.1. Область начальных условий предельного цикла системы (16)

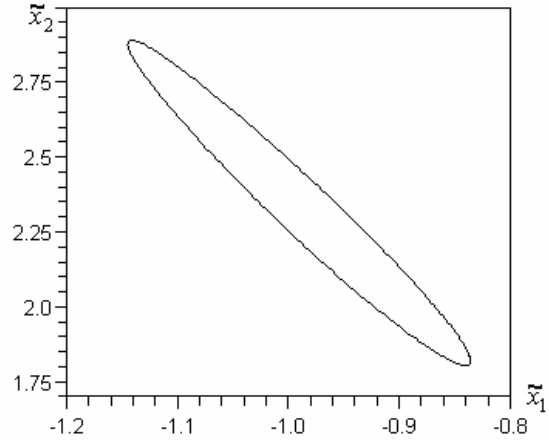

Рис.2. Проекция предельного цикла системы (16) на плоскость $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$

Обозначим

$$g(\lambda) = q_\lambda^T H q_\lambda = (-\lambda;1)\left(S^{-1}\right)^T H S^{-1}\begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = (-\lambda;1)\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 m_1 - 2\lambda m_2 + m_3.$$

Для рассматриваемого примера найдем $m_1 = 4.59$, $m_2 = 1.148$, $m_3 = -0.513$, $\lambda = 0.331$, $g(\lambda) = -0.77$. Численными методами определяется значение e_3,

для которого выполняется неравенство $-\Gamma g(\lambda)\times \times F_2^2(\sigma)-F_1^2(\sigma)\geq e_3=1.736>0$ для любого $\sigma\in \in(-\infty;+\infty)$. Таким образом, выполнены условия теоремы, системы (1), (16) имеют предельный цикл второго рода. Проведенный анализ показал, что за счет увеличения λ удается расширить границы изменения параметра β_0.

Результаты теоремы позволяют определить в фазовом пространстве область, содержащую начальные условия предельного цикла системы (16). В плоскости $\sigma=0$ рассмотрим линии:

$$L_1: c^T x=\sqrt{\Gamma}F_1(0)\Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x}=\sqrt{\Gamma}F_1(0)\Leftrightarrow \tilde{x}_2=2.08,$$

$$L_2: c^T x=\sqrt{\Gamma}F_2(0)\Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x}=\sqrt{\Gamma}F_2(0)\Leftrightarrow \tilde{x}_2=3.42,$$

$$L_3: x^T Hx=-F_1^2(0)\Leftrightarrow \tilde{x}^T(S^{-1})^T HS^{-1}\tilde{x}=-F_1^2(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4.59\tilde{x}_1^2+2\cdot 1.148\tilde{x}_1\tilde{x}_2-0.513\tilde{x}_2^2=-1.86^2,$$

$$L_4: l^T x+\lambda c^T x=0\Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{A}\tilde{x}+\lambda\tilde{c}^T\tilde{x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}_1+0.331\tilde{x}_2=0.$$

На рисунке 1 изображена область Ω_0, ограниченная линиями L_1, L_2, L_3, L_4. Область Ω_0 содержит начальные условия предельного цикла системы (16).

Численными методами показывается, что цикл системы (16) определяется начальными условиями $\tilde{x}_1(0)=-1.144$, $\tilde{x}_2(0)=2.888$, $\sigma(0)=0$ из области Ω_0. На рисунке 2 изображена проекция цикла системы (16) при $\beta_0=0.339$ на плоскость $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Барбашин Е.А., Табуева В.А.** Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.
2. **Матросов В.В.** Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. №3. С. 267-278.
3. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. **Леонов Г.А., В.Б. Смирнова В.Б.** Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000. 400 с.
5. **Мамонов С.С.** Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений.I // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 637–646.
6. **Шахтарин Б. И.** Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. М.: Машиностроение, 1991. 192 с.
7. **Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.** Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448 с.
8. **Шахгильдян В.В., Белюстина Л.Н.** Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.

Мамонов Сергей Станиславович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,

тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru

УДК 517.91

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

С.С. Мамонов, А.О. Харламова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF LIMIT CYCLES OF THE SECOND KIND OF MODEL FOR FREQUENCY-FHASE-LOCKED LOOP

S.S. Mamonov, A.O. Kharlamova

Рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты. Получены условия существования предельных циклов второго рода, зависящие от параметров частотного кольца. Рассмотрен пример математической модели системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка в цепях управления.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, предельный цикл второго рода, система матричных уравнений.

We consider a system of differential equations is a mathematical model of the system-frequency phase-locked loop. Conditions for the existence of limit cycles of the second kind, which depend on the frequency of the ring. The example of the mathematical model of the frequency-phase-locked to the first-order filter in control circuits.

Keywords: system of differential equations, the limit cycle of the second sort , the system of matrix equations.

Введение. В работе рассматривается математическая модель системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1–5]. Для систем ЧФАП решается задача определения асинхронных режимов. Среди асинхронных режимов выделяют вращательный режим, соответствующий предельному циклу второго рода. Вращательный режим представляет интерес, так как он предшествует режиму синхронизации. Известно, что добавление частотного кольца в систему фазовой автоподстройки приводит к увеличению области параметров системы для режимов синхронизации [3, 4, 5]. Базовая математическая модель системы ЧФАП приводится к системе дифференциальных уравнений [3, 5]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2kc^T x}{1+\tau^2(c^T x)^2}, \quad \dot{\sigma} = c^T x, \quad (1)$$

где $x, b, c, d \in R^n$, $k, \tau \in R$, $\varphi(\sigma) - \Delta$-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Среди результатов исследования, полученных качественно-численными методами [3, 4, 5], следует отметить применение метода нелокального сведения, предложенное в работах [7, 8]. В указанном методе используются частотные условия существования решения системы матричных неравенств, обладающего определенными свойствами. Для системы (1) с матрицей A, имеющей собственные значения с мнимой частью, возникает необходимость нахождения решения системы трех матричных уравнений, два из которых – модифицированные уравнения Ляпунова, третье – уравнение линейной связи. В данной работе на основе метода нелокального сведения и результатов, полученных для нахождения решения системы матричных уравнений, предложен подход к исследованию системы (1), позволяющий сформулировать условия существования циклов второго рода и определить область фазового пространства, содержащую цикл.

Теоретические исследования. Условия, обеспечивающие вращательные режимы системы ЧФАП, определяются результатами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) система матричных уравнений

$$A^T H + HA = Q_1 + 2q_1 cc^T - 2\alpha H, \quad (2)$$

$$(A + 2kdc^T)^T H + H(A + 2kdc^T) = \\ = Q_2 + 2q_2 cc^T - 2\alpha H, \quad (3)$$

$$Hb = r \qquad (4)$$

при $q_1 = \varepsilon_1 > 0$, $q_2 = \varepsilon_2$, $\alpha > 0$, $c^T b = -\Gamma$, $r = c$ имеет решение $H = H_1 = H_1^T$, $Q_1 = L_1 < 0$, $Q_2 = L_2 < 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$, матрица H_1 имеет одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение;

2) система матричных уравнений (2)–(4) при $q_1 = m_1$, $q_2 = m_2$, $r = -c$ имеет решение $H = H_2 = H_2^T$, $Q_1 = M_1 < 0$, $Q_2 = M_2 < 0$, $m_2 - m_1 = -m_0 < 0$, матрица H_2 является положительно определенной, $H_2 > 0$;

3) система уравнений

$$\dot{y} = -\lambda y - \varphi(\sigma) - \frac{2s\lambda\nu y}{1+(\lambda\nu)^2 y^2}, \quad \dot{\sigma} = y \qquad (5)$$

при $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{\varepsilon_1\Gamma + \alpha}{\sqrt{\Gamma}}$, $s = s_1 = \dfrac{\varepsilon_0}{2\tau}$, $\nu = \nu_1 = \dfrac{\tau\sqrt{\Gamma}}{\lambda_1}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

4) система уравнений (5) при $\lambda = \lambda_2 = \dfrac{\alpha - m_1\Gamma}{\sqrt{\Gamma}}$, $s = s_2 = \dfrac{m_0}{2\tau}$, $\nu = \nu_2 = \dfrac{\tau\sqrt{\Gamma}}{\lambda_2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$, $F_2(\sigma) > F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

5) выполняется неравенство $F_2(\sigma) \le \dfrac{\alpha F_1(\sigma)}{\Gamma g_1(\sigma)}$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$, где

$$g_1(\sigma) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_0}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)};$$

6) справедливо соотношение $g_2(\sigma) = m_1 - \dfrac{m_0}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)} \ge 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(z) = x^T H_1 x + F_1^2(\sigma)$, $V_2(z) = x^T H_2 x - F_2^2(\sigma)$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям 3), 4) теоремы. Пусть $\Omega_1 = \{z:\ V_1(z) \le 0, c^T x \ge 0\}$, $\Omega_2 = \{z : V_2(z) \le 0\}$. Используя (4) при $r = c$ и теорему Шура [7], найдем определитель матрицы $(H_1 + \tau_1^{-1}cc^T)$:

$$\det(H_1 + \tau_1^{-1}cc^T) = \det H_1 \det(E + \tau_1^{-1}H_1^{-1}cc^T) = \det H_1 \det(E + \tau_1^{-1}bc^T) = (1 + \tau_1^{-1}b^T c)\det H_1 = (1 - \tau_1^{-1}\Gamma)\det H_1. \qquad (6)$$

В силу соотношения (6), того, что $cc^T \ge 0$ и матрица H_1 имеет одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение, получим

$$H_1 + \Gamma^{-1}cc^T \ge 0. \qquad (7)$$

Если $z \in \Omega_1$, то в силу (7) справедливо неравенство

$$c^T x \ge \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma). \qquad (8)$$

Используя (4) при $r = -c$ и теорему Шура, найдем определитель матрицы $(H_2 - \tau_2^{-1}cc^T)$

$$\det(H_2 - \tau_2^{-1}cc^T) = \det H_2 \det(E - \tau_2^{-1}H_2^{-1}cc^T) = \det H_2 \det(E + \tau_2^{-1}bc^T) = (1 + \tau_2^{-1}b^T c)\det H_2 = (1 - \tau_2^{-1}\Gamma)\det H_2. \qquad (9)$$

В силу соотношения (9), того, что $cc^T \ge 0$ и матрица H_2 является положительно определенной, получим

$$H_2 - \Gamma^{-1}cc^T \ge 0. \qquad (10)$$

Если $z \in \Omega_2$, то в силу (10) справедливо неравенство

$$(c^T x)^2 \le \Gamma F_2^2(\sigma). \qquad (11)$$

Пусть $q_\sigma = -\Gamma^{-1/2}F_2(\sigma)b$. Тогда $q_\sigma^T H_1 q_\sigma = \Gamma^{-1}F_2^2(\sigma)b^T c = -F_2^2(\sigma) < -F_1^2(\sigma)$, $q_\sigma \in \overline{\Omega}_1 = \{z : V_1(z) < 0, c^T x > 0\}$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$, при этом $q_\sigma^T H_2 q_\sigma = -\Gamma^{-1}F_2^2(\sigma)b^T c = F_2^2(\sigma)$, $q_\sigma \in \Omega_2$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$. Таким образом, множество $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2$ содержит внутренние точки и $\Omega \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\} \ne \varnothing$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$. Так как матрица H_2 положительно определенная и функция $F_2(\sigma)$ ограниченная, то множества $\Omega_2 \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\}$, $\Omega \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ являются ограниченными для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$. Граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, c^T x > 0, V_2(z) \le 0\},$$
$$\partial\Omega_2 = \{z : V_2(z) = 0, c^T x > 0, V_1(z) \le 0\}.$$

Используя условия 1), 3) теоремы, найдем производную функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\dot{V}_1(z) = x^T(A^T H_1 + H_1 A)x + 2cx^T\varphi(\sigma) + \frac{2k}{1+\tau^2(c^T x)^2}x^T(cd^T H_1 + H_1 dc^T)x + 2F_1(\sigma)\times c^T x\frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{1+\tau^2(c^T x)^2}\Big(\tau^2(c^T x)^2 x^T \times (A^T H_1 + H_1 A)x + x^T((A + 2kdc^T)^T H_1 + H_1(A + 2kdc^T))x\Big) + 2c^T x F_1(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_1(\sigma)} + \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma}\right) = \frac{1}{1+\tau^2(c^T x)^2}\times (\tau^2(c^T x)^2 x^T(A^T H_1 + H_1 A)x + x^T((A + 2kdc^T)^T H_1 + H_1(A + 2kdc^T))x) -$$

$$-2c^T xF_1(\sigma)\left(\lambda_1+\frac{2s_1\lambda_1\nu_1}{1+(\lambda_1\nu_1)^2F_1^2(\sigma)}\right). \quad (12)$$

Обозначим $\Phi_1(\sigma)=F_1(\sigma)\left(\lambda_1+\frac{2s_1\lambda_1\nu_1}{1+(\lambda_1\nu_1)^2F_1^2(\sigma)}\right)$.

С помощью условия 1) теоремы и соотношения (12) получим

$$\begin{aligned}\dot V_1(z)<&\frac{1}{1+\tau^2(c^Tx)^2}(2\tau^2\varepsilon_1(c^Tx)^4+\\&+2\tau^2\alpha(c^Tx)^2F_1^2(\sigma)+2\varepsilon_2(c^Tx)^2+\\&+2\alpha F_1^2(\sigma))-2c^Tx\Phi_1(\sigma)=\\=&\frac{2}{1+\tau^2(c^Tx)^2}(\tau^2(c^Tx)^2(\varepsilon_1(c^Tx)^2-\\&-(c^Tx)\Phi_1(\sigma)+\alpha F_1^2(\sigma))+\varepsilon_1(c^Tx)^2-\\&-(c^Tx)\Phi_1(\sigma)+\alpha F_1^2(\sigma)+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(c^Tx)^2)=\\&=2(\varepsilon_1(c^Tx)^2-(c^Tx)\Phi_1(\sigma)+\\&+\alpha F_1^2(\sigma))+\frac{2\varepsilon_0(c^Tx)^2}{1+\tau^2(c^Tx)^2}.\end{aligned} \quad (13)$$

Используя условие теоремы $\varepsilon_0=\varepsilon_2-\varepsilon_1>0$ и неравенства (8), (13), получим

$$\begin{aligned}\dot V_1(z)<2\Bigg(&\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_0}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}\right)(c^Tx)^2-\\&-\Phi_1(\sigma)(c^Tx)+\alpha F_1^2(\sigma)\Bigg)\end{aligned} \quad (14)$$

Введем обозначения

$$y=c^Tx,\ y_1=\sqrt{\Gamma}F_1(\sigma),\ y_2=\sqrt{\Gamma}F_2(\sigma), \quad (15)$$

$$\begin{aligned}G_1(y)=&\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_0}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}\right)y^2-\\&-\Phi_1(\sigma)y+\alpha F_1^2(\sigma).\end{aligned} \quad (16)$$

В силу условия 3) теоремы справедливы соотношения $\lambda_1=\frac{\varepsilon_1\Gamma+\alpha}{\sqrt{\Gamma}}$, $\nu_1=\frac{\tau\sqrt{\Gamma}}{\lambda_1}$, $s_1=\frac{\varepsilon_0}{2\tau}$. Значит, функция $\Phi_1(\sigma)$ удовлетворяет равенству

$$\Phi_1(\sigma)=F_1(\sigma)\left(\frac{\varepsilon_1\Gamma+\alpha}{\sqrt{\Gamma}}+\frac{\varepsilon_0\sqrt{\Gamma}}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}\right). \quad (17)$$

Найдем значение функции $G_1(y)$ при $y=y_1=$ $=\sqrt{\Gamma}F_1(\sigma)$:

$$\begin{aligned}G_1(y_1)=&\varepsilon_1\Gamma F_1^2(\sigma)+\frac{\varepsilon_0\Gamma F_1^2(\sigma)}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}-(\varepsilon_1\Gamma+\\&+\alpha)F_1^2(\sigma)-\frac{\varepsilon_0\Gamma F_1^2(\sigma)}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}+\alpha F_1^2(\sigma)=0.\end{aligned} \quad (18)$$

Пусть $g_1(\sigma)=\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_0}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}$. Тогда, используя (17), найдем $\Phi_1(\sigma)$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\sigma)=&F_1(\sigma)\sqrt{\Gamma}\left(\varepsilon_1+\frac{\alpha}{\Gamma}+\frac{\varepsilon_0}{1+\tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}\right)=\\&=F_1(\sigma)\sqrt{\Gamma}(\varepsilon_1+\alpha\Gamma^{-1}+g_1(\sigma)-\varepsilon_1)=\\&=F_1(\sigma)\sqrt{\Gamma}(\alpha\Gamma^{-1}+g_1(\sigma)).\end{aligned} \quad (19)$$

Из (15), (16), (19) и условия 5) теоремы следует, что значение функции $G_1(y)$ при $y=y_2=\sqrt{\Gamma}F_2(\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}G_1(y_2)=&g_1(\sigma)\Gamma F_2^2(\sigma)-F_1(\sigma)F_2(\sigma)\Gamma(\alpha\Gamma^{-1}+\\&+g_1(\sigma))+\alpha F_1^2(\sigma)=g_1(\sigma)\Gamma F_2(\sigma)(F_2(\sigma)-\\&-F_1(\sigma))-\alpha F_1(\sigma)(F_2(\sigma)-F_1(\sigma))=\\&=(F_2(\sigma)-F_1(\sigma))(g_1(\sigma)\Gamma F_2(\sigma)-\alpha F_1(\sigma))\le 0.\end{aligned} \quad (20)$$

Соотношения (14), (15), (16), (8), (11), (18), (20) позволяют определить знак производной функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\dot V_1(z)<0. \quad (21)$$

Используя условия 2), 4) теоремы, найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2$

$$\begin{aligned}\dot V_2(z)=&x^T(A^TH_2+H_2A)x-2cx^T\varphi(\sigma)+\\&+\frac{2k}{1+\tau^2(c^Tx)^2}x^T(cd^TH_2+H_2dc^T)x-\\&-2F_2(\sigma)c^Tx\frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma}=\frac{1}{1+\tau^2(c^Tx)^2}\times\\&\times\Big(\tau^2(c^Tx)^2x^T(A^TH_2+H_2A)x+\\&+x^T\big((A+2kdc^T)^TH_2+H_2(A+2kdc^T)\big)x\Big)-\\&-2c^TxF_2(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_2(\sigma)}+\frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma}\right)=\frac{1}{1+\tau^2(c^Tx)^2}\times\\&\times(\tau^2(c^Tx)^2x^T(A^TH_2+H_2A)x+\\&+x^T((A+2kdc^T)^TH_2+H_2(A+2kdc^T))x)+\\&+2c^TxF_2(\sigma)\left(\lambda_2+\frac{2s_2\lambda_2\nu_2}{1+(\lambda_2\nu_2)^2F_2^2(\sigma)}\right).\end{aligned} \quad (22)$$

Обозначим $\Phi_2(\sigma)=\left(\lambda_2+\frac{2s_2\lambda_2\nu_2}{1+(\lambda_2\nu_2)^2F_2^2(\sigma)}\right)F_2(\sigma)$.

В силу условия 2) теоремы и соотношения (22), получим

$$\begin{aligned}\dot V_2(z)<&\frac{1}{1+\tau^2(c^Tx)^2}(2\tau^2m_1(c^Tx)^4-\\&-2\tau^2\alpha(c^Tx)^2F_2^2(\sigma)+2m_2(c^Tx)^2-\\&-2\alpha F_2^2(\sigma))+2c^Tx\Phi_2(\sigma)=\\=&\frac{2}{1+\tau^2(c^Tx)^2}(\tau^2(c^Tx)^2(m_1(c^Tx)^2+\end{aligned}$$

$$+(c^T x)\Phi_2(\sigma)-\alpha F_2^2(\sigma))+m_1(c^T x)^2+$$
$$+(c^T x)\Phi_2(\sigma)-\alpha F_2^2(\sigma)+$$
$$+(m_2-m_1)(c^T x)^2)=2(m_1(c^T x)^2+$$
$$+(c^T x)\Phi_2(\sigma)-\alpha F_2^2(\sigma))-\frac{2m_0(c^T x)^2}{1+\tau^2(c^T x)^2}. \quad (23)$$

Используя условие теоремы $m_2-m_1=-m_0<0$ и неравенства (8), (11), (23), получим

$$\dot V_2(z)<2\left(\left(m_1-\frac{m_0}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)}\right)(c^T x)^2+\right. \quad (24)$$
$$\left.+\Phi_2(\sigma)(c^T x)-\alpha F_2^2(\sigma)\right).$$

Введем обозначение

$$G_2(y)=\left(m_1-\frac{m_0}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)}\right)y^2+ \quad (25)$$
$$+\Phi_2(\sigma)y-\alpha F_2^2(\sigma).$$

В силу условия 4) теоремы справедливы соотношения $\lambda_2=\frac{\alpha-m_1\Gamma}{\sqrt{\Gamma}}$, $s_2=\frac{m_0}{2\tau}$, $\lambda_2\nu_2=\tau\sqrt{\Gamma}$.

Следовательно, функция $\Phi_2(\sigma)$ удовлетворяет равенству

$$\Phi_2(\sigma)=F_2(\sigma)\left(\frac{\alpha-m_1\Gamma}{\sqrt{\Gamma}}+\frac{m_0\sqrt{\Gamma}}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)}\right). \quad (26)$$

Найдем значение функции $G_2(y)$ при $y=y_2=$ $=\sqrt{\Gamma}F_2(\sigma)$:

$$G_2(y_2)=m_1\Gamma F_2^2(\sigma)-\frac{m_0\Gamma F_2^2(\sigma)}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)}+$$
$$+(\alpha-m_1\Gamma)F_2^2(\sigma)+\frac{m_0\Gamma F_2^2(\sigma)}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)}- \quad (27)$$
$$-\alpha F_2^2(\sigma)=0.$$

Пусть $g_2(\sigma)=m_1-\frac{m_0}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)}$. Тогда, используя (26), найдем $\Phi_2(\sigma)$:

$$\Phi_2(\sigma)=F_2(\sigma)\sqrt{\Gamma}\left(\frac{\alpha}{\Gamma}-m_1+\right.$$
$$\left.+\frac{m_0}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)}\right)=F_2(\sigma)\sqrt{\Gamma}(-m_1+ \quad (28)$$
$$+\alpha\Gamma^{-1}-g_2(\sigma)+m_1)=$$
$$=F_2(\sigma)\sqrt{\Gamma}(\alpha\Gamma^{-1}-g_2(\sigma)).$$

В силу (25), (28) и условия 6) теоремы значение функции $G_2(y_1)$ при $y=y_1$ удовлетворяет неравенству

$$G_2(y_1)=g_2(\sigma)\Gamma F_1^2(\sigma)+F_1(\sigma)F_2(\sigma)\Gamma(\alpha\Gamma^{-1}-$$
$$-g_2(\sigma))-\alpha F_2^2(\sigma)=g_2(\sigma)\Gamma F_1(\sigma)(F_1(\sigma)- \quad (29)$$
$$-F_2(\sigma))+\alpha F_2(\sigma)(F_1(\sigma)-F_2(\sigma))=-(F_2(\sigma)-$$
$$-F_1(\sigma))(g_2(\sigma)\Gamma F_1(\sigma)+\alpha F_2(\sigma))\le 0.$$

Соотношения (24), (27), (8), (11), (29) позволяют определить знак производной функции $V_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2$:

$$\dot V_2(z)<0. \quad (30)$$

Из (21), (30) следует, что множество Ω – положительно инвариантно, а множество $\Omega\bigcap\{z:\sigma=\sigma_0\}$ – выпукло замкнуто и ограничено. В силу соотношения (8) и теоремы Брауэра множество Ω содержит предельный цикл второго рода [7].

Условия разрешимости системы матричных уравнений (2)–(4) определяются следующими утверждениями.

Лемма 1. Пусть для системы матричных уравнений (2)–(4) выполнены соотношения $A=$ $=\begin{pmatrix}-\alpha & \beta\\ -\beta & -\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $c=$ $=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}$, $c^T b=-\Gamma<0$, $c^T d=$ $=-\xi$, $\Delta_b=b^T b$, $\tau_c=c^T Jb=c_2b_1-c_1b_2$, $\Delta_c=c^T c$, $\bar h_2=c_1b_2+c_2b_1$, $w_c=c^T Jd=c_2d_1-c_1d_2$, $w_b=b^T\times$ $\times Jd=b_2d_1-b_1d_2$, $r=c$, справедливы неравенства

$$\varepsilon_1>-\frac{\beta}{c_1^2\Delta_b}(c_1b_2+c_2b_1),\ \varepsilon_1\tau_c>\beta, \quad (31)$$

$$\beta\bar h_2+2kw_cc_1b_2+2k\xi c_1b_1+\varepsilon_2\Delta_bc_1^2>0, \quad (32)$$

$$k^2\Delta_cw_b^2+2k\beta w_c\Delta_b+\beta^2\Delta_b-\varepsilon_2\Delta_b\tau_c\beta<0. \quad (33)$$

Тогда матричные уравнения (2)–(4) имеют решение $H=H_1=H_1^T$, $Q_1=L_1<0$, $Q_2=L_2<0$, $q_1=\varepsilon_1$, $q_2=\varepsilon_2$, где

$$H_1=(\Delta_b)^{-1}(cb^T+Jcb^TJ), \quad (34)$$

$$L_1=2\beta(\Delta_b)^{-1}(Jcb^T+cb^TJ^T)-2\varepsilon_1cc^T<0, \quad (35)$$

$$L_2=L_0-2\varepsilon_2cc^T<0,$$
$$L_0=2\Delta_b^{-1}(\beta(Jcb^T+cb^TJ^T)+kw_c(cb^TJ^T+ \quad (36)$$
$$+Jbc^T)-k\xi(cb^T+bc^T)),$$

матрица H_1 имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение.

Доказательство. Непосредственной подстановкой в уравнения (2), (4) показывается, что матрицы $H=H_1$, $Q_1=L_1$, определяемые равенствами (34), (35), удовлетворяют соотношениям (2), (4). Матрица H_1 имеет вид $H_1=\begin{pmatrix}h_1 & h_2\\ h_2 & -h_1\end{pmatrix}$,

$$h_1=\Delta_b^{-1}(c_1b_1-c_2b_2),\ h_2=\Delta_b^{-1}(c_1b_2+c_2b_1) \quad (37)$$

и имеет одно отрицательное и одно положительное собственные значения. Из критерия Сильвестра и неравенств (31) следует, что матрица L_1 – отрицательно определенная, $L_1 < 0$.

Используя (2), (34), (35), получим

$$\begin{aligned}&(A+2kdc^T)^T H_1 + H_1(A+2kdc^T) = L_1 + \\ &+2\varepsilon_1 cc^T - 2\alpha H_1 + 2k(cd^T H_1 + H_1 dc^T) = \\ &= 2\beta\Delta_b^{-1}(Jcb^T + cb^T J^T) - 2\alpha H_1 + \\ &+2k(cd^T H_1 + H_1 dc^T) = L_0 - 2\alpha H_1 = \\ &= (L_0 - 2\varepsilon_2 cc^T) + 2\varepsilon_2 cc^T - 2\alpha H_1 = \\ &= L_2 + 2\varepsilon_2 cc^T - 2\alpha H_1,\end{aligned} \tag{38}$$

где $L_2 = L_0 - 2\varepsilon_2 cc^T$, матрица L_0 определяется соотношением (36). Из (38) следует, что матрица H_1 является решением уравнения (3), когда $Q_2 = L_2$, $q_2 = \varepsilon_2$. Неравенства (32), (33) и критерий Сильвестра обеспечивают отрицательную определенность матрицы L_2. Лемма 1 доказана.

Пусть выполнены обозначения леммы 1, тогда справедливо утверждение.

Лемма 2. Если для системы матричных уравнений (2)–(4) выполнены соотношения $\mu_1 = -\Gamma^{-1}\tau_c(c_1 b_1 - c_2 b_2)$, $2c_1\Gamma^{-1}(\Delta_c b_2 w_b - -\Delta_b c_1 \xi) = \delta_1$, $r = -c$, справедливы неравенства

$$m_1 > -\frac{\beta\tau_c}{c_1^2\Delta_b\Gamma}(c_1 b_1 - c_2 b_2),$$

$$m_1 > \beta\tau_c\Gamma^{-2},\ \tau_c > 0, \tag{39}$$

$$\beta\mu_1 + k\delta_1 - m_2\Delta_b c_1^2 < 0, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma^{-2}\beta^2\Delta_b\tau_c^2 + k^2\Delta_c w_b^2 - 2k\beta\Gamma^{-1}\tau_c\xi\Delta_b - \\ &-m_2\Delta_b\tau_c\beta < 0,\end{aligned} \tag{41}$$

то матричные уравнения (2)–(4) имеют решение $H = H_2 = H_2^T$, $Q_1 = M_1 < 0$, $Q_2 = M_2 < 0$, $q_1 = m_1$, $q_2 = m_2$, где

$$\begin{aligned}&H_2 = -(\Delta_b)^{-1}(cb^T + Jcb^T J) + \\ &+2\Delta_c\Gamma^{-1}(E - \Delta_b^{-1}bb^T),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}&M_1 = -2\beta(\Delta_b)^{-1}(Jcb^T + cb^T J^T) + \\ &+2\beta\Delta_c\Gamma^{-1}(J - 2\Delta_b^{-1}Jbb^T) - 2m_1 cc^T < 0,\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&M_2 = M_0 - 2m_2 cc^T < 0, \\ &M_0 = (M_1 + 2m_1 cc^T) + \\ &+2k(cd^T H_2 + H_2 dc^T),\end{aligned} \tag{44}$$

матрица H_2 является положительно определенной.

Доказательство. Непосредственной подстановкой в уравнения (2), (4) при $r = -c$ показывается, что матрицы $H = H_2$, $Q_1 = M_1$, определяемые равенствами (42), (43), удовлетворяют соотношениям (2), (4). Матрица H_2 имеет вид

$$\begin{aligned}&H_2 = \Delta_b^{-1}\begin{pmatrix} h_{21} & h_{22} \\ h_{22} & h_{23}\end{pmatrix},\ h_{21} = \Gamma^{-1}(c_1^2\Delta_b + b_2^2\Delta_c), \\ &h_{22} = \Gamma^{-1}(c_1 c_2\Delta_b - b_1 b_2\Delta_c), \\ &h_{23} = \Gamma^{-1}(b_1^2\Delta_c + c_2^2\Delta_b).\end{aligned} \tag{45}$$

Используя критерий Сильвестра и неравенства $h_{21} > 0$, $\det H_2 = \Delta_b^{-2}(h_{21}h_{23} - h_{22}^2) = \Delta_c\Delta_b^{-1} > 0$, получим, что матрица H_2 является положительно определенной. Из критерия Сильвестра и неравенств (39) следует, что матрица M_1 является отрицательно определенной, $M_1 < 0$.

В силу (2), (44) получим

$$\begin{aligned}&(A+2kdc^T)^T H_2 + H_2(A+2kdc^T) = \\ &= M_1 + 2m_1 cc^T - 2\alpha H_2 + 2k(cd^T H_2 + \\ &+H_2 dc^T) = M_0 - 2\alpha H_2 = (M_0 - 2m_2 cc^T) + \\ &+2m_2 cc^T - 2\alpha H_2 = M_2 + 2m_2 cc^T - 2\alpha H_2,\end{aligned} \tag{46}$$

где $M_2 = M_0 - 2m_2 cc^T$, матрица M_0 определяется соотношением (44). Из (46) следует, что матрица H_2 является решением уравнения (3), когда $Q_2 = M_2$, $q_2 = m_2$. Неравенства (40), (41) и критерий Сильвестра обеспечивают отрицательную определенность матрицы M_2. Лемма 2 доказана.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}\,\varphi(\sigma) + \tilde{d}\,\frac{2k\tilde{c}^T\tilde{x}}{1+\tau^2(\tilde{c}^T\tilde{x})^2},\ \dot{\sigma} = \tilde{c}^T\tilde{x}, \tag{47}$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ -\Gamma\end{pmatrix}$, $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$, $\tilde{d} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ -\xi\end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$. Матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 2^{-1}\sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1} - 2^{-1}$. Если $4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0$, то матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения с мнимой частью. В системе (47) сделаем замену переменных $\tilde{x} = Sx$, получим систему (1), где $A = S^{-1}\tilde{A}S$, $b = S^{-1}\tilde{b}$, $c^T = \tilde{c}^T S$, $d = S^{-1}\tilde{d}$. Пусть $\alpha = \alpha_1/2$, $4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0$, $\beta = 2^{-1}\sqrt{4\beta_1 - \alpha_1^2}$, $\begin{pmatrix} \beta - \beta_1 & \alpha \\ \alpha & \beta - 1\end{pmatrix} = S$. Тогда $\det S = \Delta_s = \beta(2\beta - \beta_1 - -1) \neq 0$, $S^{-1} = \Delta_s^{-1}\begin{pmatrix} \beta - 1 & -\alpha \\ -\alpha & \beta - \beta_1\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha\end{pmatrix} = -\alpha E + \beta J^T$, E – единичная матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Рассмотрим случай: $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0.27$, $\nu_0 = 2$, $\Gamma = 9$, $\tilde{d}_1 = 0$, $\xi = 1$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.5$, $\tau = \beta = 2^{-1}\sqrt{4\beta_1 - \alpha_1^2}$. Для системы (47) определим значение k, при котором выполняются условия теоремы. Найдем элементы матрицы A ($\alpha = \alpha_1/2 = 0.5$, $\beta = \sqrt{2}/10$) и элементы векторов b, c, d.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19.934 \\ -1.126 \end{pmatrix}, \quad c = S^T\tilde{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.859 \end{pmatrix}, \; d = S^{-1}\tilde{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.581 \\ -0.921 \end{pmatrix}.$$

Пусть выполнены соотношения

$$\varepsilon_1 = 0.008, \; \varepsilon_0 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0.4k + 0.2033k^2. \quad (48)$$

Тогда справедливы условия леммы 1. Если значения m_1, m_0 определяются равенствами

$$m_1 = 0.03088, \; m_0 = -0.222k^2 + 0.2033k, \quad (49)$$

то выполняются условия леммы 2. Таким образом, соотношения (48), (49) определяют значения ε_1, ε_2, ε_0, m_1, m_2, m_0, для которых справедливы условия 1), 2) теоремы. При проверке условий 3)–6) теоремы целесообразно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм проверки условий 3)–6) теоремы.

1. Выбрать значение $k = 0.035$.

2. Используя соотношения (48), (49), определить $\varepsilon_0 = 0.0142$, $m_0 = 0.007$.

3. Найти начальные условия предельного цикла второго рода $F_1(\sigma)$ системы (5) при $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{\varepsilon_1\Gamma + \alpha}{\sqrt{\Gamma}} = 0.1907$, $2s\lambda\nu = 2s_1\lambda_1\nu_1 = \varepsilon_0\sqrt{\Gamma} = 0.043$, $(\lambda\nu)^2 = (\lambda_1\nu_1)^2 = \tau^2\Gamma = 0.18$, $\sin\sigma - \gamma = \varphi(\sigma)$, $\gamma = 0.5$. Численными методами определить начальные условия $y_1(0) = 2.767$, $\sigma(0) = 0$.

4. Определить начальные условия предельного цикла второго рода $F_2(\sigma)$ системы (5) при $\lambda = \lambda_2 = \dfrac{\alpha - m_1\Gamma}{\sqrt{\Gamma}} = 0.074$, $2s\lambda\nu = 2s_2\lambda_2\nu_2 = m_0\sqrt{\Gamma} = 0.021$, $(\lambda\nu)^2 = (\lambda_2\nu_2)^2 = \tau^2\Gamma = 0.18$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.5$. Используя численные методы найти начальные условия $y_1(0) = 6.699$, $\sigma(0) = 0$.

5. Проверить условие 5) теоремы, численно определить значение e, для которого выполняется неравенство

$$\alpha F_1(\sigma)\left(\Gamma\varepsilon_1 + \frac{\Gamma\varepsilon_0}{1 + \tau^2\Gamma F_1^2(\sigma)}\right)^{-1} - F_2(\sigma) \ge e = 0.028.$$

6. Численными методами проверить условие 6) теоремы, определить значение e_1, для которого выполняется неравенство $m_1 - \dfrac{m_0}{1 + \tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)} \ge$ $\ge e_1 = 0.03$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Результаты теоремы позволяют определить в фазовом пространстве системы (47) область, содержащую начальные условия предельного цикла системы (47). Используя соотношения (37), (45) для элементов матриц H_1, H_2, в плоскости $\sigma = 0$ рассмотрим линии

$$L_1 : x^T H_1 x = -F_1^2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}^T (S^{-1})^T H_1 S^{-1}\tilde{x} =$$
$$= -F_1^2(0) \Leftrightarrow 1.144\tilde{x}_1^2 + 2\cdot 0.254\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 0.055\tilde{x}_2^2 =$$
$$= -2.767^2,$$
$$L_2 : x^T H_2 x = F_2^2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}^T (S^{-1})^T H_2 S^{-1}\tilde{x} =$$
$$= F_2^2(0) \Leftrightarrow 1.144\tilde{x}_1^2 + 2\cdot 0.254\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 0.168\tilde{x}_2^2 =$$
$$= 6.699^2,$$
$$L_3 : c^T x = \sqrt{\Gamma}F_1(0) \Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x} = \sqrt{\Gamma}F_1(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 3\cdot 2.767,$$
$$L_4 : c^T x = \sqrt{\Gamma}F_2(0) \Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x} = \sqrt{\Gamma}F_2(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 3\cdot 6.699.$$

На рисунке 1 изображена область Ω_0, ограниченная линиями L_1, L_2, L_3, L_4.

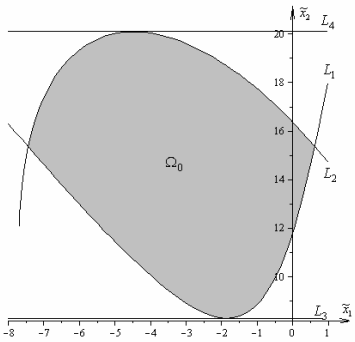

Рис.1. Область начальных условий предельного цикла системы (47)

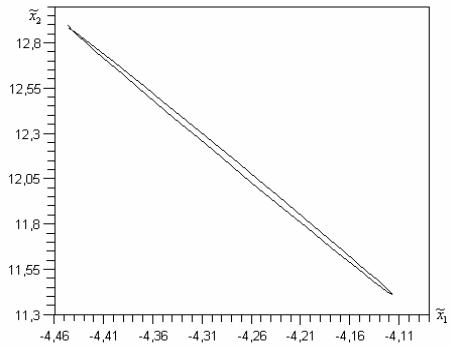

Рис.2. Проекция предельного цикла системы (16) на плоскость $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$

Область Ω_0 содержит начальные условия предельного цикла системы (47). Численными методами показано, что цикл системы (47) определяется начальными условиями $\tilde{x}_1(0) = -4.447$, $\tilde{x}_2(0) = 12.9$, $\sigma(0) = 0$ из области Ω_0. На рисунке 2 изображена проекция цикла системы (47) на плоскость $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шахгильдян В.В. Ляховкин А.А.** Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448 с.
2. **Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.** Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
3. **Шалфеев В.Д.** К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Радиофизика. 1969. Т.12. №7. С.1037-1051.
4. **Пономаренко В.П.** Об устойчивости системы частотной автоподстройки с фильтром второго порядка // Радиотехника и электроника. 1982. Т.27. №1. С.113-116.
5. **Пономаренко В.П., Матросов В.В.** Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки // Радиотехника и электроника. 1997. Т.42. №9. С.1125-1133.
6. **Мамонов С.С.** Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестник Новосиб. гос. ун-та. Серия. Математика, механика, информатика. 2011. Т 11. Вып. 1. С. 70-81.
7. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 368 с.
8. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

Мамонов Сергей Станиславович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,

тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА, С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И ЛОГИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

О.Н. Масина, Е.В. Игонина
Елецкий государственный университет имени И.А.Бунина

STABILITY RESEARCH OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS DESCRIBING MOVEMENT THE INVERTED PENDULUM BY MEANS OF LYAPUNOV'S FUNCTIONS AND LOGIC CONTROLLER

O.N. Masina, E.V. Igonina

Исследована устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение перевернутого маятника на тележке. Для изучения устойчивости синтезирован логический регулятор, построенный с помощью процедуры параллельно распределенного выравнивания. Определена нечеткая функция Ляпунова в виде суммы двух квадратичных функций Ляпунова. Сформулированы условия устойчивости в виде линейных матричных неравенств. Проведена серия модельных расчетов в программе MATLAB.

Ключевые слова: устойчивость, обыкновенные дифференциальные уравнения, перевернутый маятник, функция Ляпунова, логический регулятор, линейные матричные неравенства.

Stability of solutions of ordinary differential equations describing movement the inverted pendulum is researched. For studying of stability the logic controller constructed by means of procedure of parallel distributed compensation is designed. Lyapunov's fuzzy function in the form of the sum of two quadratic functions of Lyapunov is defined. Stability conditions in the form of linear matrix inequalities are formulated. Series of model calculations in the program MATLAB are carried out.

Keywords: stability, ordinary differential equations, inverted pendulum, logic controller, Lyapunov's function, linear matrix inequalities.

Введение. При изучении динамических систем актуальной проблемой является исследование устойчивости дифференциальных уравнений, описывающих движение маятниковых систем [1–6]. Различные виды маятников (простой маятник, перевернутый маятник, связанные маятники) были изучены в работах [1, 2].

Исследование устойчивости маятников проводится как классическими (метод функций Ляпунова), так и современными методами (построение логического регулятора). Достаточные и необходимые условия устойчивости динамических систем получены в работе [7] с помощью обобщенных функций Ляпунова. В статье [8] показана эффективность использования первого и второго методов Ляпунова в сочетании с другими методами для исследования устойчивости перевернутого маятника. Вопросам устойчивости маятниковых систем с помощью построения логического регулятора посвящены работы [8–10] и др.

Эффективным методом изучения устойчивости является построение модели Такаги – Сугено, базирующейся на правилах нечеткого вывода и логических регуляторах [5]. Для исследования устойчивости указанной модели используется функция Ляпунова [5, 8, 10]. Кроме того, анализ устойчивости модели Такаги – Сугено может быть сведен к задачам, решаемым с помощью линейных матричных неравенств [6], которые обеспечивают требуемые свойства функций Ляпунова.

Модель Такаги – Сугено описывается нечеткими правилами вида ЕСЛИ…ТО, которые представляют собой локальные линейные отношения вход–выхода системы [5]. Применяемые правила являются нечеткими только в части ЕСЛИ, тогда как в части ТО содержатся функциональные зависимости в виде диффе-

ренциальных уравнений. В работе [9] исследована устойчивость перевернутого маятника и построена модель Такаги – Сугено.

В настоящей работе с помощью процедуры параллельно распределенного выравнивания (PDC) построен логический регулятор для исследования устойчивости состояния равновесия дифференциальных уравнений перевернутого маятника на тележке. Нечеткая функция Ляпунова представлена в виде набора нескольких квадратичных функций Ляпунова, нахождение которых заключается в вычислении соответствующих положительно определенных матриц. Показано, что достаточные условия устойчивости могут быть сформулированы в терминах допустимости набора линейных матричных неравенств.

1. Модель Такаги – Сугено и PDC-регулятор. Модель Такаги – Сугено задается следующими правилами [6]:

Π_i: ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_{i1} и … и $z_p(t)$ есть M_{ip},

$$\text{ТО}\quad \begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t),\\ &y(t) = C_i x(t),\\ &i = 1, 2, \ldots r, \end{aligned} \tag{1}$$

где $z(t) = (z_1(t), ..., z_p(t))$ – вектор предпосылок, M_{ip} – нечеткое множество, $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u(t) \in R^m$ – входящий вектор, $y(t) \in R^q$ – выходящий вектор, r – число правил, $A_i \in R^{n\times n}$, $B_i \in R^{n\times m}$, $C_i \in R^{q\times n}$. Предполагается, что исходные переменные не являются функциями от входящих переменных $u(t)$. Правая часть в (1) представима в виде

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \tag{2}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t),$$

где $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(z_j(t))$, $h_i(z(t)) = \dfrac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}$,

$M_{ij}(z_j(t))$ – степень принадлежности элемента $z_j(t)$ к множеству M_{ij}.

Так как $\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) > 0, \\ w_i(z(t)) \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., r, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1, \\ h_i(z(t)) \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., r. \end{cases}$$

При изучении устойчивости модели (1) строится логический регулятор, вырабатывающий управление, которое делает состояние равновесия уравнения (2) устойчивым. Для построения логических регуляторов используется понятие параллельно распределенного выравнивания [6]. Процедура параллельно распределенного выравнивания заключается в том, что каждое правило регулятора строится из соответствующего правила модели Такаги – Сугено. Образующийся общий нелинейный логический регулятор представляет собой сочетание отдельных линейных регуляторов. При этом логический регулятор использует те же нечеткие множества, что и модель в исходных частях, и в расчет берется только локальная эффективность каждого правила.

Для модели (1), (2) логический PDC-регулятор описывается следующим образом:

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i x(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} = \\ = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) F_i x(t), \tag{3}$$

где F_i – коэффициенты усиления. Согласно (1)–(3), требуется найти соответствующие значения F_i, обеспечивающие устойчивость состояния равновесия уравнения (2).

2. Условия устойчивости. Приведем определение функции Ляпунова для уравнения вида $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Функция $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, $V(0) = 0$, удовлетворяющая условиям

$$V(x(t)) > 0 \quad \forall x(t) \ne 0,$$
$$\dot{V}(x(t)) < 0 \quad \forall x(t) \ne 0,$$

называется функцией Ляпунова для уравнения $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ [4]. Согласно этому определению нахождение функции Ляпунова заключается в отыскании соответствующей положительно определенной матрицы P.

Подставляя (3) в (2), получим уравнение вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t))\{A_i - B_i F_j\} x(t), \tag{4}$$

которое запишем следующим образом:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))h_i(z(t))G_{ii}x(t) + \\ + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j} h_i(z(t))h_j(z(t))\left\{\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right\}x(t), \quad (5)$$

где $G_{ij} = A_i - B_iF_j$, $G_{ii} = A_i - B_iF_i$.

Достаточные условия устойчивости определяются следующей теоремой.

Теорема 1 [6]. Состояние равновесия уравнения (5) устойчиво, если существует общая положительно определенная матрица P такая, что выполняются неравенства

$$G_{ii}^T PG_{ii} - P < 0,$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P \le 0,$$

$$i<j,\ h_i \cap h_j \ne \varnothing.$$

Если число r правил велико, то нахождение общей матрицы P, удовлетворяющей условиям теоремы 1, является затруднительным. В работе [6] показано, что задачу нахождения общей матрицы P можно решить численно, то есть условия устойчивости в теореме 1 можно выразить в виде линейных матричных неравенств. Тогда задача построения PDC-регулятора для уравнения (2) формулируется следующим образом: найти $X > 0$ и M_i, $i = 1, ..., r$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{pmatrix} \tilde{O} & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ \dot{A}_i X - B_i M_i & \tilde{O} \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} X & D_{ij} \\ D_{ij} & X \end{pmatrix} \ge 0,\ i<j,\ h_i \cap h_j \ne \varnothing,$$

где $D_{ij} = \left(A_iX + A_jX - B_iM_j - B_jM_i\right)/2$, $X = P^{-1}$, $M_i = F_iX$.

В этом случае обратная связь F_i и общая матрица P имеют вид $P = X^{-1}$, $F_i = M_iX^{-1}$, а функция Ляпунова задается формой $V(x(t)) = x(t)X^{-1}x(t)$. Однако даже при использовании линейных матричных неравенств и при увеличении числа правил r затруднен поиск общей для всех подсистем положительно определенной матрицы P. В этом случае эффективным является получение условий устойчивости с использованием нечеткой функции Ляпунова.

Функция $V(x(t)) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))x^T(t)P_ix(t)$, где P_i – положительно определенная матрица, задает нечеткую функцию Ляпунова для уравнения (2), если производная по времени от $V(x(t))$ всегда отрицательна при $x(t) \ne 0$.

Справедливы следующие предложения.

Предложение 1 [4]. Производная по времени функции $h_i(z(t))$ ограничена сверху, то есть

$$\left|\dot{h}_i(z(t))\right| \le \phi_i,\ i = 1, ..., r, \quad (6)$$

где ϕ_i – заданные положительные постоянные.

Предложение 2 [4]. Локальные квадратичные функции Ляпунова $x^T(t)P_ix(t)$, $i = 1, ..., r$, удовлетворяют соотношениям пропорциональности так, что $P_j = \alpha_{ij}P_i$, $i, j = 1, ..., r$, где $\alpha_{ij} \ne 1$ и $\alpha_{ij} > 0$ при $i \ne j$, и $\alpha_{ij} = 1$ при $i = j$.

Теорема 2 [4]. Пусть выполнены условия предложений 1 и 2. Тогда для уравнения (4) можно построить PDC-регулятор (3), если существуют коэффициенты ϕ_ρ, α_{ij}, $i, j, \rho = 1, ..., r$, положительно определенные матрицы $P_1, P_2, \ldots, P_r$ и матрицы $F_1, F_2, \ldots, F_r$ такие, что

$$P_i > 0,\quad i = 1, 2, ..., r, \quad (7)$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \phi_\rho P_\rho + \left(G_{jj}^T P_i + P_i G_{jj}\right) < 0,\quad i, j = 1, 2, \quad (8)$$

$$\left\{\frac{G_{jk}+G_{kj}}{2}\right\}^T P_i + P_i\left\{\frac{G_{jk}+G_{kj}}{2}\right\} < 0, \quad (9)$$

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, ..., r\},\ j < k,$$

где $G_{jk} = A_j - B_jF_k$ и $G_{jj} = A_j - B_jF_j$.

Теорема 2 получена при наличии оценок (6), поэтому возникает необходимость выбора постоянных ϕ_i в этих условиях. Для построения PDC-регулятора будем использовать условия (6), преобразованные к виду линейных матричных неравенств, и условия (7)–(9) теоремы 2.

Теорема 3. Пусть известны $x(0)$ и $z(0)$. Условия (6) выполняются, если существуют положительно определенные матрицы $P_1, P_2, \ldots, P_r$ и матрицы $F_1, F_2, \ldots, F_r$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & P_i^{-1} \end{bmatrix} \ge 0 \qquad i = 1, ..., r,$$

$$\begin{bmatrix} \phi_\rho P_i & W_{ij\rho l}^T \\ W_{ij\rho l} & \phi_\rho I \end{bmatrix} \ge 0 \qquad \forall i, j, \rho \in \{1, 2, ..., r\}, \forall l$$

где $W_{ij\rho\ell} = \xi_{\rho\ell}(A_i - B_iF_j)$.

При построении PDC-регулятора предполагается определение локальных коэффициентов усиления F_i для уравнения (4). Зададим $X_i = P_i^{-1}$, $F_i = M_iX_i^{-1}$, $X_i = \alpha_{ij}X_j$ для $i, j = 1, ..., r$, где $\alpha_{ij} \ne 1$ и $\alpha_{ij} > 0$ при $i \ne j$ и $\alpha_{ij} = 1$ при $i = j$. С учетом $\phi_\rho > 0$ и α_{ij} при $i, j, \rho = 1, ..., r$, получим следующие условия на базе линейных матричных неравенств:

$$X_i > 0, \qquad i = 1, 2, ..., r,$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \phi_\rho X_\rho + X_iA_j^T - \alpha_{ij}\, M_j^T B_j^T + A_jX_i - \alpha_{ij}\, B_jM_j < 0,$$

$$i, j = 1, 2, ..., r,$$

$$X_i A_j^T - \alpha_{ik} M_k^T B_k^T + X_i A_k^T - \alpha_{ij} M_j^T B_k^T +$$

$$+ A_j X_i - \alpha_{ik} B_j M_k + A_k X_i - \alpha_{ij} B_k M_j < 0$$

для каждых заданных $i, j, k \in \{1, 2, ..., r\}$ таких, что $j < k$,

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, ..., r,$$

$$\begin{bmatrix} \phi_\rho X_i & W_{ij\rho l}^T \\ W_{ij\rho l} & \phi_\rho I \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i, j, \rho \in \{1, 2, ..., r\}, \forall l,$$

где $W_{ij\rho\ell} = \xi_{\rho\ell}(A_i X_i - \alpha_{ij} B_i M_j)$.

3. Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений перевернутого маятника. Дифференциальные уравнения движения перевернутого маятника на тележке имеют вид [6]:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g\sin(x_1(t)) - \dfrac{amlx_2^2(t)\sin(2x_1(t))}{2}}{4l/3 - aml\cos^2(x_1(t))} - \frac{a\cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml\cos^2(x_1(t))}, \quad (10)$$

где $x_1(t)$ – угол (в радианах) отклонения маятника от вертикальной оси, $x_2(t)$ – угловая скорость, $g = 9{,}8$ м/с^2 – гравитационная постоянная, m – масса маятника, M – масса тележки, $2l$ – длина маятника, u – сила (в Ньютонах), прикладываемая к тележке, $a = \dfrac{1}{m+M}$. Задача заключается в необходимости постоянно сохранять желаемое вертикальное положение маятника.

Отметим, что в работе [9] для решения этой задачи построена модель Такаги – Сугено, состоящая из 16 правил. С помощью процедуры параллельно распределенного выравнивания число правил в настоящей работе уменьшено до двух. Модель Такаги – Сугено в этом случае задается следующим образом:

П$_1$: ЕСЛИ $x_1(t)$ приблизительно равно 0,
ТО $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$;

П$_2$: ЕСЛИ $x_1(t)$ приблизительно равно $\pm\pi/2\left(|x_1| < \pi/2\right)$, ТО $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$,

где $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{\pi\left(4l/3 - aml\beta^2\right)} & 0 \end{bmatrix}$,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix},$$

$$\beta = \cos 88^0,$$

тогда как PDC-регулятор определяется следующими правилами:

П$_1$: ЕСЛИ $x_1(t)$ приблизительно равно 0,
ТО $u(t) = F_1 x(t)$;

П$_2$: ЕСЛИ $x_1(t)$ приблизительно равно $\pm\pi/2\left(|x_1| < \pi/2\right)$, ТО $u(t) = -F_2 x(t)$.

Применим изложенную в разделе 2 настоящей статьи теорию к уравнениям перевернутого маятника. В соответствии с этой теорией нечеткая функция Ляпунова для уравнений (10) имеет вид

$$V(x(t)) = h_1\left(x_1(t)\right)x^T(t)P_1 x(t) + h_2\left(x_2(t)\right)x^T(t)P_2 x(t),$$

где P_1, P_2 – положительно определенные матрицы, при этом предполагаем, что выполняются следующие допущения:

1) $\left|\dot{h}_1(x_1(t))\right| \leq \phi_1$ и $\left|\dot{h}_2(x_2(t))\right| \leq \phi_2$, где ϕ_1, ϕ_2 – положительные постоянные;

2) локальные квадратичные функции Ляпунова $x^T(t)P_1x(t)$ и $x^T(t)P_2x(t)$ удовлетворяют соотношениям пропорциональности $P_1 = \alpha_{21}P_2$, $P_2 = \alpha_{12}P_1$, где $\alpha_{21} > 0$, $\alpha_{12} > 0$.

Тогда по теореме 2 для уравнений (10) можно построить PDC-регулятор, если существуют коэффициенты ϕ_1, ϕ_2, α_{12}, α_{21}, положительно определенные матрицы P_1, P_2 и матрицы F_1, F_2 такие, что

$$\phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \left(G_{11}^T P_1 + P_1 G_{11}\right) + \left(G_{22}^T P_2 + P_2 G_{22}\right) < 0,$$

$$\left\{\frac{G_{12} + G_{21}}{2}\right\}^T P_1 + P_1\left\{\frac{G_{12} + G_{21}}{2}\right\} + \left\{\frac{G_{12} + G_{21}}{2}\right\}^T P_2 + P_2\left\{\frac{G_{12} + G_{21}}{2}\right\} < 0,$$

где $G_{12} = A_1 - B_1F_2$ и $G_{11} = A_1 - B_1F_1$, $G_{22} = A_2 - B_2F_2$.

Зададим $X_1 = P_1^{-1}$, $X_2 = P_2^{-1}$, $F_1 = M_1X_1^{-1}$, $F_2 = M_2X_2^{-1}$, $X_1 = \alpha_{12}X_2$, $X_2 = \alpha_{21}X_1$. По теореме 3 и с учетом $\phi_1 > 0$, $\phi_2 > 0$ и коэффициентов $\alpha_{21} > 0$, $\alpha_{12} > 0$, получим следующие условия на базе линейных матричных неравенств:

$$X_1 > 0, X_2 > 0,$$

$$\phi_1 X_1 + \phi_2 X_2 + X_1 A_2^T - \alpha_{12} M_2^T B_2^T + A_2 X_1 - \alpha_{12} B_2 M_2 < 0,$$

$$\phi_1 X_1 + \phi_2 X_2 + X_2 A_1^T - \alpha_{21} M_1^T B_1^T + A_1 X_2 - \alpha_{21} B_1 M_1 < 0,$$

$$X_1 A_2^T - \alpha_{12} M_2^T B_2^T + X_1 A_2^T - \alpha_{12} M_2^T B_2^T + A_2 X_1 - \alpha_{12} B_2 M_2 + A_2 X_1 - \alpha_{12} B_2 M_2 < 0,$$

$$X_2 A_1^T - \alpha_{21} M_1^T B_1^T + X_2 A_1^T - \alpha_{21} M_1^T B_1^T + A_1 X_2 - \alpha_{21} B_1 M_1 + A_k X_2 - \alpha_{21} B_1 M_1 < 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X_2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1211}^T \\ W_{1211} & \phi_1 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2111}^T \\ W_{2111} & \phi_2 I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2112}^T \\ W_{2112} & \phi_2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1212}^T \\ W_{1212} & \phi_1 I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1221}^T \\ W_{1221} & \phi_1 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2121}^T \\ W_{2121} & \phi_2 I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 X_1 & W_{1222}^T \\ W_{1222} & \phi_1 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_2 X_2 & W_{2122}^T \\ W_{2122} & \phi_2 I \end{bmatrix} \geq 0,$$

где

$$W_{1211} = \xi_{11}(A_1X_1 - \alpha_{12}B_1M_2),$$
$$W_{2111} = \xi_{11}(A_2X_2 - \alpha_{21}B_2M_1),$$
$$W_{2112} = \xi_{12}(A_2X_2 - \alpha_{21}B_2M_1),$$
$$W_{1212} = \xi_{12}(A_1X_1 - \alpha_{12}B_1M_2),$$
$$W_{1221} = \xi_{21}(A_1X_1 - \alpha_{12}B_1M_2),$$
$$W_{2121} = \xi_{21}(A_2X_2 - \alpha_{21}B_2M_1),$$
$$W_{1222} = \xi_{22}(A_1X_1 - \alpha_{12}B_1M_2),$$
$$W_{2122} = \xi_{22}(A_2X_2 - \alpha_{21}B_2M_1).$$

Если для различных начальных условий $x(0)$ существуют положительно определенные матрицы P_1, P_2, F_1, F_2, постоянные $\phi_1 > 0$, $\phi_2 > 0$, $\alpha_{21} > 0$, $\alpha_{12} > 0$ и коэффициенты ξ_{11}, ξ_{12}, ξ_{21}, ξ_{22}, то для уравнений (10) можно построить соответствующий PDC-регулятор в виде $u(t) = -h_1(x_1(t))F_1x(t) - -h_2(x_2(t))F_2x(t)$, где h_1 и h_2 – функции принадлежности для правил Π_1 и Π_2 соответственно и $h_1+h_2=1$.

Для нахождения матриц P_1, P_2, F_1, F_2, постоянных ϕ_1, ϕ_2, α_{21}, α_{12} и коэффициентов ξ_{11}, ξ_{12}, ξ_{21}, ξ_{22} проведена серия модельных расчетов в системе компьютерной математики MATLAB. В частности, получено, что при значениях параметров $m = 2$ *кг*, $M = 8$ *кг*, $2l = 1$ *м* устойчивое вертикальное положение маятника достигается при $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $x_2 = 0$, если $\alpha_{12} = 1{,}3$, $\alpha_2 = 1/\alpha_{12}$, $\phi_1 = \phi_2 = \pi/1{,}5$, $\xi_{11} = -2/\pi$, $\xi_{12} = 2/\pi$, $\xi_{21} = -2/\pi$, $\xi_{22} = 2/\pi$. Для начальных условий вида $x(0) = [\pi/6 \quad 0]^T$, $x(0) = [\pi/4 \quad 0]^T$ и $x(0) = [\pi/3 \quad 0]^T$ найдены соответствующие матрицы P_1, P_2, F_1 и F_2.

Модельные расчеты показали, что для каждого начального условия существуют такие положительно определенные матрицы, при которых для уравнений (10) можно построить PDC-регулятор.

Результаты, полученные в настоящей статье, являются продолжением работ [9, 10] и могут быть использованы в задачах исследования устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамические системы.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ №13-08-00710-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Барбашин Е.А., Табуева В.А.** Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
2. **Бакаев Ю.Н**. Приближенное интегрирование дифференциального уравнения маятника // ПММ. №6. 1952.
3. **Формальский А. М**. Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании // ПММ. 2006. Т. 70. № 1. С. 62–71.
4. **Abdelmalek I., Golea N., Hadjili M**. A new fuzzy Lyapunov approach to non-quadratic stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy models // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. Vol. 17. № 1. P. 39–51.
5. **Takagi T., Sugeno M**. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cyber. 1985. Vol. 15. P. 116–132.
6. **Tanaka K., Wang H.O.** Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. N.Y.: Wiley, 2001.
7. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.
8. **Масина О.Н., Дружинина О.В.** Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.
9. **Игонина Е.В., Пирожок А.А.** Синтез и устойчивость системы управления перевернутым маятником // Тр. Ин-та системного анализа РАН. Динамика неоднород-ных систем. 2010.Т.53(3) С. 47–52.
10. **Игонина Е.В., Масина О.Н., Мухин А.В.** Анализ устойчивости и стабилизации системы управления перевернутым маятником с помощью функций Ляпунова и регулятора Такаги – Сугено // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2012. Вып. 14. С. 135–144.

Масина Ольга Николаевна, д. ф.-м наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления и математического обеспечения Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28
тел.: +7 (47467) 6-92-71, e-mail: olga121@inbox.ru

УДК 517.938

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.Т. Терёхин
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE CONTROLLABILITY OF LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIOWS WITH VARIBLE COEFFICIENTS

M.T. Teryokhin

Для линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами исследуется проблема управляемости без непосредственного использования фундаментальной матрицы линейной однородной системы. Определены условия разрешимости двухточечной краевой задачи со свободными концами (следовательно, условия вполне управляемости линейной системы).

Ключевые слова: допустимое управление, метод последовательных приближений, вектор-функция, определенно-положительная матрица (форма), ранг, минор.

It is investigated the problem of controllability of the linear system of differential equations with variable coefficients without the fundamental matrix of linear homogeneous system. It is defined conditions of solvability of two-point boundary value with free the endpoints (therefore conditions of fully controllability of linear system).

Keywords: admissible control, method of successive approximations, vector function, definite positive matrix (form), rank, minor.

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,, \qquad (1)$$

в которой $A(t)$, $B(t)$ – матрицы размерности соответственно $n \times n$, $n \times m$, $n \times n$, $m \le n$, кусочно-непрерывные на любом сегменте, принадлежащем интервалу $(-\infty, \infty)$, x – n-мерный вектор, u – m-мерный вектор-управление.

Пусть $x_0 \in R$, $x_1 \in R_n$ – произвольные, но фиксированные векторы, R_n – n-мерное евклидово пространство.

Определение 1. Управление u_0, при котором система (1) имеет решение, называется допустимым управлением.

Решение $x(t)$ системы (1) при допустимом управлении u_0 назовем решением, соответствующим управлению u_0.

Определение 2. Система (1) называется управляемой в точках x_0, x_1, если существует сегмент $[t_0, t_1]$ $(t_0 < t_1)$ и допустимое управление, заданное на сегменте $[t_0, t_1]$, при котором решение $x(t)$ системы (1) определено на сегменте $[t_0, t_1]$ и удовлетворяет краевым условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Система (1) называется вполне управляемой, если она управляемая в любых точках $x_0 \in R$, $x_1 \in R_n$.

Проблема управляемости системы (1) рассматривалась в работах [1–4]. Особый интерес представляет исследование проблемы управляемости системы (1) при условии, что неизвестен явный вид фундаментальной матрицы системы $\dot{x} = A(t)x$.

В статье ставится задача: найти условия управляемости системы (1) в точках x_0, x_1 без непосредственного использования фундаментальной матрицы системы $\dot{x} = A(t)x$. Для решения поставленной задачи используются в том числе и методы, предложенные в работах [5–8].

Выберем произвольный, но фиксированный сегмент $[t_0, t_1]$ $(t_0 < t_1)$. Для определенности, положим, $n = m$, в противном случае заменой переменных $u = C(t)v$, $C(t) - m \times n$-кусочно-непрерывная на сегменте $[t_0, t_1]$ матрица, систему (1) преобразуем в систему, в которой $B(t)C(t)$ – матрица размерности $n \times n$.

Введем следующие обозначения:

$$T = [t_0, t_1],\ |x(\circ)|_{T^*} = \sup_{T^*} |x(t)|,$$

$$\|P(\circ)\|_{T^*} = \sup_{T^*} \max_{|z|\le 1} |P(t)z|,$$

матрица $P(t)$ и вектор-функция $x(t)$ кусочно-непрерывные на сегменте $T^* \subseteq T$, $H(\gamma) = \{u \in \in R_n : |u| \le \gamma\}$, $\gamma > 0$ – некоторое число (далее для простоты записи, положим, $|x(\circ)|_T = |x(\circ)|$, $\|P(\circ)\|_T = \|P(\circ)\|$).

§1. Существование постоянного управления

Очевидно, что в пространстве R_n выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} (|A(t)(x^* - x)| + |B(t)(u^* - u)|)dt \le \le \alpha |x^* - x| + \beta |u^* - u|, \quad (2)$$

в котором $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – некоторые числа.

Предположим, что матрица $B(t)$ такова, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (B(t)(u^* - u), u^* - u)dt \ge \varepsilon |u^* - u|^2, \quad (3)$$

$\varepsilon > 0$ – некоторое число.

Лемма. Пусть в пространстве R_n выполнено неравенство (3). Тогда для любой вектор-функции $x(t)$, определенной и непрерывной на сегменте T, существует число $\gamma > 0$ и единственный вектор $\bar{u} \in H(\gamma)$, удовлетворяющий равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} (A(t)x(t) + B(t)\bar{u})dt = x_1 - x_0.$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ – произвольная, но фиксированная вектор-функция, определенная и непрерывная на сегменте T. Число $\gamma > 0$ выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$|x_1 - x_0| + \alpha |x(\circ)| < \gamma\varepsilon. \quad (4)$$

В пространстве R_n определим вектор-функцию $F(u) = \int_{t_0}^{t_1} (A(t)x(t) + B(t)u)dt + x_0 - x_1$. Непосредственно из определения вектор-функции $F(u)$ следует, что выполнены неравенства

$$|F(u^*) - F(u)| \le \beta |u^* - u|, \quad (5)$$

$$(F(u^*) - F(u), u^* - u) \ge \varepsilon |u^* - u|^2. \quad (6)$$

Оператор Φ определим равенством $\Phi(u) = u - -mF(u)$, $m > 0$ – число [9]. Докажем, что оператор Φ на множестве $H(\gamma)$ является оператором сжатия для любого числа $m \in (0, \frac{2\varepsilon}{\beta^2})$. Действительно, для любых $u_1 \in H(\gamma), u_2 \in H(\gamma)$

$$|\Phi u_1 - \Phi u_2|^2 = (\Phi u_1 - \Phi u_2, \Phi u_1 - \Phi u_2) = (u_1 - u_2 - -m(F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2 - m(F(u_1) - F(u_2)) \le \le |u_1 - u_2|^2 + m^2\beta^2 |u_1 - u_2|^2 - 2m\varepsilon |u_1 - u_2|^2 = = |u_1 - u_2|^2 (m^2\beta^2 - 2m\varepsilon + 1)$$

согласно неравенствам (5) и (6).

Непосредственно вычислением устанавливаем, что если $\varepsilon \le \beta$, то при любом m $m^2\beta^2 - 2m\varepsilon + 1 \ge 0$. Справедливость неравенства $\varepsilon \le \beta$ следует из того, что согласно неравенствам (5), (6) и Коши – Буняковского

$$\varepsilon |u_1 - u_2|^2 \le (F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2) \le \le |F(u_1) - F(u_2)| \cdot |u_1 - u_2| \le \beta |u_1 - u_2|^2.$$

Таким образом, для любого числа $m > 0$ существует число $\nu \ge 0$, удовлетворяющее равенству $\nu^2 = m^2\beta^2 - 2m\varepsilon + 1$. Отсюда

$$|\Phi u_1 - \Phi u_2| \le \nu |u_1 - u_2|.$$

Очевидно, что при любом $m \in (0, \frac{2\varepsilon}{\beta^2})$ $m^2\beta^2 - - 2m\varepsilon + 1 < 1$, то есть $\nu \in [0,1)$. Это значит, что оператор Φ при любом $m \in (0, \frac{2\varepsilon}{\beta^2})$ – оператор сжатия на множестве $H(\gamma)$. Убедимся, что число $m > 0$ можно выбрать так, что оператор Φ множество $H(\gamma)$ будет отображать в себя. С этой целью заметим, что так как для любого числа $m \in (0, \frac{2\varepsilon}{\beta^2})$ оператор Φ сжимающий, то для любого $u \in H(\gamma)$ $|\Phi u| \le |\Phi u - \Phi 0| + |\Phi 0| \le \nu |u| + + |\Phi 0|$. Учитывая, что $\Phi 0 = -mF(0)$, получим $|\Phi u| \le \nu |u| + m|F(0)|$.

Заметим, что

$$\lim_{m\to 0} \frac{m}{1-\nu} = \lim_{m\to 0} \frac{m}{1 - \sqrt{m^2\beta^2 - 2m\varepsilon + 1}} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда $\lim \frac{mF(\circ)}{1-\nu} = \frac{F(\circ)}{\varepsilon}$.

Согласно неравенству (4) и тому, что $F(0) = = \int_{t_0}^{t_1} A(t)x(t)dt + x_0 - x_1$, получим $\frac{|F(0)|}{\varepsilon} \le \frac{1}{\varepsilon}(|x_1 - -x_0| + \alpha |x(\circ)|) < \gamma$. Это значит, что

$$\lim_{m\to 0} \frac{m|F(0)|}{1-\nu} < \gamma.$$

Следовательно, существует число $m^* \in (0, \frac{2\varepsilon}{\beta^2})$ такое, что для любого числа $m \in (0, m^*)$ выполнено неравенство $\frac{m|F(0)|}{1-\nu} < \gamma$, то есть $m|F(0)| < < \gamma(1-\nu)$. Поэтому при любом фиксированном

$m \in (0, m^*)$ и любом $u \in H(\gamma)$ $|\Phi u| \le \nu |u| + m|F(0)| < \gamma$. По теореме Банаха во множестве $H(\gamma)$ существует единственный вектор u^*, удовлетворяющий равенству $\Phi u^* = u^* u$, следовательно, равенству

$$F(u^*) = \int_{t_0}^{t_1} (A(t)x(t) + B(t)u^*)dt + \\ + x_0 - x_1 = 0. \qquad (*)$$

Убедимся, что u^* – единственный вектор, принадлежащий множеству $H(\gamma)$ и удовлетворяющий равенству (*).

Пусть вопреки утверждению существуют по крайней два вектора $u_1 \in H(\gamma)$, $u_2 \in H(\gamma)$, $u_1 \ne u_2$ такие, что $F(u_1) = F(u_2) = 0$. Это значит, что $\Phi u_1 = u_1 - mF(u_1)$, $\Phi u_2 = u_2 - mF(u_2)$ при любом $m \in (0, m^*)$, то есть оператор Φ на множестве $H(\gamma)$ при любом $m \in (0, m^*)$ имеет по крайней мере две неподвижные точки, что невозможно.

Лемма доказана.

Следствие. Если выполнено неравенство (3), то $\det \int_{t_0}^{t_1} B(t)dt \ne 0$.

Пусть $x_0(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0)$, X – множество вектор-функций $x(t)$, определенных, непрерывных на сегменте T и удовлетворяющих краевым условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, и пусть $\overline{O}(p) = \{x(t) \in X : \max_T |x(t) - x_0(t)| \le p\}$, $p > 0$ – некоторое число.

Числа q, l определим соответственно равенствами $q = \alpha(1 + \frac{\beta}{\varepsilon})$,

$$l = \frac{1}{1-q}(|x_1 - x_0| + \alpha |x_0(\circ)| + \beta\gamma), \ q \ne 1.$$

Теорема 1. Если $q < 1$, выполнены неравенства (3) и

$$|x_1 - x_0| + \alpha \max_{\overline{O}(l)} |x(\circ)| < \varepsilon\gamma, \qquad (7)$$

то существует единственный вектор $u^* \in H(\gamma)$, при котором соответствующее ему решение $x^*(t)$ системы (1), определенное на сегменте T, удовлетворяет условиям $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t_1) = x_1$, $x^*(t) \in \overline{O}(l)$, то есть система (1) управляемая в точках x_0, x_1.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем методом последовательных приближений. Из неравенства (7) и того, что $x_0(t) \in \overline{O}(l)$, следует, что для вектор-функции $x_0(t)$ выполнено неравенство (4). Тогда, проводя доказательство леммы для вектор-функции $x_0(t)$, получим, что существует единственный вектор $u_0 \in H(\gamma)$, удовлетворяющий равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} (A(t)x_0(t) + B(t)u_0)dt = x_1 - x_0.$$

Первое приближение $x_1(t)$ определим равенством

$$x_1(t) = \int_{t_0}^{t} (A(\xi)x_0(\xi) + B(\xi)u_0)d\xi + x_0,$$

$x_1(t_0) = x_0$, $x_1(t_1) = x_1$. Убедимся, что $x_1(t) \in \overline{O}(l)$. Действительно, пусть

$$p_1 = \max_T |x_1(t) - x_0(t)|.$$

Тогда

$$p_1 = \max_T \left| \int_{t_0}^{t} (A(\xi)x_0(\xi) + B(\xi)u_0)d\xi - \right. \\ \left. - \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) \right| \le \alpha |x_0(\circ)| + \beta\gamma + |x_1 - x_0| \le \\ \le l(1-q) < l.$$

Из того, что $x_1(t) \in \overline{O}(l)$, следует, что для вектор-функции $x_1(t)$ выполнено неравенство (7) и, следовательно, неравенство (4). На основании леммы получим, что существует единственный вектор $u_1 \in H(\gamma)$, удовлетворяющий равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} [A(t)x_1(t) + B(t)u_1]dt = x_1 - x_0.$$

Второе приближение определим равенством

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\xi)x_1(\xi) + B(\xi)u_1]d\xi, \ x_2(t_0) = x_0,$$

$x_2(t_1) = x_1$. Убедимся, что $x_2(t) \in \overline{O}(l)$.

Пусть

$$p_2 = \max_T |x_2(t) - x_1(t)| = \max_T \left| \int_{t_0}^{t} (A(\xi)x_1(\xi) + \right. \\ \left. + B(\xi)u_1 - A(\xi)x_0(\xi) - B(\xi)u_0)d\xi \right| \le \int_{t_0}^{t_1} (|A(t)(x_1(t) - \\ - x_0(t)| + |B(t)(u_1 - u_0)|)dt \le \alpha p_1 + \beta |u_1 - u_0|.$$

Поскольку при любом $i \in \{0,1\}$ $\int_{t_0}^{t_1} (A(t)x_i(t) + B(t)u_i)dt + x_0 - x_1 = 0$, то

$$\int_{t_0}^{t_1}(A(t)x_1(t)+B(t)u_1-A(t)x_0(t)-$$
$$-B(t)u_0,u_1-u_0)dt=0$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1}(B(t)(u_1-u_0),u_1-u_0)dt=$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}(A(t)(x_1(t)-x_0(t_1),u_1-u_0)dt.$$

Тогда на основании неравенств (3) и Коши – Буняковского

$$\varepsilon\,|u_1-u_0|^2\le\int_{t_0}^{t_1}(B(t)(u_1-u_0),u_1-u_0)dt\le$$
$$\le\int_{t_0}^{t_1}|(A(t)(x_1(t)-x_0(t),u_1-u_0)|\,dt\le u_1-u_0)|\,dt\le$$
$$\le\alpha\max_t|x_1(t)-x_0(t)||u_1-u_0|\le\alpha p_1|u_1-u_0|.$$

Это значит, что $|u_1-u_0|\le\frac{\alpha}{\varepsilon}p_1$ и $p_2\le\alpha p_1+$ $+\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}p_1=qp_1$. Поэтому, учитывая, что $p_1\le l(1-$ $-q)$, получим $|x_2(t)-x_0(t)|\le|x_2(t)-x_1(t)|+$ $+|x_1(t)-x_0(t)|\le p_1+qp_1<\frac{p_1}{1-q}\le1$ при любом $t\in T$, то есть $x_2(t)\in$ $\in\overline{O}(l)$. Это значит, что для вектор-функции $x_2(t)$ выполнено неравенство (7) и, следовательно, неравенство (4). Согласно лемме существует единственный вектор $u_2\in H(\gamma)$, удовлетворяющий равенству

$$\int_{t_0}^{t_1}(A(t)x_2(t)+B(t)u_2)dt=x_1-x_0.$$

Третье приближение $x_3(t)$ определим равенством $x_3(t)=x_0+\int_{t_0}^{t_1}(A(\xi)x_2(\xi)+B(\xi)u_2)dt$, $x_3(t_0)=$ $=x_0$, $x_3(t_1)=x_1$. Аналогично устанавливаем, что $p_3=\max_T|x_3(t)-x_2(t)|\le\alpha p_2+\beta|u_2-u_1|$, $|u_2-$ $-u_1|\le\frac{\alpha}{\varepsilon}p_2\le\frac{\alpha}{\varepsilon}qp_1$. Отсюда $p_3\le\alpha(1+\frac{\beta}{\varepsilon})p_2=$ $=qp_2\le q^2p_1$. Поэтому с учетом того, что $p_1\le$ $\le l(1-q)$, получим $|x_3(t)-x_0(t)|\le|x_3(t)-x_2(t)|+$ $+|x_2(t)-x_1(t)|+|x_1(t)-x_0(t)|<\frac{p_1}{1-q}\le l$, то есть $x_3(t)\in\overline{O}(l)$. Это значит, что для вектор-функции $x_3(t)$ выполнено неравенство (7) и, следовательно, неравенство (4). Согласно лемме существует единственный вектор $u_3\in H(\gamma)$, удовлетворяющий равенству $\int_{t_0}^{t_1}(A(t)x_3(t)+B(t)u_3)dt=x_1-x_0$.

Продолжая этот процесс неограниченно, устанавливаем, что при любом n приближение $x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}(A(\xi)x_{n-1}(\xi)+B(\xi)u_{n-1})dt$ удовлетворяет соотношениям $x_n(t_0)=x_0$, $x_n(t_1)=x_1$, $p_n=\max_T|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\le qp_{n-1}\le q^{n-1}p_1$, $|u_{n-1}-$ $-u_{n-2}|\le\frac{\alpha}{\varepsilon}p_{n-1}\le\frac{\alpha}{\varepsilon}q^{n-2}p_1$, $|x_n(t)-x_0(t)|\le$ $\le|x_n(t)-x_{n-1}(t)|+\ldots+|x_1(t)-x_0(t)|\le p_1(1+q+$ $+\ldots+q^{n-1})<\frac{p_1}{1-q}\le l$ при любом $t\in T$, то есть $x_n(t)\in\overline{O}(l)$. Таким образом, для вектор-функции $x_n(t)$ выполнено неравенство (7) и, следовательно, неравенство (4). Согласно лемме существует один единственный вектор $u_n\in H(\gamma)$, удовлетворяющий равенству $\int_{t_0}^{t_1}(A(t)x_n(t)+B(t)u_n)dt=x_1-$ $-x_0$. В результате получили такие последовательности $(x_n(t))$, (u_n), что при любом n $x_n(t)\in\overline{O}(l)$, $|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\le q^{n-1}p_1$, $x_n(t_0)=$ $=x_0$, $x_n(t_1)=x_1$, $|u_n-u_{n-1}|\le\frac{\alpha}{\varepsilon}q^{n-1}p_1$, $u_n\in H(\gamma)$. Следовательно, сходится ряд u_1+ $+\sum_{n=2}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ и равномерно на множестве T сходится ряд $x_1(t)+\sum_{n=2}^{\infty}(x_n(t)-x_{n-1}(t))$. Это значит, что сходится последовательность (u_n) и равномерно на множестве T сходится последовательность $(x_n(t))$.

Пусть $\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x^*(t)$ (вектор-функция $x^*(t)$ определена и непрерывна на множестве T), $\lim_{n\to\infty}u_n=u^*$. Тогда из того, что

$$x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t_1}(A(\xi)x_{n-1}(\xi)+B(\xi)u_{n-1})d\xi,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(A(t)x_{n-1}(t)+B(t)u_{n-1})dt=x_1-x_0,$$

$u_n\in H(\gamma)$, следует, что

$$x^*(t_0)=x_0, x^*(t_1)=x_1, u^*\in H(\gamma),$$
$$x^*(t)=\int_{t_0}^{t}(A(\xi)x^*(\xi)+B(\xi)u^*)dt+x_0,$$
$$\int_{t_0}^{t_1}(A(t)x^*(t)+B(t)u^*)dt=x_1-x_0, \qquad (8)$$
$$x^*(t)\in\overline{O}(l).$$

Это значит, что $\dot{x}^*(t)=A(t)x^*(t)+B(t)u^*$ при любом $t\in T$, то есть $x^*(t)$ – решение системы (1), определенное на множестве T, соответствующее управлению u^*.

Убедимся, что $(x^*(t),u^*)$ – единственная пара, в которой $x^*(t)$ – решение системы (1), определенное на множестве T, соответствующее управлению u^* и удовлетворяющее соотношениям (8). Пусть вопреки утверждению для любого $j\in\{1,2\}$ существует постоянный вектор $u_j\in\in H(\gamma)$, $u_1^*\neq u_2^*$, такой, что соответствующее ему решение $x_j^*(t)$ системы (1) определено на множестве T и удовлетворяет соотношениям (8). Учитывая, что $\int_{t_0}^{t_1}(A(t)x_1^*(t)+B(t)u_1^*-A(t)x_2^*(t)-$ $-B(t)u_2^*,u_1^*-u_2^*)dt=0$, согласно неравенствам (3) и Коши – Буняковского получим:

$$\varepsilon|u_1^*-u_2^*|^2\le\int_{t_1}^{t_2}(B(t)(u_1^*-u_2^*),u_1^*-u_2^*)dt\le$$
$$\le\int_{t_1}^{t_2}|(A(t)(x_1^*(t)-x_2^*(t),u_1^*-u_2^*)|dt\le$$
$$\le\alpha\max_T|x_1^*(t)-x_2^*(t)||u_1^*-u_2^*|$$

и, следовательно, $|u_1^*-u_2^*|\le\frac{\alpha}{\varepsilon}\max_T|x_1^*(t)-x_2^*(t)|$.

С другой стороны, при любом $t\in T$ $|x_1^*(t)-$ $-x_2^*(t)|\le\int_{t_0}^{t_1}|A(t)(x_1^*(t)-x_2^*(t))+B(t)(u_1^*-u_2^*)|dt\le$

$\le\alpha\max_T|x_1^*(t)-x_2^*(t)|+\beta|u_1^*-u_2^*|\le\alpha(1+\frac{\beta}{\varepsilon})\times$ $\times\max_T|x_1^*(t)-x_2^*(t)|=q\max_T|x_1^*(t)-x_2^*(t)|$, что возможно только при $x_1^*(t)-x_2^*(t)\equiv0$ на множестве T, но тогда и $u_1^*=u_2^*$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Отметим, что в лемме и теореме 1 величины t_0, t_1, x_0, x_1 существенной роли не играют. Поэтому далее для простоты рассуждений будем полагать, что на сегменте $[t_0,t_1]$ матрицы $A(t)$, $B(t)$ непрерывны. В противном случае при условии, что любая из точек $m_0=$ $=t_0<m_1<m_2<...<m_{10}=t_1$ – точка разрыва хотя бы одной из матриц $A(t)$, $B(t)$, доказательства леммы, теоремы 1 и последующих теорем проведем при любом $j\in\{1,2,...,\omega\}$ для сегмента $[m_{j-1},m_j]$, на котором матрицы $A(t)$, $B(t)$ непрерывны (значениями матриц $A(t)$, $B(t)$ в точке $t=m_{j-1}$ являются $A(m_{j-1})$, $B(m_{j-1})$, в точке m_j – их пределы слева), $x_0=x_0(m_{j-1})$, $x_1=x_0(m_j)$.

Замечание. Из неравенства (7) следует, что число $\gamma>0$ в общем случае не может быть произвольным, оно входит также и в определение множества $\overline{O}(l)$.

Определим условия существования числа γ, удовлетворяющего неравенству (7).

Пусть $R=[r_0,r_1]$, $r_0<r_1$ – некоторые числа, y_0, y_1 – точки пространства R_n, α_R, β_R, ε_R – произвольные числа, удовлетворяющие неравенству $q_R=\alpha_R(1+\frac{\beta_R}{\varepsilon_R})<1$, $x_0(t)$ – некоторая вектор-функция, определенная, непрерывная на сегменте R, удовлетворяющая краевым условиям $x_0(r_0)=y_0$, $x_1(r_1)=y_1$, $x(t)$ – вектор-функция, определенная и непрерывная на сегменте R, $|x(\circ)|_R=\max_R|x(t)|$, l_R – число, определяемое равенством

$$l_R=\frac{1}{1-q_R}(|y_1-y_0|+\alpha_R|x_0(\circ)|_R+\beta_R\gamma),$$

$\gamma>0$ – число, $X(R)$ – множество вектор-функций $x(t)$, определенных, непрерывных на сегменте R и удовлетворяющих краевым условиям $x_0(r_0)=y_0$, $x_1(r_1)=y_1$, $\overline{O}(l_R)=\{x(t)\in X(R):$ $\max_R|x(t)-x_0(t)|\le l_R\}$.

Найдем условие существования числа γ, удовлетворяющего неравенству

$$|y_1-y_0|+\alpha_R\max_{\overline{O}(l_R)}|x(\circ)|_R<\varepsilon_R\gamma. \qquad (**)$$

Учитывая, что $|y_1-y_0|+\alpha_R\max_{\overline{O}(l_R)}|x(\circ)|_R=$

$=|y_1-y_0|+\alpha_R\max_{\overline{O}(l_R)}\max_R|x(t)-x_0(t)+x_0(t)|\le$

$\le|y_1-y_0|+\alpha_R(|x_0(\circ)|_R+l_R)=|y_1-y_0|+$

$+\alpha_R[|x_0(\circ)|_R+\frac{1}{1-q_R}(|y_1-y_0|+\alpha_R|x_0(\circ)|_R+$

$+\beta_R\gamma)] = \frac{1}{1-q_R}[(1-q_R+\alpha_R)(|y_1-y_0|+\beta_R\gamma\alpha_R+$ $+\alpha_R|x_0(\circ)|_R)]$, получим число γ, которое удовлетворяет неравенству (**), если оно удовлетворяет оценке $(1-q_R+\alpha_R)(|y_1-y_0|+\alpha_R|x_0(\circ)|_R) <$ $<[(1-q_R)\varepsilon_R-\alpha_R\beta_R]\gamma$. Для этого достаточно выполнения условия $(1-q_R)\varepsilon_R-\alpha_R\beta_R =$ $=(1-\alpha_R-\frac{\alpha_R\beta_R}{\varepsilon_R})\varepsilon_R-\beta_R\alpha_R=(1-\alpha_R)\varepsilon_R-2\alpha_R\beta_R=$ $=\varepsilon_R-\alpha_R(\varepsilon_R+2\beta_R)>0$ или, что все равно, выполнения неравенства $0<\alpha_R<\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_R+2\beta_R}$.

Так как $0<\alpha_R<\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_R+\beta_R}$, то $q_R<1$. Следовательно, если $0<\alpha_R<\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_R+2\beta_R}$, то $q_R<1$ и существует число $\gamma>0$ и, следовательно, число l_R, удовлетворяющие неравенству (**), а также неравенству (7) при условии, что $y_0=x_0$, $y_1=x_1$, $|x(\circ)|=|x(\circ)|_R$, $T=R$, $l=l_R$, $\alpha=\alpha_R$, $\varepsilon=\varepsilon_R$, $\beta=\beta_R$.

Таким образом, при условии, что $0<\alpha_R<$ $<\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_R+2\beta_R}$, для числа γ, удовлетворяющего неравенству (**), справедлива оценка

$$\gamma>\frac{(1-q_R+\alpha_R)(|y_1-y_0|+\alpha_R|x_0(\circ)|_R}{(1-q_R)\varepsilon_R-\alpha_R\beta_R}.$$

§2. Существование кусочно-постоянного управления

Полагая $\alpha_0\geq\|A(\circ)\|$, $\beta_0\geq\|B(\circ)\|$, получим, что в пространстве R_n при любом $t\in T$ выполнено неравенство

$$|A(t)(x^*-x)|+|B(t)(u^*-u)|\leq\alpha_0|x^*-x|+ +\beta_0|u^*-u|. \quad (9)$$

Пусть матрица $B(t)$ такова, что для любого сегмента $[\xi,\lambda]\subseteq[t_0,t_1]$

$$\int_\xi^\lambda(B(t)(u^*-u),u^*-u)dt\geq\varepsilon_0(\lambda-\xi)|u^*-u|^2, \quad (10)$$

$\varepsilon_0>0$ – некоторое число.

Заметим, что под решением системы (1), соответствующим кусочно-непрерывному (кусочно-постоянному) управлению $u(t)$, определенному на сегменте T, будем понимать заданную и непрерывную на сегменте T вектор-функцию $x(t)$, при любом $t\in T$ удовлетворяющую равенству $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$, за исключением, может быть, точек разрыва вектора-функции $u(t)$ и матриц $A(t)$, $B(t)$.

Пусть $[\xi,\lambda]\subseteq[t_0,t_1]$ – некоторый сегмент. Положим, $\alpha_{R^*}=\alpha_0(\lambda-\xi)$, $\beta_{R^*}=\beta_0(\lambda-\xi)$, $\varepsilon_{R^*}=\varepsilon_0(\lambda-\xi)$. Число q_{R^*} определим равенством $q_{R^*}=\alpha_{R^*}(1+\frac{\beta_{R^*}}{\varepsilon_{R^*}})=\alpha_0(\lambda-\xi)(1+\frac{\beta_0}{\varepsilon_0})$, число l_{R^*} – равенством $l_{R^*}=\frac{1}{1-q_{R^*}}(|x_0(\lambda)-x_0(\xi)|+$ $+\alpha_0(\lambda-\xi)|x_0(\circ)|_{R^*}+(\lambda-\xi)\beta_0\gamma^*$, $R^*=[\xi,\lambda]$, $\gamma^*>0$ – некоторое число.

Интегрируя неравенство (9) в пределах от ξ до λ, получим неравенство

$$\int_\xi^\lambda(|A(t)(x^*-x)|+|\beta(t)(u^*-u)|dt\leq$$
$$\leq\alpha_{R^*}|x^*-x|+\beta_{R^*}|u^*-u|,$$

аналогичное неравенству (2). Если предположить, что для сегмента $[\xi,\lambda]$ в пространстве R_n выполнено неравенство (10) (следовательно, неравенство (3), если в нем $\varepsilon=\varepsilon_{R^*}$, $T=R^*$) и $x_0==x_0(\xi)$, $x_1=x_0(\lambda)$, $|x(\circ)|=|x(\circ)|_{R^*}$, то получим, что для сегмента $[\xi,\lambda]$ выполнены условия леммы. Это значит, что для любой вектор-функции $x(t)$, определенной и непрерывной на сегменте R^*, существует число $\gamma^*>0$ и единственный вектор $u_{R^*}\in H(\gamma^*)$, удовлетворяющий равенству

$$\int_\xi^\lambda(A(t)x(t)+B(t)u_{R^*})dt=x_0(\lambda)-x_0(\xi).$$

Сегмент R^* выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$0<\lambda-\xi<\frac{\varepsilon_0}{\alpha_0(\varepsilon_0+2\beta_0)}.$$

Тогда согласно **Замечанию** $q_{R^*}<1$ и существует число $\gamma^*>0$ (следовательно, и число l_{R^*}), удовлетворяющее неравенству (7), если в нем положить $x_0=x_0(\xi)$, $x_1=x_0(\lambda)$, $\gamma=\gamma^*$, $\alpha=\alpha_{R^*}$, $\varepsilon=\varepsilon_{R^*}$, $|x(\circ)|=|x(\circ)|_{R^*}$, $\overline{O}(l)=\overline{O}(l_{R^*})$, то есть для сегмента R^* выполнено неравенство

$$|x_0(\lambda)-x_0(\xi)|+\alpha_{R^*}\max_{\overline{O}(l_{R^*})}|x(\circ)|_{R^*}<\varepsilon_{R^*}\gamma^*.$$

Предполагая, что выполнено неравенство (10), получим, что для сегмента R^* и векторов $x_0(\xi)$, $x_0(\lambda)$ выполнены условия теоремы 1. Следова-

тельно, существует единственный вектор $u_{R^*} \in H(\gamma^*)$, при котором соответствующее ему решение $x_{R^*}(t)$ системы (1), определенное на сегменте R^*, удовлетворяет условиям $x_{R^*}(\xi) = x_0(\xi)$, $x_{R^*}(\lambda) = x_0(\lambda)$, $x_{R^*}(t) \in \overline{O}(l_{R^*})$, то есть система (1) управляемая в точках $x_0(\xi)$, $x_0(\lambda)$.

Сегмент $[t_0, t_1]$ разделим на k частей точками $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k = t_1$ таким образом, чтобы при любом $i \in \{1, 2, ..., k\}$ $0 < \tau_i - \tau_{i-1} < \dfrac{\varepsilon_0}{\alpha_0(\varepsilon_0 + 2\beta_0)}$. Тогда согласно теореме 1 и **Замечанию** при условии, что при любом i выполнено неравенство (10), в котором $\lambda = \tau_i$, $\xi = \tau_{i-1}$, существуют единственный вектор $u_i \in H(\gamma_i)$ и соответствующее ему решение $x_i(t)$ системы (1), удовлетворяющее условиям $x_i(\tau_{i-1}) = x_0(\tau_{i-1})$, $x_i(\tau_i) = x_0(\tau_i)$, $x_i(t) \in \overline{O}(l_{R^i})$, $R^i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $(x_0(t) = x_0 + \dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0))$.

Вектор-функцию (управление) $\overline{u}(t)$ на сегменте T определим равенством

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u_i \text{ при } \tau_{i-1} \le t < \tau_i, \\ u_k \text{ при } \tau_{\text{k-1}} \le t \le \tau_k. \end{cases}$$

Решение $\overline{x}(t)$ системы (1), соответствующее управлению $\overline{u}(t)$, при любом $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ на сегменте R^i определяется равенством $\overline{x}(t) = x_i(t)$. Следовательно, вектор-функция $\overline{x}(t)$ на сегменте T непрерывна, удовлетворяет системе (1), за исключением может быть точек τ_i и соотношениям $\overline{x}(\tau_i) = x_0(\tau_i)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Таким образом, доказана теорема 2.

Теорема 2. Если для любого сегмента $[\xi, \lambda] \subset [t_0, t_1]$, удовлетворяющего неравенству

$$\lambda - \xi < \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0(\varepsilon_0 + 2\beta_0)},$$

выполнено неравенство (10), то система (1) управляемая в точках x_0, x_1 (в силу произвольности точек x_0, x_1 система (1) вполне управляемая).

Далее снова будем предполагать, что $B(t)$ – $n \times n$-матрица, определенная и непрерывная на сегменте T. Отметим, что согласно теореме 2 одним из условий управляемости системы (1) в точках x_0, x_1 является выполнение неравенства (10).

Предположим, что неравенство (10) не выполняется. Поставим задачу: найти постоянную матрицу D (следовательно, управление u, определенное равенством $u = Dv$), удовлетворяющую неравенству

$$\int_\xi^\lambda (B(t)D(v^* - v), v^* - v)dt \ge \varepsilon_0(\lambda - \xi)\,|\,v^* - v\,|^2,$$

$\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число, ξ, λ – произвольные, но фиксированные числа. Система (1) примет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)Dv. \qquad (11)$$

Сначала определим условия, при которых $\int_\xi^\lambda (B(t)Dv, v)dt$ – определенно-положительная квадратичная форма.

Пусть $B(t) = (b^*_{i,j}(t))_1^n$, $D = (d_{i,j})_1^n$. Тогда, полагая для простоты записей $\int_\xi^\lambda b^*_{i,j}(t)dt = b_{i,j}$, $B = (b_{i,j})_1^n$, получим $\int_\xi^\lambda B(t)Ddt = (\sum_{i=1}^n b_{pi}d_{iq})_1^n$.

Определим условия существования матрицы D, удовлетворяющей равенствам

$$\sum_{i=1}^n (b_{pi}d_{iq} + b_{qi}d_{ip}) = 2l_{pq}, \qquad (12)$$

в которых l_{pq} – произвольные, но фиксированные числа.

Из построения равенств (12) следует, что при $p = 1$ во множестве (12) содержится ровно n равенств, при $p = 2$ – $(n-1)$ равенство и так далее, при $p = n-1$ – два равенства, при $p = n$ – одно равенство. Непосредственным вычислением устанавливаем, что равенства (12) образуют $r = \dfrac{1+n}{2}n$-мерную систему линейных уравнений относительно n^2 неизвестных $d_{i,j}$, основную матрицу которой обозначим буквой V.

Учитывая, что $n^2 > r$ при $n > 1$, получим, что система уравнений, определенная равенствами (12), тогда и только имеет решение независимо от набора чисел l_{pq}, когда ранг матрицы V равен r. В этом случае существует матрица D, удовлетворяющая равенству $(BDv, v) = (Lv, v)$, $L = (l_{pq})_1^n$ – симметрическая матрица. Числа l_{pq} выберем так, чтобы квадратичная форма (Lv, v) была определенно-положительная.

Для определенности, положим, что минор порядка r отличный от нуля, расположен на первых r столбцах матрицы V. Следовательно, искомыми будут те числа $d_{i,j}$, которые являются коэффициентами линейной комбинации первых r столбцов матрицы V в системе (12), остальные

числа $d_{i,j}$ полагаются равными нулю. В результате будет определена единственная матрица D, удовлетворяющая равенству $(BD\nu,\nu)=(L\nu,\nu)$.

Если, кроме того,

$$l_{pq}=\begin{cases}(\lambda-\xi) \text{ при } p=q,\\ 0 \text{ при } p\neq q,\end{cases}$$

то получим

$$\int_{\xi}^{\lambda}(B(t)D\nu,\nu)dt=(BD\nu,\nu)=(\lambda-\xi)\,|\,\nu\,|^2,$$

$$\nu=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n).$$

Далее матрицу D, удовлетворяющую неравенству $\int_{\xi}^{\lambda}(B(t)D\nu,\nu)dt\geq\varepsilon_0(\lambda-\xi)\,|\,\nu\,|^2$, будем называть согласованной с матрицей $B(t)$ относительно сегмента $[\xi,\lambda]$, $\varepsilon_0>0$. Следовательно, если матрица D согласована с матрицей $B(t)$ относительно сегмента $[\xi,\lambda]$, то это значит, что для матрицы $B(t)\,D$ системы (11) на сегменте $[\xi,\lambda]$ выполнено неравенство (10).

Отметим, что матрица D согласована с матрицей $B(t)$ относительно сегмента $[\xi,\lambda]$, если ранг матрицы V равен r.

Пусть число β_0^* таково, что $\|\,B(\circ)D\,\|\leq\beta_0^*$. Тогда, выбирая числа ξ, λ, удовлетворяющие неравенствам $0<\lambda-\xi<\dfrac{\varepsilon_0}{\alpha_0(1+2\beta_0^*)}$, и, полагая, что матрица D согласована с матрицей $B(t)$ относительно сегмента $[\xi,\lambda]\subseteq[t_0,t_1]$, получим, что система (11) управляемая в точках $x_0(\xi)$, $x_0(\lambda)$, то есть существуют числа $\gamma>0$, $l>0$, постоянный вектор $\bar{\nu}\in H(\gamma)$ и соответствующее ему решение $\bar{x}(t)$ системы (11), определенное на сегменте $[\xi,\lambda]$, удовлетворяющее соотношениям $\bar{x}(\xi)=x_0(\xi)$, $\bar{x}(\lambda)=x_0(\lambda)$, $\bar{x}(t)\in\bar{O}(l)$.

Согласно замене переменных $u=D\nu$ $\bar{x}(t)$ – решение системы (1), соответствующее управлению $\bar{u}=D\bar{\nu}$, $|\,\bar{u}\,|\leq\|\,D\,\|\,\gamma$.

§3. Условия существования матрицы, согласованной с матрицей *B*(*t*) относительно сегмента [*ξ*, *λ*]

Рассмотрим один из возможных способов нахождения матрицы D, согласованной с матрицей $B(t)$ относительно сегмента $[\xi,\lambda]$. Уравнения в системе, определенной равенствами (12), расположим в следующем порядке

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}b_{1i}d_{i1}=l_{11},\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{1i}d_{i2}+b_{2i}d_{i1})=2l_{12},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{1i}d_{in}+b_{ni}d_{i1})=2l_{1n},\\
&\sum_{i=1}^{n}b_{2i}d_{i2}=l_{22},\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{2i}d_{i3}+b_{3i}d_{i2})=2l_{23},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{2i}d_{in}+b_{ni}d_{i2})=2l_{2n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n}b_{ji}d_{ij}=l_{jj},\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{ji}d_{ij+1}+b_{j+1i}d_{ij})=2l_{jj+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{ji}d_{in}+b_{ni}d_{ij})=2l_{jn},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{n-1i}d_{in-1}=l_{n-1n-1},\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{n-1i}d_{in}+b_{ni}d_{in-1})=2l_{n-1n},\\
&\sum_{i=1}^{n}(b_{ni}d_{in}=l_{nn}.
\end{aligned}\qquad(13)$$

Искомые величины d_{ij} в системе (13) расположим в порядке $d_{11},d_{21},d_{31},\ldots,d_{n1}$, d_{12},d_{22}, $d_{32},\ldots,d_{n2},d_{33},d_{43},\ldots,d_{n3},\ldots,d_{1n},d_{2n},d_{3n},\ldots$, d_{nn}. Тогда основную матрицу V системы (13) определим равенством $V=[colon(V_{11},V_{21})$, $colon(V_{12},V_{22})]$, в котором $V_{11}=B$, V_{21} – нулевая матрица, V_{12} – $n\times(n^2-n)$-матрица, V_{22} – $(r-n)\times(n^2-n)$-матрица. Справедлива следующая теорема 3.

Теорема 3. Пусть $\det\int_{\xi}^{\lambda}B(t)dt=\det B\neq0$. Тогда, для того чтобы система (13) имела решение при любом наборе чисел l_{pq}, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы V_{22} был равен $r-n$.

Теорема 4. Пусть: 1) сегмент $[t_0, t_1]$ разбит на конечное число частей точками $v_0 = t_0 < v_1 < < v_2 < \ldots < v_m = t_1$; 2) кусочно-непрерывная на сегменте $[t_0, t_1]$ матрица $B(t)$ системы (1) определена согласно равенству

$$B(t) = \begin{cases} B_i(t) \text{ при } t \in [v_{i-1}, v_i), \\ B_m(t) \text{ при } t \in [v_{m-1}, v_m], \end{cases}$$

в котором при любом $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $B_i(t)$ – непрерывная матрица; 3) при любом $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ существует постоянная матрица D_i, согласованная с матрицей $B(t)$ относительно сегмента $[v_{i-1}, v_i]$. Тогда система (1) управляемая в точках x_0, x_1.

Доказательство. Из условия 3) теоремы следует, что при любом $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ существует число $\varepsilon_{0i} > 0$ такое, что

$$\int_{v_{i-1}}^{v_i} B(t) D_i (v^* - v), v^* - v) dt \geq \varepsilon_{oi} (v_i - v_{i-1}) \, | v^* - v |^2$$

(в качестве значения матрицы $B(t)$ в точке v_i можно принять ее предел слева в точке v_i).

При любом i сегмент $[v_{i-1}, v_i]$ разобьем на конечное число частей точками $v_{i-1} = \tau_{i0} < \tau_{i1} < < \tau_{i2} < \ldots < \tau_{ik_i} = v_i$ так, чтобы при любом $j \in \{1, 2, \ldots, k_i\}$

$$0 < \tau_{ij} - \tau_{ij-1} < \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0 (\varepsilon_0 + 2\beta_0^*)}, \quad \varepsilon_0 = \min_i \{\varepsilon_{0i}\},$$

$$\| A(\circ) \| \leq \alpha_0, \quad \beta_0^* = \max_i \{\beta_i\}, \quad \| B(\circ) D_i \|_{[v_{i-1}, v_i]} \leq \beta_i.$$

Следовательно, для любого сегмента $[\tau_{ij-1}, \tau_{ij}] \subseteq [\tau_{i-1}, \tau_i]$ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k_i\}$ для матрицы $B(t) D_i$ выполнены условия теоремы 2. Система (1) управляемая в точках x_0, x_1.

Теорема доказана.

Отметим следующее:

1) В теореме 4 в частном случае при некоторых i (возможно и при всех i) матрица $B(t) = B_i$, B_i – постоянная матрица.

2) Пусть в системе (1) матрица $B(t)$ – такова, что $\int_{t_0}^{t_1} B(t) dt$ – определенно-положительная матрица. Может оказаться достаточно сложным определить число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству (3). Тогда можно воспользоваться тем, что существует такая неособенная постоянная матрица D [10], что заменой переменных $u = Dv$ система (1) преобразуется в систему (11), для которой $\int_{t_0}^{t_1} (B(t) Dv, v) dt = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2$, при любом $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ λ_i – постоянное положительное число. Число ε, удовлетворяющее неравенству $\int_{t_0}^{t_1} (B(t) Dv, v) dt \geq \geq \varepsilon \, | v |^2$, определяется соотношением $0 < \varepsilon < \min_i \{\lambda_i\}$.

3) Пусть матрица $B(t) = (b_{ij}(t))_1^n$ в системе (1) и сегмент $[\xi, \lambda] \subset [t_0, t_1]$ таковы, что при любом $t \in [\xi, \lambda]$ $\det B(t) \neq 0$. Матрица $V(t)$ системы (13), в которой числа b_{ij} заменены функциями $b_{ij}(t)$ при соответствующем порядке расположения неизвестных d_{ij} представима равенством $V(t) = [colon(V_{11}(t), V_{21}(t)), colon(V_{12}(t), V_{22}(t))]$, $V_{11}(t) = B(t)$, $V_{21}(t) \equiv 0$ на сегменте $[\xi, \lambda]$, $V_{12}(t)$ – $n \times (n^2 - n)$-матрица, $V_{22}(t)$ – $(r - n) \times (n^2 - n)$-матрица. Тогда если при любом $t \in [\xi, \lambda]$ $rang \, V_{22}(t) = r - n$ и расположение минора порядка $r - n$, отличного от нуля, в матрице $V_{22}(t)$ не зависит от t, то существует непрерывная на сегменте $[\xi, \lambda]$ матрица $D(t)$, такая, что $(B(t) D(t) v, v) = | v |^2$. Для этого в системе (13), построенной для матрицы $B(t)$, достаточно предположить:

$$l_{pq} = \begin{cases} 1, \text{ если } p = q, \\ 0, \text{ если } p \neq q. \end{cases}$$

В этом случае

$$\int_{\xi}^{\lambda} (B(t) D(t) v, v) dt = (\lambda - \xi) \, | v |^2 .$$

Система (1) управляемая в точках $x_0(\xi)$, $x_0(\lambda)$, если $0 < \lambda - \xi < \dfrac{1}{\alpha_0 (1 + 2\beta_0)}$.

Заключение. Изложенная в предыдущих пунктах теория предполагает, что в системе (1) $B(t)$ – $n \times n$-матрица. В случае, если $B(t)$ – $n \times m$-матрица и $m < n$, то заменой переменных $u = C(t)\mu$, $C(t)$ – $m \times n$-матрица, система (1) сводится к системе $\dot{x} = A(t) x + B(t) C(t) \mu$. Очевидно, что $\det B(t) C(t) \equiv 0$. Но может оказаться, что $\det \int_{\xi}^{\lambda} B(t) C(t) dt \neq 0$ и станет возможным найти условия существования матрицы D, согласованной с матрицей $B(t) C(t)$ относительно сегмента $[\xi, \lambda]$.

В качестве матрицы $C(t)=(c_{ij}(t))_{1\,1}^{mn}$ можно взять матрицу, элементы которой определяются равенствами $c_{ji}(t)=\pm b_{ij}(t)$, $B(t)=(b_{ij}(t))_{1\,1}^{nm}$. Выбор знака + или – для каждого из элементов матрицы $C(t)$ произволен.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=A(t)x+B^{*}(t)u, \qquad (14)$$

в которой $A(t)=\frac{1}{213}[colon(t,\sqrt{6}t^{2}),colon(t^{2},t^{3})]$, матрица $B^{*}(t)=colon(1,-t)$, $t\in T=[0,1]$. Определим условия управляемости системы (14) в точках $x_0\in R_2$, $x_1\in R_2$.

Управление $u(t)$ выберем согласно равенству $u(t)=t\mu_1+t^2\mu_2=(t,t^2)\,colon\,(\mu_1,\mu_2)$. Система (14) примет вид

$$\dot{x}=A(t)x+[colon\,(t,-t^{2}),colon\,(t^{2},-t^{3})]\mu, \qquad (15)$$

$\mu=colon\,(\mu_1,\mu_2)$. Положим, $\mu=D\nu$,

$$D=[colon\,(d_{11},d_{21}),\,colon\,(d_{12},d_{22})].$$

Систему (15) запишем так:

$$\dot{x}=A(t)x+[colon\,(t,-t^{2}),colon\,(t^{2},-t^{3})]D\nu. \qquad (16)$$

Полагая, $B(t)=[colon\,(t,-t^{2}),colon\,(t^{2},-t^{3})]$, получим

$$\int_0^1 B(t)D\nu dt=\int_0^1[colon\,(t,-t^{2}),\,colon\,(t^{2},-t^{3})]D\nu dt=[colon\,(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3}),\,colon\,(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{4})]D\nu=BD\nu,$$

где $B=[colon\,(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}),colon\,(\frac{1}{3},-\frac{1}{4})]$, $\det B=-\frac{1}{72}$.

Матрицу D определим таким образом, чтобы квадратичная форма $(BD\nu,\nu)=(L\nu,\nu)$ была определенно-положительной, L – симметрическая матрица. Очевидно, что

$$BD=[colon\,(\tfrac{1}{2}d_{11}+\tfrac{1}{3}d_{21},-\tfrac{1}{3}d_{11}-\tfrac{1}{4}d_{21}),\;colon\,(\tfrac{1}{2}d_{12}+\tfrac{1}{3}d_{22},-\tfrac{1}{3}d_{12}-\tfrac{1}{4}d_{22})].$$

Числа d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}d_{11}+\tfrac{1}{3}d_{21}=1,\\ -\tfrac{1}{3}d_{11}-\tfrac{1}{4}d_{21}+\tfrac{1}{2}d_{12}+\tfrac{1}{3}d_{22}=0,\\ -\tfrac{1}{3}d_{12}-\tfrac{1}{4}d_{22}=1.\end{gathered} \qquad (17)$$

Можно убедиться, что ранг матрицы системы (17) равен 3. Непосредственно путем вычисления, предположив, что $d_{22}=0$, находим $d_{11}=54$, $d_{21}=-78$, $d_{12}=-3$. Матрица L определяется равенством $L=[colon\,(1,0),colon\,(0,1)]$, квадратичная форма $(BD\nu,\nu)$ – равенством $(BD\nu,\nu)=\nu_1^2+\nu_2^2$. Это значит, что для матрицы $\int_0^1 B(t)Ddt$ выполнено неравенство (3) с $\varepsilon=1$. Следовательно, матрица D согласована с матрицей $B(t)$ относительно сегмента $[0,1]$.

Непосредственно вычислением находим, что $\|B(\circ)D\|=\beta=\sqrt{170}$, $\|A(\circ)\|=\alpha=\frac{1}{71}<\frac{1}{2\sqrt{170}+1}$. Это значит (с учетом $\varepsilon=1$), что $\alpha<\frac{1}{2\beta+1}<\frac{1}{\beta+1}$. Следовательно, $q=\alpha(1+\beta)<1$ и существует число $\gamma>0$, которое может быть непосредственно вычислено (см. **Замечание**) и которое удовлетворяет неравенству (7), то есть выполнены все условия теоремы 1. Поэтому существует единственный вектор $\nu^{*}\in H(\gamma)$ и соответствующее ему решение $x^{*}(t)$ системы (14), определенное на сегменте [0,1] и такое, что $x^{*}(0)=x_0$, $x^{*}(1)=x_1$, $x^{*}(t)\in\overline{O}(\gamma)$. Следовательно $x^{*}(t)$ – решение системы (15), соответствующее управлению $u^{*}(t)=(t,t^2)D\nu^{*}$, $D=[colon\,(54,-78),colon\,(-3,0)]$, $\nu^{*}=colon\,(\nu_1^{*},\nu_2^{*})$.

Поскольку x_0, x_1 – произвольные точки пространства R_2, то приходим к выводу о том, что система (14) вполне управляемая.

Пример 2. Пусть дана система

$$\dot{x}=A(t)x+B^{*}(t)u, \qquad (18)$$

в котором $A(t)$ – известная непрерывная матрица, определенная на сегменте $T=[0,1]$, $B^{*}(t)=colon\,(1,t,-t^{2}\}$. Определим условия управляемости системы (18) в точках $x_0\in R_3$, $x_1\in R_3$.

Управление $u(t)$ выберем согласно равенству $u(t)=t\mu_1+t^2\mu_2+t^3\mu_3=(t,t^2,t^3)colon\,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$. Тогда $B^{*}(t)u(t)=B(t)\mu$, где

$$B(t)=[colon\,(t,t^2-t^3),\,colon\,(t^2,t^3,-t^4),\;colon\,(t^3,t^4,-t^5)],$$
$$\mu=colon\,(\mu_1,\mu_2,\mu_3).$$

А) Пусть $\mu=D\nu$, постоянная D – 3×3-матрица. Система (18) примет вид

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)D\nu. \qquad (19)$$

Заметим, что $\int_\xi^\lambda B(t)D\nu dt=B(\xi,\lambda)D\nu$, где

$$B(\xi,\lambda)=\int_{\xi}^{\lambda}B(t)dt=[colon(\frac{1}{2}(\lambda^2-\xi^2),\frac{1}{3}(\lambda^3-\xi^3),$$

$$-\frac{1}{4}(\lambda^4-\xi^4))\ colon\ (\frac{1}{3}(\lambda^3-\xi^3),\frac{1}{4}(\lambda^4-\xi^4),-\frac{1}{5}(\lambda^5-$$

$$-\xi^5)),\ colon\ (\frac{1}{4}(\lambda^4-\xi^4),\frac{1}{5}(\lambda^5-\xi^5),-\frac{1}{6}(\lambda^6-\xi^6)],$$

$\lambda>\xi.$

Найдем условия существования такой матрицы $D=(d_{ij})_1^3$, при которой квадратичная форма $(B(\xi,\lambda)Dv,v)$ определенно-положительная.

Пусть

$$b_1=[\frac{1}{2}(\lambda^2-\xi^2),\frac{1}{3}(\lambda^3-\xi^3),\frac{1}{4}(\lambda^4-\xi^4)],$$

$$b_2=[\frac{1}{3}(\lambda^3-\xi^3),\frac{1}{4}(\lambda^4-\xi^4),\frac{1}{5}(\lambda^5-\xi^5)],$$

$$b_3=[-\frac{1}{4}(\lambda^4-\xi^4),-\frac{1}{5}(\lambda^5-\xi^5),-\frac{1}{6}(\lambda^6-\xi^6)],$$

$d_1=colon\ (d_{11},d_{21},d_{31})$, $d_2=colon\ (d_{12},d_{22},\ d_{32})$, $d_3=colon\ (d_{13},d_{23},d_{33})$. Тогда

$$B(\xi,\lambda)D=\begin{pmatrix}(b_1,d_1)\ (b_1,d_2)\ (b_1,d_3)\\(b_2,d_1)\ (b_2,d_2)\ (b_2,d_3)\\(b_3,d_1)\ (b_3,d_2)\ (b_3,d_3)\end{pmatrix}.$$

Числа d_{ij} определим таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$(b_1,d_1)=\frac{\lambda^2-\xi^2}{2}d_{11}+\frac{\lambda^3-\xi^3}{3}d_{21}+\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}d_{31}=$$
$$=\lambda-\xi,$$

$$(b_1,d_2)+(b_2,d_1)=\frac{\lambda^2-\xi^2}{2}d_{12}+\frac{\lambda^3-\xi^3}{3}d_{22}+$$
$$+\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}d_{32}+\frac{\lambda^3-\xi^3}{3}d_{11}+\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}d_{21}+$$
$$+\frac{\lambda^5-\xi^5}{5}d_{31}=0,$$

$$(b_1,d_3)+(b_3,d_1)=\frac{\lambda^2-\xi^2}{2}d_{13}+\frac{\lambda^3-\xi^3}{3}d_{23}+$$
$$+\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}d_{33}-\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}d_{11}-\frac{\lambda^5-\xi^5}{5}d_{21}-$$
$$-\frac{\lambda^6-\xi^6}{6}d_{31}=0,\qquad(20)$$

$$(b_2,d_2)=\frac{\lambda^3-\xi^3}{3}d_{12}+\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}d_{22}+\frac{\lambda^5-\xi^5}{5}d_{32}=$$
$$=\lambda-\xi,$$
$$-\frac{\lambda^6-\xi^6}{6}d_{32}=0,$$

$$(b_3,d_3)=-\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}d_{13}-\frac{\lambda^5-\xi^5}{5}d_{23}-\frac{\lambda^6-\xi^6}{6}d_{33}=$$
$$=\lambda-\xi.$$

Для удобства вычислений числа d_{ij} в системе (20) расположим в следующем порядке: d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{22}, d_{32}, d_{13}, d_{23}, d_{33}, d_{12}. Тогда матрица $V(\xi,\lambda)$ в системе (20) запишется так:

$$V(\xi,\lambda)=$$

$$\begin{pmatrix}
\frac{\lambda^2-\xi^2}{2} & \frac{\lambda^3-\xi^3}{3} & \frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\lambda^3-\xi^3}{3} & \frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & \frac{\lambda^5-\xi^5}{5} & \frac{\lambda^3-\xi^3}{3} & \frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-\xi^2}{2}\\
-\frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & -\frac{\lambda^5-\xi^5}{5} & -\frac{\lambda^6-\xi^6}{6} & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-\xi^2}{2} & \frac{\lambda^3-\xi^3}{3} & \frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & \frac{\lambda^5-\xi^5}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^3-\xi^3}{3}\\
0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^5-\xi^5}{5} & -\frac{\lambda^6-\xi^6}{6} & \frac{\lambda^3-\xi^3}{3} & \frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & \frac{\lambda^5-\xi^5}{5} & -\frac{\lambda^4-\xi^4}{4}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-\xi^4}{4} & -\frac{\lambda^5-\xi^5}{5} & -\frac{\lambda^6-\xi^6}{6}
\end{pmatrix}$$

Предположим, что числа ξ, λ таковы, что $rang\ V(\xi,\lambda)=6$. Тогда система (20) разрешима и $\int_{\xi}^{\lambda}(B(t)Dv,v)dt=(\lambda-\xi)\,|\,v\,|^2$, $\varepsilon_0=1$, то есть выполняется неравенство (10) для системы (19) и сегмента $[\xi,\lambda]$.

Пусть числа α_0, β_0 такие, что выполняются неравенства $\|A(\circ)\|=\alpha_0$, $\|B(\circ)D\|=\beta_0$. Следовательно, $\int_{\xi}^{\lambda}\|A(t)\|dt\le\alpha_0(\lambda-\xi)$, $\int_{\xi}^{\lambda}\|B(t)D\|dt\le$ $\le\beta_0(\lambda-\xi)$. Предположим, кроме того, что числа ξ, λ удовлетворяют неравенству

$$\lambda-\xi<\frac{1}{\alpha_0(1+2\beta_0)}.$$

Тогда (согласно **Замечанию**) $q=\alpha_0(\lambda-$ $-\xi)(1+\beta_0)<1$ и существует число $\gamma>0$ (следовательно, и число $l>0$), удовлетворяющие неравенству (7), которое для системы (19) запишется в виде

$$|x_0(\lambda)-x_0(\xi)|+\alpha_0(\lambda-\xi)\max_{\overline{O}(l)}|x(\circ)|< \\ <(\lambda-\xi)\gamma. \quad (21)$$

Это значит (в предположении, что $rang\, V(\xi, \lambda)=6$), что для системы (19) выполнены условия теоремы 1 на сегменте $[\xi,\lambda]$. Следовательно, система (19) управляемая в точках $x_0(\xi)$, $x_0(\lambda)$, то есть существует единственный вектор $\nu^*\in H(\gamma)$ такой, что соответствующее ему решение $x^*(t)$ системы (19), определенное на сегменте $[\xi,\lambda]$, удовлетворяет условиям $x^*(\xi)=x_0(\xi)$, $x^*(\lambda)=x_0(\lambda)$, $x^*(t)\in\overline{O}(l)$. Тогда и система (18) управляема в точках $x^*(\xi)$, $x^*(\lambda)$. Управление $u^*(t)$, при котором система (18) имеет решение $x^*(t)$, определяется равенством $u^*(t)=(t,\, t^2,\, t^3)D\nu^*$.

Б) Предположим, что $\xi=0$, $\lambda=d_0$. Полагая, $D=D_0$, получим, что $\int_0^{d_0}B(t)D_0dt=B_0D_0$, где

$$B_0=[colon\,(\frac{d_0^2}{2},\frac{d_0^3}{3},-\frac{d_0^4}{4}),colon\,(\frac{d_0^3}{3},\frac{d_0^4}{4},-\frac{d_0^5}{5}),$$

$$colon\,(\frac{d_0^4}{4},\frac{d_0^5}{5},-\frac{d_0^6}{6}),\ \det B_0=-\frac{d_0^{12}}{4320}.$$

Найдем условия существования матрицы $D_0=(d_{ij}^0)_1^3$, при которой квадратичная форма $(B_0,D_0\nu,\nu)$ определенно-положительная.

Можно убедиться, что в рассматриваемом случае ранг матрицы $V(0,\lambda)$ системы (20) равен $m=6$. Следовательно, система (20) разрешима, $\int_0^{d_0}(B(t)Dv,v)dt=d_0\,|v|^2$, $\varepsilon_0=1$.

Непосредственно вычислением устанавливаем, что минор шестого порядка матрицы $V(0,\lambda)$, отличный от нуля, расположен на первых шести столбцах матрицы $V(0,\lambda)$. Для простоты нахождения элементов матрицы D_0, удовлетворяющей системе (20), можно выбрать $d_{12}^0=d_{23}^0=d_{33}=0$.

Число $d_0>0$ выберем согласно неравенству $d_0<\min\{\frac{1}{\alpha_0(1+2\beta_0)},1\}$. Из условия

$$\frac{1}{\alpha_0(1+2\beta_0)}<\frac{1}{\alpha_0(1+\beta_0)},$$

следует, что $q=\alpha_0d_0(1+\beta_0)<1$ и существует число γ_0 (следовательно, и число $l_0>0$), удовлетворяющее неравенству (21), в котором $\gamma=\gamma_0$, $l=l_0$. Выполнены условия теоремы 1 для системы (19). Это значит, что существует единственный вектор $\nu_0\in H(\gamma_0)$ и соответствующее ему решение $x^0(t)$ системы (19), определенное на сегменте $[0,d_0]$, удовлетворяющее условиям $x^0(0)=x_0$, $x^0(d_0)=x_0(d_0)$, $x^0(t)\in\overline{O}(l_0)$, система (19) управляемая в точках x_0, $x^0(d_0)$.

В) Сегмент $[d_0,1]$ разделим на k равных частей точками $d_0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\ <\tau_k=1$, при любом $s\in\{1,2,\ldots,k\}$ $\tau_{s+1}-\tau_s=d$, $d>0$ – некоторое число. Тогда, полагая, что $\xi=\tau_s$, $\lambda=\tau_s+d$, получим $\int_{\tau_s}^{\tau_s+d}B(t)D_sdt=B(\tau_s,d)D_s$, где матрица $B(\tau_s,d)$ совпадает с матрицей $B(\xi,\lambda)$, $D_s=(d_{ij}^s)_1^3$. Для определения элементов матрицы D_s, при которой квадратичная форма $(B(\tau_s,d)D_s\nu,\nu)$ определенно-положительная, исследуем системы (20).

Непосредственным вычислением можно установить, что число k и, следовательно, число $d>0$, удовлетворяющее неравенству

$$d<\min\{\frac{1}{\alpha_0(1+2\beta_0)},1\}$$

можно выбрать так, что матрица $V(\tau_s,d)$ системы (20) будет иметь $rang\, V(\tau_s,d)=6$, минор шестого порядка, отличный от нуля, будет расположен на первых шести столбцах матрицы $V(\tau_s,d)$. Следовательно, система (20) разрешима,

$$\int_{\tau_s}^{\tau_s+d}(B(t)D_s\nu,\nu)dt=d\,|\nu|^2,\ \ \varepsilon_0=1,$$

$q=\alpha_0d(1+\beta_0)<1$ и существует число $\gamma_s>0$ (следовательно, и число $l_s>0$), удовлетворяющее неравенству (21), в котором $\gamma=\gamma_s$, $l=l_s$. Выполнены условия теоремы 1 для системы (19) и сегмента $[\tau_s,\tau_s+d]$, поэтому существует единственный вектор $\nu_s\in H(\gamma_s)$ и соответствующее ему решение $x^s(t)$ системы (20), определенное на сегменте $[\tau_s,\tau_s+d]$ и удовлетворяющее условиям $x^s(\tau_s)=x_0(\tau_s)$, $x^s(\tau_s+d)=x_0(\tau_s+d)$, $x^s(t)\in\overline{O}(l_s)$, то есть система (20) управляемая в точках $x^s(\tau_s)=x_0(\tau_s)$, $x^s(\tau_s+d)=x_0(\tau_s+d)$.

Управление $u^*(t)$, при котором система (1) имеет решение $x^*(t)$, заданное на сегменте [0, 1], удовлетворяющее условиям $x^*(0)=x_0$, $x^*(1)=x_1$, определяется равенством

$$u^*(t)=\begin{cases} u_0=(t,t^2,t^3)D_0v_0 \text{ при } 0\le t\le d_0, \\ u_1=(t,t^2,t^3)D_1v_1 \text{ при } d_0\le t\le \tau_1, \\ u_s=(t,t^2,t^3)D_sv_s \text{ при } \tau_s\le t\le \tau_{s+1}, \\ u_{k-1}=(t,t^2,t^3)D_{k-1}v_{k-1} \text{ при } \tau_{k-1}\le t\le \tau_k, \end{cases}$$

решение $x^*(t)$ системы (1), соответствующее управлению $u^*(t)$, на сегменте $[0,d_0]$ определяется равенством $x^*(t)=x^0(t)$, на сегменте $[d_0,\tau_1]$ – равенством $x^*(t)=x^1(t)$, при любом $s\in\{2, 3,\dots,k-1\}$ на сегменте $[\tau_s,\ \tau_{s+1}]$ – равенством $x^*(t)=x^{s+1}(t)$, $x^s(\tau_s)=x^{s+1}(\tau_s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
2. **Тонков Е.Л.** О равномерной локальной управляемости линейного управления // Математическая физика. Респ. межвед. сб. ст. / Киев, 1982. Вып. 33. С. 44–53.
3. **Леваков А.А.** К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23 .№5. С. 798–806.
4. **Минюк С.А.** К теории полной управляемости линейных стационарных систем // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 3. С. 414–420.
5. **Кибенко А.В., Перов А.И.** О двухточечной краевой задаче с параметром // Ученые записки Азерб. гос. ун-та. Серия физ.-мат. и хим. наук. 1961. № 3. С. 21–30.
6. **Кибенко А.В., Перов А.И.** Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче для уравнения с параметром // Ученые записки Азерб. гос. ун-та. Серия физ.-мат. и хим. наук. 1961.№ 3. С. 13–21.
7. **Кибенко А.В.** Некоторые теоремы существования для двухточечной краевой задачи с параметром // Труды семинара по функциональному анализу Воронежского университета. 1963. Вып. 7. С. 52–58.
8. **Землякова Л.С.** Существование кусочно-постоянного управления для одной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. Сб. трудов матем. кафедр пед. ин-тов РСФСР. 1979. Вып. 13. С. 53–64.
9. **Вайнберг М.М.** О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений // Сибирский матем. журнал. 1961. Т. 11. № 2. С. 201–220.
10. **Гельфанд И.М.** Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966. 280с.

Терехин Михаил Тихонович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,

тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru

УДК 517.938

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦЕЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА

Н.М. Турусикова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EGUATIONS WITH A MATRIX SYSTEM OF LINEAR APPROXIMATION DEPENDING FROM PARAMETER

N.M. Turusikova

Рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейной системы дифференциальных уравнений с матрицей системы линейного приближения, зависящей от параметра. Методом неподвижной точки установлены достаточные условия разрешимости задачи.

Ключевые слова: управление, принцип неподвижной точки, замена переменной, краевая задача, оператор.

The two-point boundary value problem for nonlinear differential equations with a matrix system of linear approximation depends from the parameter is considered. Sufficient conditions for the solvability of the problem determination by fixed point method.

Keywords: control, fixed-point principle, the change of variable, boundary value problem, operator

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t,\mu)x + B(t)u + f(t,x,u), \qquad (1)$$

в которой $x \in E_n$, $u \in E_m$, E_k – k-мерное векторное пространство $t \in [0,T]$, $0 < T < \infty$, $B(t)$ – матрица порядка $n \times m$, $A(t,\mu)$ – $n \times n$-матрица, μ – вектор-параметр, $f(t,x,u)$ – n-мерная вектор-функция.

В статье используем обозначения: для любого $T > 0$ $|s| = \max_i \{|s_i|\}$, $\|y(\cdot)\| = \sup_{t\in[0,T]} |y(t)|$, $\|B(t)\| = \sup_{|s|\le 1} |B(t)s|$, $\|B(.)\| = \sup_{t\in[0,T]} \|B(t)\|$, $B(t)$ – матрица, $s \in E_k$, $y(t)$ – вектор-функция, определенная на $[0,T]$, $D(\delta_0) = \{(t,x,u) : t \in [0,T], x \in E_n, u \in E_m, |x| \le \delta_0, |u| \le \delta_0\}$, $M(\delta_0) = \{\mu \in E_p : |\mu| \le \delta_0\}$, $W = \{w \in E_{n+q} : \eta \le |w| \le \Delta\}$, $V(\delta_0) = \{\lambda \in E_q : |\lambda| \le \delta_0\}$, $S = \{e \in E_{n+q} : |e| = 1\}$, $U(\xi,\delta) = \{\xi : |\xi| < \delta\}$, $\overline{U}(\xi,\delta) = \{\xi : |\xi| \le \delta\}$, $\|f\| = \sup|f(t,\xi,u)|$ на множестве $[0,T] \times \{\xi \in E_n : |\xi| \le \delta_0\} \times U_0$, $\|\varphi\| = \sup_{[0,T]\times V(\delta_0)} |\varphi(t,\lambda)|$, $\delta > 0$, $\delta_0 > 0$, $0 < \eta < \Delta$, $\Delta > 1$, δ, δ_0, η, Δ – некоторые числа.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные на промежутке $[0,T]$ m-мерные вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющие условию $\|u(\cdot)\| \le \delta_0$. Множество всех допустимых управлений обозначим $U(\delta_0)$.

Будем предполагать, что выполняются условия:

1) $A(t,\mu)$, $B(t)$ – непрерывные, ограниченные на множестве $M(\delta_0) \times [0,+\infty)$ матрицы;

2) для любого $T > 0$ $A(t,\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$ равномерно относительно $t \in [0,T]$;

3) вектор-функция $f(t,x,u)$ непрерывна на множестве $D(\delta_0)$;

4) $\varphi(t,\lambda)$ – некоторая произвольная непрерывная, ограниченная на множестве $[0,T] \times V(\delta_0)$ m-мерная вектор-функция;

5) $f(t,x,u) = f_k(t,u) + f^*(t,x,u)$, где $k \ge 2$, $f_k(t,u)$ – вектор-форма порядка k относительно $u \in U(\delta_0)$, для любого $T > 0$ $f^*(t,x,u)/|u|^k \to 0$

при $u \to 0$ равномерно относительно $t \in [0,T]$ и $x\left(|x| \le \delta_0\right)$;

6) $\varphi(t,\lambda) = \varphi_k(t,\lambda) + o\left(|\lambda|^k\right)$, где $k \ge 2$, $\varphi_k(t,\lambda)$ – вектор-форма порядка k относительно $\lambda \in V(\delta_0)$, для любого $T > 0$ $o\left(|\lambda|^k\right)\Big/|\lambda|^k \to 0$ при $\lambda \to 0$ равномерно относительно $t \in [0,T]$.

В настоящей статье ставится **задача**: найти условия существования числа T и управления $u(\cdot) \in U(\delta_0)$, определенного на сегменте $[0,T]$, при которых система (1) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$x(0) = \alpha, \quad x(T) = \beta. \tag{2}$$

Поставленную задачу будем называть далее задачей (1), (2).

Предположив, что $y = x - \alpha - (\beta - \alpha)t/T$, систему (1) сведем к системе

$$\begin{aligned}\dot{y} = A(t,\mu)y + B(t)u + f\left(t, y + \alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}t, u\right) + \\ + A(t,\mu)\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}t\right) - \frac{\beta-\alpha}{T}.\end{aligned} \tag{3}$$

Краевые условия (2) для новой переменной принимают вид $y(0) = 0$, $y(T) = 0$.

Под решением системы (3) будем понимать непрерывную, кусочно-дифференцируемую на сегменте $[0,T]$ вектор-функцию $y(t)$, удовлетворяющую всюду в точках дифференцируемости на этом сегменте системе (3).

Выберем произвольное фиксированное число $T > 0$. Разобьем отрезок $[0,T]$ на части отрезками $[t_{i-1}, t_i]$. Пусть $t_i - t_{i-1} \le h$, $h > 0$ – некоторое число. Для удобства записи, положим, $t_i - t_{i-1} = h$.

Пусть $G_i(\delta_1)$ – множество определенных и непрерывных на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ n-мерных вектор-функций $g(t)$, удовлетворяющих условиям $g(t_{i-1}) = 0$, $g(t_i) = 0$, $\|g(\cdot)\| \le \delta_1$, $\delta_1 > 0$.

Выберем число δ_0, при котором выполняется неравенство $\delta_1 + 2|\alpha| + |\beta| \le \delta_0$.

Рассмотрим произвольный промежуток $[t_{i-1}, t_i]$. Пусть векторы $l \in Y(\delta_0)$, $\lambda \in V(\delta_0)$, вектор-функция $g(\cdot) \in G_i(\delta_1)$, управление $u(t) = B^T(t)l + \varphi(t,\lambda)$.

Решение системы

$$\begin{aligned}\dot{y} = A(t,\mu)g + B(t)u + f\left(t, g + \alpha + (\beta-\alpha)t/T, u\right) + \\ + A(t,\mu)\left(\alpha + (\beta-\alpha)t/T\right) - (\beta-\alpha)/T,\end{aligned}$$

определенное на сегменте $[t_{i-1}, t_i]$, запишем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) = \int_{t_{i-1}}^{t} B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t} f\Big(\tau, g + \alpha + \\ + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau, u\Big)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t} A(\tau,\mu)g(\tau)d\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t} A(\tau,\mu)\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)d\tau - \frac{\beta-\alpha}{T}\int_{t_{i-1}}^{t} d\tau.\end{aligned}$$

Равенство $\tilde{g}(t_i) = 0$ представим системой уравнений

$$\begin{aligned}\overline{\Lambda}_i l + \int_{t_{i-1}}^{t_i} B(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau = -\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\Big(\tau, g + \alpha + \\ + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau, u\Big)d\tau - \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau,\mu)\Big(g(\tau) + \alpha + \\ + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau\Big)d\tau + \frac{\beta-\alpha}{T},\end{aligned} \tag{4}$$

в которой матрица $\overline{\Lambda}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} B(\tau)B^T(\tau)d\tau$.

Пусть $\det\overline{\Lambda}_i \ne 0$. Тогда систему (4) сведем к системе

$$\begin{aligned}l_i = -\overline{\Lambda}_i^{-1}\Bigg(\int_{t_{i-1}}^{t_i} B(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\Big(\tau, g + \alpha + \\ + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau, u\Big)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau,\mu)g(\tau)d\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau,\mu)\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)d\tau - \frac{\beta-\alpha}{T}h\Bigg).\end{aligned}$$

На множестве $\{z(\cdot) = (g(\cdot), l) \in G_i(\delta_1) \times Y(\delta_0)\}$ определим оператор $F_i = colon(F_{1i}, F_{2i})$ согласно равенствам

$$\begin{aligned}F_{1i}g_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t} B(\tau)B^T(\tau)l d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t} B(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t} f\left(\tau, g + \alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau, u\right)d\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t} A(\tau,\mu)\left(g + \alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)d\tau - \frac{\beta-\alpha}{T}(t - t_{i-1}),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}F_{2i}l_i = -\overline{\Lambda}_i^{-1}\Bigg(\int_{t_{i-1}}^{t_i} B(\tau)\varphi(\tau,\lambda_i)d\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\left(\tau, g + \alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau, u\right)d\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau,\mu)\left(g + \alpha + \frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)d\tau - \frac{\beta-\alpha}{T}h\Bigg).\end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1)–6) и существует число $d > 0$ такое, что для любого i $\left|\det\overline{\Lambda}_i\right| \ge d$. Тогда задача (1), (2) разрешима.

Доказательство. Из условия теоремы следует существование такого числа $R>0$, что для любого i $\left\|\overline{\Lambda}_i^{-1}\right\|\le R$.

Так как $\left|g+\alpha+t(\beta-\alpha)/T\right|\le\delta_0$ и для любого фиксированного $T>0$

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|f\left(t,g(t)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}t,u(t)\right)\right|dt\Big/|\gamma|=0,$$

$\gamma=(l,\lambda)$, и $\lim\limits_{l\to 0}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left|B(\tau)B^T(\tau)l\right|d\tau=0$, то существует такое число $\delta\in(0,\delta_0]$, что для любого $\gamma\ (|\gamma|\le\delta)$ выполняется $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left|f\left(t,g(t)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}t,u(t)\right)\right|dt<$ $<\min\left\{\frac{\delta}{4R},\frac{\delta_1}{5}\right\}$, $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left|B(t)B^T(t)l\right|dt<\frac{\delta_1}{5}$. Поскольку $\lim\limits_{\lambda\to 0}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left|B(t)\varphi(t,\lambda)\right|dt=0$, то можно подобрать такое число $\delta'\in(0,\delta]$, что для любого $\lambda\in V(\delta')$ $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left|B(t)\varphi(t,\lambda)\right|dt<\min\left\{\frac{\delta}{4R},\frac{\delta_1}{5}\right\}$, если $\lambda\in V(\delta')$. Так как $\lim\limits_{T\to\infty}|\beta-\alpha|h/T=0$, то найдется такое число $T_0>0$, что $\frac{|\beta-\alpha|}{T_0}h<\min\left\{\frac{\delta}{4R},\frac{\delta_1}{5}\right\}$. Согласно условию 2)

$$\lim_{\mu\to 0}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|A(\tau,\mu)\left(g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T_0}\tau\right)\right|d\tau=0.$$

Следовательно, существует $\delta''>0$ такое, что для любого $\mu\in M(\delta'')$ выполняется неравенство

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|A(\tau,\mu)\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T_0}\tau\right)\right|d\tau<\min\left\{\frac{\delta}{4R},\frac{\delta_1}{5}\right\}.$$

Тогда для любого $l\in Y(\delta)$ при любых фиксированных $\lambda\in V(\delta')$, $\mu\in M(\delta'')$, любой фиксированной $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ имеем $|F_{2i}l|<\delta$, то есть $F_{2i}l\in Y(\delta)$. Следовательно, на множестве $Y(\delta)$ оператор F_{2i}, определенный равенством (6), имеет неподвижную точку.

Пусть l_i^* – неподвижная точка оператора F_{2i} на множестве $Y(\delta)$ при $\lambda=\lambda_i^*\in V(\delta')$. Тогда справедливо соотношение $\widetilde{g}(t_i)=0$.

В равенство (5) вместо l и λ подставим l_i^*,λ_i^*, получим $F_{1i}g(t_i)=\widetilde{g}(t_i)=0$. Для любой вектор-функции $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ при любых фиксированных $l_i^*\in Y(\delta),\lambda_i^*\in V(\delta')$, $\mu\in M(\delta'')$ и $T=T_0$ выполняется

$$F_{1i}g_i(t)=\left|\int_{t_{i-1}}^{t}B(\tau)B^T(\tau)l_i^*d\tau+\int_{t_{i-1}}^{t}B(\tau)\varphi(\tau,\lambda_i^*)d\tau+\right.$$
$$+\int_{t_{i-1}}^{t}f\left(\tau,g+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}\tau,B^T(\tau)l_i^*+\varphi(\tau,\lambda_i^*)\right)d\tau+$$
$$\left.+\int_{t_{i-1}}^{t}A(\tau,\mu)\left(g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)d\tau-\frac{\beta-\alpha}{T}\int_{t_{i-1}}^{t}d\tau\right|\le$$
$$\le\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|B(\tau)B^T(\tau)l_i^*\right|d\tau+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|B(\tau)\varphi(\tau,\lambda_i^*)\right|d\tau+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|f(\tau,\right.$$
$$\left.g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}\tau,B^T(\tau)l_i^*+\varphi(\tau,\lambda_i^*)\right)\Big|d\tau+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|A(\tau,\right.$$
$$\left.\left.\mu\left(g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)\right|d\tau+\frac{|\beta-\alpha|}{T}\int_{t_{i-1}}^{t_i}d\tau\right|<\delta_1.$$

В результате для любого $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ $F_{1i}g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$, то есть оператор F_{1i} отображает множество $G_i(\delta_1)$ в себя.

Из равенства (5) следует, что оператор F_{1i} вполне непрерывен на множестве $G_i(\delta_1)$. По теореме Шаудера [1] существует неподвижная точка оператора F_{1i}, которую обозначим $g_i^*(t)$. Тогда вполне непрерывный оператор F_i на замкнутом, ограниченном и выпуклом множестве $G_i(\delta_1)\times Y(\delta)$ имеет неподвижную точку $\left(g_i^*(t),l_i^*\right)$.

Таким образом, существует число T_0, а следовательно, число s такое, что для любого $i=\overline{1,s-1}$ выполняется включение $[t_{i-1},t_i]\subset[0,T_0)$, а $[t_{s-1},t_s]=[t_{s-1},T_0]$. Искомое кусочно-непрерывное управление $u^*(t)$, заданное на отрезке $[0,T_0]$, определяется равенствами $u_i^*(t)=B^T(t)l_i^*+\varphi(t,\lambda_i^*)$ при $t\in[t_{i-1},t_i)$, $i=\overline{1,s-1}$, и $u_s^*(t)=B^T(t)l_s^*+$ $+\varphi(t,\lambda_s^*)$ при $t\in[t_{s-1},T_0]$.

Соответствующее управлению $u^*(t)$ решение системы (1) находится согласно равенству $x_i^*(t)=g_i^*(t)+\alpha+t(\beta-\alpha)/T_0$ при $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,s}$, и удовлетворяет условиям (2). Задача (1), (2) разрешима. Теорема доказана.

Непосредственно путем вычисления устанавливаем, что

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}f^*\left(t,g(t)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}t,u(t)\right)dt=o\left(|\gamma|^k\right)$$

равномерно относительно $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ при любом

фиксированном $T>0$, $\gamma=(l,\lambda)$.

Положим, $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} B(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau=\overline{\varphi}_k(\lambda)+o\left(|\lambda|^k\right)$,

где $\overline{\varphi}_k(\lambda)$ – вектор-форма порядка k относительно $\lambda\in V(\delta_0)$, $-(\beta-\alpha)h/T=p(T)$,

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau,\mu)\left(g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)d\tau=c(\mu,T).$$

Согласно условию 4) получим

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f\left(\tau,g(\tau)+\alpha+\frac{(\beta-\alpha)\tau}{T},u(\tau)\right)d\tau=$$
$$=\bar{f}_k(l,\lambda)+o\left(|\gamma|^k\right),$$

где $\bar{f}_k(l,\lambda)$ – вектор-форма порядка k относительно $(l,\lambda)\in Y(\delta_0)\times V(\delta_0)$.

Система (4) будет иметь вид

$$\overline{\Lambda}_i l+\bar{f}_k(l,\lambda)+\overline{\varphi}_k(\lambda)+\overline{o}\left(|\gamma|^k\right)+ \\ +c(\mu,T)+p(T)=0, \tag{7}$$

где $\overline{o}\left(|\gamma|^k\right)=o\left(|\gamma|^k\right)+o\left(|\lambda|^k\right)$.

Пусть $rang\overline{\Lambda}_i=r_i,\ 0\le r_i<n$. С помощью элементарных преобразований систему (7) приведем к виду

$$\begin{cases}\Lambda_i l+\bar{f}_k{}^1(l,\lambda)+\overline{\varphi}_k{}^1(\lambda)+\overline{o}_1\left(|\gamma|^k\right)+\\ \quad+p_1(T)+c_1(\mu,T)=0,\\ \bar{f}_k{}^2(l,\lambda)+\overline{\varphi}_k{}^2(\lambda)+\overline{o}_2\left(|\gamma|^k\right)+\\ \quad+p_2(T)+c_2(\mu,T)=0,\end{cases} \tag{8}$$

в которой Λ_i – $r_i\times n$-матрица, $rang\Lambda_i=r_i$, $\bar{f}_k{}^1(l,\lambda)$, $\overline{\varphi}_k{}^1(\lambda),\overline{o}_1\left(|\gamma|^k\right)$ – r_i-мерные вектор-функции, $\bar{f}_k{}^2(l,\lambda)$, $\overline{\varphi}_k{}^2(\lambda)$, $\overline{o}_2\left(|\gamma|^k\right)$ – $(n-r_i)$-мерные вектор-функции, $colon(p_1(T),p_2(T))$, $colon(c_1(\mu,T),c_2(\mu,T))$ – векторы, полученные путем преобразований из векторов $p(T)$ и $c(\mu,T)$ соответственно.

Заменой переменных $\gamma=\rho e$, $\rho>0$, $\rho\in E_1$, $e\in W$, $e=(e_l,e_\lambda)$, $l=\rho e_l,\ \lambda=\rho e_\lambda$ систему (8) сведем к системе

$$\begin{cases}\Lambda_i\rho e_l+\bar{f}_k{}^1(\rho e)+\overline{\varphi}_k{}^1(\rho e_\lambda)+\\ +\overline{o}_1\left(|\rho e|^k\right)+p_1(T)+c_1(\mu,T)=0,\\ \bar{f}_k{}^2(\rho e)+\overline{\varphi}_k{}^2(\rho e_\lambda)+\overline{o}_2\left(|\rho e|^k\right)+\\ \quad+p_2(T)+c_2(\mu,T)=0,\end{cases}$$

и, следовательно, к системе

$$\begin{cases}\Lambda_i e_l+\rho^{k-1}\bar{f}_k{}^1(e)+\rho^{k-1}\overline{\varphi}_k{}^1(e_\lambda)+O_1(\rho,|e|)+\\ \quad+\frac{1}{\rho}p_1(T)+\frac{1}{\rho}c_1(\mu,T)=0,\\ \bar{f}_k{}^2(e)+\overline{\varphi}_k{}^2(e_\lambda)+O_2(\rho,|e|)+\frac{1}{\rho^k}p_2(T)+\\ \quad+\frac{1}{\rho^k}c_2(\mu,T)=0.\end{cases}$$

Положим,

$$O(\rho,e)=colon\left(\rho^{k-1}\bar{f}_k{}^1(e)+\rho^{k-1}\overline{\varphi}_k{}^1(e_\lambda)+\right.\\ \left.+O_1(\rho,|e|),O_2(\rho,|e|)\right),$$
$$\psi(e)=colon\left(\Lambda_i e_l,\bar{f}_k{}^2(e)+\overline{\varphi}_k{}^2(e_\lambda)\right),$$
$$m(T,\rho)=colon\left(\frac{1}{\rho}p_1(T),\frac{1}{\rho^k}p_2(T)\right),$$
$$s(\mu,\rho,T)=colon\left(\frac{1}{\rho}c_1(\mu,T),\frac{1}{\rho^k}c_2(\mu,T)\right).$$

Тогда будем иметь систему

$$\psi(e)+O(\rho,e)+m(T,\rho)+s(\mu,\rho,T)=0. \tag{9}$$

Теорема 2. Если при любом $e\in S$ выполняется $\psi(e)\ne 0$, то найдутся T_0 и окрестность точки $\gamma=0$, в которой при любом фиксированном $T\ge T_0$ и любой вектор-функции $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ нет решений системы (7), а задача (1), (2) неразрешима на множестве $U'=\{u(t)=B^T(t)l+\varphi(t,\lambda),t\in[T_0,\infty),$ $\gamma=(l,\lambda),|\gamma|=\overline{\rho},\overline{\rho}>0\}$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса для функции $e\to|\psi(e)|$, определенной и непрерывной на замкнутом ограниченном множестве S, найдется такое число $\sigma>0$, что для любого $e\in S$ будет выполняться $|\psi(e)|\ge\sigma$. Поскольку $\lim\limits_{\rho\to 0}O(\rho,e)=0$ равномерно относительно $e\in S$, то существует $\overline{\rho}>0$ такое, что для любого $e\in S$ справедливо неравенство $O(\overline{\rho},e)<\sigma/4$. Величина $1/\overline{\rho}^k$ ограничена. Так как $\lim\limits_{T\to+\infty}m(T,\overline{\rho})=0$, то существует такое число $T_0>0$, что $|m(T_0,\overline{\rho})|<\sigma/4$. Найдется такое $\overline{\delta}>0$, что для любого $\mu\in M(\overline{\delta})$ $|s(\mu,\overline{\rho},T_0)|<\sigma/4$.

Итак, для любого $e\in S$, для любой вектор-функции $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ и любого $\mu\in M(\overline{\delta})$ при $T=T_0$ и $\rho=\overline{\rho}$ имеем $|\psi(e)+O(\rho,e)+m(T,\rho)+$ $+s(\mu,\rho,T)|>\sigma/4$, то есть система (8) не имеет решений на множестве S. Следовательно, для любых фиксированных $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$, $\mu\in M(\overline{\delta})$ при $T=T_0$, $\rho=\overline{\rho}$, на множестве $\{\gamma:|\gamma|=\overline{\rho}\}$ система (8) не имеет решений, а значит задача (1), (2) неразрешима на этом множестве. Теорема доказана.

Теорема 3. Если существует вектор $e \in S$ такой, что $\psi(e) \neq 0$, то найдутся T_0 и в любой окрестности точки $\gamma = 0$ множество, в котором при любом фиксированном $T \geq T_0$ и любой вектор-функции $g(\cdot) \in G_i(\delta_1)$ система (9) не имеет решений, а задача (1), (2) на множестве U' неразрешима.

Доказательство. Пусть существует вектор $e \in S$ такой, что $\psi(e) \neq 0$. Ввиду непрерывности вектор-функции $\psi(e)$ на множестве S найдется число $\delta > 0$, что для любого $e \in \overline{U}(e, \delta)$ выполняется $\psi(e) \neq 0$. Тогда для любого вектора $e \in \overline{U}(e, \delta) \cap S$ имеем $\psi(e) \neq 0$. Остальные рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2.

Для разрешимости системы (4) и, следовательно, задачи (1), (2) в окрестности точки $\gamma = 0$ предположим, что существует вектор $e^* \in S$ такой, что $|e^*| = 1$, $e^* = (e_l^*, e_\lambda^*)$, $e_l^* \neq 0$.

Вектор-функцию $\psi(e)$ представим равенством $\psi(e) = D_i(e^*)(e - e^*) + \sum_{j=2}^{k} P_j^i(e^*, e - e^*)$, где $D_i(e^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $\psi(e)$ в точке e^*, $P_j^i(e^*, e - e^*)$ – вектор-форма j-го порядка относительно разности $e - e^*$.

Положим, $z = e - e^*$. Тогда система (8) преобразуется в систему

$$D_i(e^*)z + \sum_{j=2}^{k} P_j^i(e^*, z) + O(\rho, e) + \\ + m(T, \rho) + s(\mu, \rho, T) = 0. \tag{9}$$

Пусть $rangD_i(e^*) = n$. Допустим, минор порядка n образован первыми n столбцами матрицы $D_i(e^*)$. Представим матрицу $D_i(e^*)$ в следующем виде: $D_i(e^*) = (K_0, K_1)$, где K_0 – $n \times n$-матрица, для которой $\det K_0 \neq 0$, а K_1 – $n \times q$-матрица. Систему (9) запишем следующим образом

$$K_0 z_0 + K_1 z_1 + \sum_{j=2}^{k} P_j^i(e^*, z) + O(\rho, e) + \\ + m(T, \rho) + s(\mu, \rho, T) = 0,$$

где $z = (z_0, z_1)$.

Определим оператор $F_i = (F_{1i}, F_{2i})$ так, что F_{1i} действует согласно равенству (5), а оператор F_{2i} имеет вид

$$F_{2i} z_0 = -K_0^{-1}\Big(K_1 z_1 + \sum_{j=2}^{k} P_j^i(e^*, z) + \\ + O(\rho, e) + m(T, \rho) + s(\mu, \rho, T)\Big).$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1)–6) и $rangD_i(e^*) = n$. Тогда задача (1), (2) разрешима.

Доказательство. Заметим, что $\sum_{j=2}^{k} P_j^i(e^*, z) = Q_1(z_0) + Q_2(z_0, z_1)$. Так как справедливо равенство $\lim_{z_0^i \to 0}\left(-K_0^{-1} Q_1(z_0^i) / |z_0^i|\right) = 0$, то существует такое число $\delta_2 \in (0, \delta_0]$, что для любого $z_0^i \in E_n$, $|z_0^i| \leq \delta_2$, справедливо $|K_0^{-1} Q_1(z_0^i) / |z_0^i|| < 1/6$. Следовательно, $|K_0^{-1} Q_1(z_0^i)| < \delta_2 / 6$.

Пусть $Z(\delta_2) = \{z_0^i \in E_n : |z_0^i| \leq \delta_2\}$. Из того, что $\lim_{z_1^i \to 0}\left(-K_0^{-1} Q_2(z_0^i, z_1^i)\right) = 0$ равномерно относительно $z_0^i \in Z(\delta_2)$ и $\lim_{z_1^i \to 0}\left(-K_0^{-1} K_1 z_1^i\right) = 0$, следует существование такого числа $\delta' > 0$, при котором для любого $z_0^i \in Z(\delta_2)$ и любого $z_1^i \in \in E_q$, $|z_1^i| \leq \delta'$, выполняются неравенства

$$|K_0^{-1} Q_2(z_0^i, z_1^i)| < \delta_2 / 6, \ |K_0^{-1} K_1 z_1^i| < \delta_2 / 6.$$

Поскольку $\lim_{\rho \to 0}\left(-K_0^{-1} O(\rho, e)\right) = 0$ равномерно относительно $e \in W$, то существует такое $\rho^* > 0$, что для любых $e \in W$ и $\rho \leq \rho^*$

$$|K_0^{-1} O(\rho, e)| < \delta_2 / 6.$$

Если $\rho \to 0$ и $z_i \to 0$, то $l \to 0$ и $\lambda \to 0$, поэтому для любого δ_1 можно выбрать такие числа $\delta_2 > 0$, $\rho^* > 0$ и $\delta' > 0$, что для любого $z_i^0 \in \in Z(\delta_2)$, любого z_1^i, $|z_1^i| \leq \delta'$ выполняются оценки

$$h\|B(\cdot)\|^2 |l_i| < \frac{\delta_1}{5}, \ h\|B(\cdot)\|\|\varphi\| < \frac{\delta_1}{5}, \ h\|f\| < \frac{\delta_1}{5}.$$

Зафиксируем $0 < \overline{\rho} \leq \rho^*$. Так как $\lim_{T \to +\infty}\left(-K_0^{-1} m(T, \overline{\rho})\right) = 0$ и $|\beta - \alpha| h / T \to 0$ при $T \to +\infty$, то найдется число $T_0 > 0$, при котором $|K_0^{-1} m(T_0, \overline{\rho})| < \frac{\delta_2}{6}$ и $|\beta - \alpha| h / T_0 < \frac{\delta_1}{5}$.

Из равенств $\lim_{\mu \to 0}\left(-K_0^{-1} s(\mu, \overline{\rho}, T_0)\right) = 0$ и $\lim_{\mu \to 0} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| A(\tau, \mu)\left(g(\tau) + \alpha + \frac{\beta - \alpha}{T_0}\tau\right)\right| d\tau = 0$ следует существование такого числа $\overline{\delta} > 0$, что для любого $\mu \in M(\overline{\delta})$ выполняются неравенства

$$\left|K_0^{-1}s(\mu,\overline{\rho},T_0)\right|<\delta_2/6,$$
$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|A(\tau,\mu)\left(g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T_0}\tau\right)\right|d\tau<\frac{\delta_1}{5}.$$

Тогда для любого $z_0^i\in Z(\delta_2)$ и любых фиксированных $z_1^i,\left|z_1^i\right|\le\delta'$, $\mu\in M(\overline{\delta})$, $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ при $T=T_0$ и $\rho=\overline{\rho}$ справедливо неравенство $\left|F_{2i}z_0^i\right|\le\left|K_0^{-1}K_1z_1^i\right|+\left|K_0^{-1}Q_1\left(z_0^i\right)\right|+\left|K_0^{-1}Q_2\left(z_0^i,z_1^i\right)\right|+$ $+\left|K_0^{-1}O(\rho,e)\right|+\left|K_0^{-1}m(T,\rho)\right|+\left|K_0^{-1}s(\mu,\rho,T)\right|<\delta_2$, то есть $F_{2i}z_0^i\in Z(\delta_2)$. Это значит, что оператор F_{2i} при любых фиксированных $z_1^i,\left|z_1^i\right|\le\delta'$, $\mu\in M(\overline{\delta})$, $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$, $T=T_0$ и $\rho=\overline{\rho}$ отображает множество $Z(\delta_2)$ в себя.

Для любых фиксированных $z_0^i\in Z(\delta_2)$, z_1^i, $\left|z_1^i\right|\le\delta'$, $\mu\in M(\overline{\delta})$ при $T=T_0$, $\rho=\overline{\rho}$, для любой вектор-функции $g(\cdot)\in G_i(\delta_1)$ выполняется неравенство

$$\left\|F_{1i}g_i(\cdot)\right\|\le\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}B(\tau)B^T(\tau)ld\tau\right|+\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}B(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right|+$$
$$+\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}f\left(\tau,g+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}\tau,u\right)d\tau\right|+$$
$$+\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}A(\tau,\mu)\left(g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T}\tau\right)d\tau\right|+\frac{|\beta-\alpha|}{T}(t-t_{i-1})\le$$
$$\le h\left(\left\|B(\cdot)\right\|^2|l_i|+\left\|B(\cdot)\right\|\left\|\varphi\right\|+\left\|f\right\|+|\beta-\alpha|/T_0\right)+$$
$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|A(\tau,\mu)\left(g(\tau)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{T_0}\tau\right)\right|d\tau<\delta_1.$$

Следовательно, оператор F_{1i} отображает множество $G_i(\delta_1)$ в себя.

Для любых фиксированных $z_1^i,\left|z_1^i\right|\le\delta'$, $\mu\in M(\overline{\delta})$ при $T=T_0$ и $\rho=\overline{\rho}$ для любого $w_i(t)=\left(g(t),z_0^i\right)\in G_i(\delta_1)\times Z(\delta_2)$ значение оператора $F_iw_i(t)=\left(F_{1i}g(t),F_{2i}z_0^i\right)\in G_i(\delta_1)\times Z(\delta_2)$, то есть оператор F_i множество $G_i(\delta_1)\times Z(\delta_2)$ отображает в себя.

Оператор F_i вполне непрерывный, множество $G_i(\delta_1)\times Z(\delta_2)$ является замкнутым, ограниченным и выпуклым. По теореме Шаудера на этом множестве существует неподвижная точка оператора F_i, которую обозначим $\left(g^*(t),z_0^{i*}\right)$.

Решением системы (9) является вектор $z_i^*=\left(z_0^{i*},z_1^{i*}\right)$. Система (8) имеет решение $\overline{e}_i=z_i^*+e_i^*$. Так как $e_l^{i*}\ne0$, то числа δ_2 и δ' можно выбрать так, чтобы $\left|z_i^*\right|<\left|e_l^{i*}\right|$. Следовательно, вектор $\overline{e}_i\ne0$. Согласно введенным ранее обозначениям получим, что $\gamma_i^*=\overline{\rho}\,\overline{e}_i$, $\overline{e}_i=\left(\overline{e}_l^i,\overline{e}_\lambda^i\right)$.

Таким образом, существует число T_0, а следовательно, и число s такое, что для любого $i=\overline{1,s-1}$ выполняется включение $[t_{i-1},t_i]\subset[0,T_0)$, а $[t_{s-1},t_s]=[t_{s-1},T_0]$. Управление $u^*(t)$, заданное на отрезке $[0,T_0]$, определяется равенствами $u_i^*(t)=B^T(t)l_i^*+\varphi\left(t,\lambda_i^*\right)$ при $t\in[t_{i-1},t_i)$, $i=\overline{1,s-1}$, и $u_s^*(t)=B^T(t)l_s^*+\varphi\left(t,\lambda_s^*\right)$ при $t\in[t_{s-1},T_0]$, где l_i^*,λ_i^* находятся следующим образом: $l_i^*=\overline{\rho}\,\overline{e}_l^i$, $\lambda_i^*=\overline{\rho}\,\overline{e}_\lambda^i$, $l_i^*\ne0$, $i=\overline{1,s}$.

Соответствующее управлению $u^*(t)$ решение системы (1) есть вектор-функция $x_i^*(t)=g_i^*(t)+$ $+t(\beta-\alpha)/T_0$, где $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,s}$, удовлетворяющая условиям (2). Теорема доказана.

Предположим, что $rangD_i\left(e^*\right)=p_i$, $0\le p_i<$ $<n$. Тогда в матрице $D_i\left(e^*\right)$ существует ненулевой минор порядка p_i. С помощью элементарных преобразований систему (9) можно свести к системе

$$\begin{cases}\overline{D}z_i+\sum_{j=1}^{k}R_j^1\left(e^*,z\right)+O_1(\rho,e)+m_1(T,\rho)=0,\\ \sum_{j=1}^{k}R_j^2\left(e^*,z\right)+O_2(\rho,e)+m_2(T,\rho)=0,\end{cases}$$

в которой $\overline{D}-p_i\times n$-матрица, $rang\overline{D}=p_i$, $\sum_{j=1}^{k}R_j^1\left(e^*,z\right)$, $O_1(\rho,e)$ – p_i-мерные вектор-функции, $\sum_{j=1}^{k}R_j^2\left(e^*,z\right)$, $O_2(\rho,e)$ – $(n-p_i)$-мерные вектор-функции, $colon\left(m_1(T,\rho),m_2(T,\rho)\right)$ – вектор, полученный из вектора $m(T,\rho)$ путем элементарных преобразований.

Пусть $R_\sigma^i\left(e^*,z\right)$ – не тождественно равная нулю вектор-форма наименьшего порядка σ относительно z. Тогда имеет место представление $\sum_{j=2}^{k}R_j^{i2}\left(e^*,z\right)=R_\sigma^i\left(e^*,z\right)+o\left(|z|^\sigma\right)$. Получим систему

$$\begin{cases} \overline{D}z + \sum_{j=2}^{k} R_j^{i1}\left(e^*, z\right) + O_1(\rho, e) + m_1(T, \rho) = 0, \\ R_\sigma^i\left(e^*, z\right) + o\left(|z|^\sigma\right) + O_2(\rho, e) + m_2(T, \rho) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Пусть $z = \rho_1 v, \rho_1 > 0 \quad \rho_1 \in E_1$, $v \in W$. Система (10) примет вид

$$\begin{cases} \overline{D}v + O'(\rho_1 v) + \frac{1}{\rho_1} O_1\left(\rho, e^* + \rho_1 v\right) + \frac{1}{\rho_1} m_1(T, \rho) = 0, \\ R_\sigma^i\left(e^*, v\right) + O''(\rho_1 v) + \frac{1}{\rho_1^\sigma} O_2\left(\rho, e^* + \rho_1 v\right) + \\ + \frac{1}{\rho_1^\sigma} m_2(T, \rho) = 0. \end{cases}$$

Предположив, что

$$O(\rho_1, v) = colon(O'(\rho_1 v), O''(\rho_1 v)),$$
$$b\left(T, \rho_1, \rho\right) = colon\left(m_1(T, \rho)/\rho_1, m_2(T, \rho)/\rho_1^\sigma\right),$$
$$\phi(v) = colon\left(\overline{D}v, R_\sigma^i\left(e^*, v\right)\right),$$
$$Q(\rho, \rho_1, v) = colon\left(O_1\left(\rho, e^* + \rho_1 v\right)/\rho_1, O_2\left(\rho, e^* + \rho_1 v\right)/\rho_1^\sigma\right),$$

будем иметь систему

$$\phi(v) + O(\rho_1, v) + Q(\rho, \rho_1, v) + b(T, \rho_1, \rho) = 0. \quad (11)$$

Полученная система (11) разрешается аналогично системе (9). Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Если для любого $v \in S$ выполняется неравенство $\phi(v) \neq 0$, то существуют T_0 и в окрестности точки $\gamma = 0$ множество, в котором при любом фиксированном $T \geq T_0$ и любой вектор-функции $g(\cdot) \in G_i(\delta_1)$ нет решений системы (11), а задача (1), (2) неразрешима на множестве $U'' = \{u(t) = B^T(t)l + \varphi(t, \lambda), t \in [T_0, \infty), \gamma = (l, \lambda), \quad \gamma = \rho^*\left(e^* + \rho_1^* v\right), e^*, v \in S, \rho^* > 0, \rho_1^* > 0\}$.

Доказательство в основном аналогично доказательству теоремы 2. Отличие состоит в том, что фиксируем число ρ_1 после получения необходимой оценки.

Установлено, что для любой вектор-функции $g(\cdot) \in G_i(\delta_1)$ при любом $T \geq T_0$ на множестве $\{\gamma = (l, \lambda) : \gamma = \rho^*\left(e^* + \rho_1^* v\right), e^*, v \in S\}$, где ρ^*, ρ_1^* – фиксированные числа, система (11) не имеет решений. Следовательно, множество U'' не содержит решений задачи (1), (2).

Теорема 6. Если существует вектор $v \in S$ такой, что выполняется неравенство $\phi(v) \neq 0$, то существуют T_0 и в окрестности точки $\gamma = 0$ множество, в котором при любом фиксированном $T \geq T_0$ и любой вектор-функции $g(\cdot) \in G_i(\delta_1)$ нет решений системы (11), а задача (1), (2) неразрешима на множестве U''.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Пусть существует вектор $v^* \in S$, $v^* = \left(v_l^*, v_\lambda^*\right)$, такой, что $\phi\left(v^*\right) = 0$, $v_l^* \neq 0$.

Вектор-функцию $\phi(v)$ представим равенством $\phi(v) = \Phi_i\left(v^*\right)\left(v - v^*\right) + \sum_{j=2}^{k} P_j^i\left(v^*, v - v^*\right)$, где $\Phi_i\left(v^*\right)$ – значение матрицы Якоби вектор-формы $\phi(v)$ в точке v^*, $P_j^i\left(v^*, v - v^*\right)$ – вектор-форма порядка j относительно разности $v - v^*$. Тогда система (11) сведется к системе

$$\Phi_i\left(v^*\right)\omega + \sum_{j=2}^{k} P_j^i\left(v^*, \omega\right) + O(\rho_1, v) + Q(\rho, \rho_1, v) + b(T, \rho_1, \rho) = 0, \quad (12)$$

где $\omega = v - v^*$.

Пусть $rang\Phi_i\left(v^*\right) = n$. Предположим, что минор порядка n образован первыми n столбцами матрицы $\Phi_i\left(v^*\right)$. Тогда система (12) будет иметь вид

$$N_1\omega_1 + N_2\omega_2 + \sum_{j=2}^{k} P_j^i\left(v^*, \omega\right) + O(\rho_1, v) + Q(\rho, \rho_1, v) + b(T, \rho_1, \rho) = 0,$$

где $\det N_1 \neq 0$.

Пусть $F_i = \left(F_{1i}, F_{2i}\right)$, где оператор F_{1i} определен равенством (5), оператор F_{2i} – равенством

$$F_{2i}\omega_1 = -N_1^{-1}\left(N_2\omega_2 + \sum_{j=2}^{k} P_j^i\left(v^*, \omega\right) + O(\rho_1, v) + Q(\rho, \rho_1, v) + b(T, \rho_1, \rho)\right).$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия 1)–6) и $rang\Phi_i\left(v^*\right) = n$. Тогда задача (1), (2) разрешима.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Если $rang\Phi_i\left(v^*\right) < n$, то процесс продолжается далее. В результате либо будет получена система, для которой справедливы теоремы, аналогичные теоремам 5, 6 или 7, и в этом случае процедура будет закончена, либо процесс преобразования продолжится неограниченно и задача (1), (2) предложенным способом неразрешима в классе кусочно-непрерывных управлений.

Предположим, что $rang\overline{\Lambda}_i = 0$. Тогда система (4) примет вид $\bar{f}_k(l, \lambda) + \overline{\varphi}_k(\lambda) + \overline{o}\left(|\gamma|^k\right) + p(T) = 0$.

Применяя к этой системе изложенный выше процесс, получим условия разрешимости или неразрешимости поставленной задачи (1), (2).

Пример. Рассмотрим математическую модель управления объектом, описываемую следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1 x_1 + u_1 + 0{,}41 u_1^3 \tilde{o}_1 \tilde{o}_3, \\ \dot{x}_2 = u_2 - 0{,}2 u_2^2, \\ \dot{x}_3 = t\mu_2\, x_4 + 3u_3, \\ \dot{x}_4 = 0{,}5 t u_2. \end{cases} \qquad (13)$$

Определим, найдутся ли такие момент времени T и управляющие воздействия на объект, что для системы (13) разрешима двухточечная краевая задача с условиями $x(0) = \alpha$, $x(T) = \beta$, где $\alpha, \beta \in E_4$ – известные постоянные векторы.

В модели (13) $A(t,\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t\mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0{,}5t & 0 \end{pmatrix}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $f(t,x,u) = colon(0,$ $41 u_1^3 \tilde{o}_1 \tilde{o}_3; -0{,}2 u_2^2; 0; 0)$.

Управление будем искать в виде

$$u(t) = B^T(t) l + \varphi(t,\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5t \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \\ 0 \\ -4t\lambda_1^2 \end{pmatrix}.$$

Вектор-функцию $f(t,x,u)$, непрерывную на $D(\delta_0) = \{(t,x,u) : t \in [0,+\infty), x \in E_4, u \in E_4, |x| \le \delta_0, |u| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число, представим равенством $f(t,x,u) = f_2(t,u) + f^*(t,x,u)$, в котором $f_2(t,u) = colon(0;\ -0{,}2 u_2^2;\ 0;\ 0)$ есть вектор-форма второго порядка относительно $u \in U(\delta_0)$, $f^*(t,x,u) = colon(0{,}41 u_1^3 \tilde{o}_1 x_3;\ 0;\ 0;\ 0)$, при этом $f^*(t,x,u) / |u|^2 \to 0$ при $u \to 0$ равномерно относительно $x\ (|x| \le \delta_0)$.

Для вектор-функции $\varphi(t,\lambda)$ выполнены условия 4), 6).

Зафиксируем некоторое число $T > 1$, разобьем сегмент $[0,T]$ на части отрезками так, что $t_i - t_{i-1} = 1$.

Непосредственно путем вычисления устанавливаем, что при любом i определитель матрицы

$$\overline{\Lambda}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25(t_i + t_{i-1}) \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0{,}25(t_i + t_{i-1}) & 0 & \frac{1}{12}\left(t_i^2 + t_i t_{i-1} + t_{i-1}^2\right) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет неравенству $|\det \overline{\Lambda}_i| \ge 0{,}18$.

Таким образом, для модели (13) выполнены условия теоремы 1. Следовательно, найдутся такие момент времени T_0 и управление $u(t) \in U_0$, при которых система (13) имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = \alpha$, $x(T) = \beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Люстерник, Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 510 с.

Турусикова Надежда Михайловна, к. ф.-м. н., ассистент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: n.turusikova@rsu.edu.ru

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЖУКОВСКОМУ

А.А. Шестаков, О.В. Дружинина
Московский государственный университет путей сообщения,
Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН

ON STABILITY CONDITIONS IN THE SENSE OF ZHUKOVSKY

A.A. Shestakov, O.V. Druzhinina

Изучается вопрос об устойчивости по Жуковскому для непрерывной динамической системы. Получены новые условия устойчивости по Жуковскому с использованием понятия около-периодической устойчивости. Охарактеризована взаимосвязь понятия устойчивости по Жуковскому с некоторыми другими понятиями устойчивости.

Ключевые слова: динамическая система, нелинейное дифференциальное уравнение, устойчивость по Жуковскому, устойчивость по Ляпунову, около-периодическая устойчивость, пролонгационная устойчивость, устойчивость по Пуассону.

The problem of stability in the sense of Zhukovsky for continious dynamical system is considered in the paper. New conditions of stability in the sense of Zhukovsky are obtained by the aid of notion of near-periodical stability. The interconnection of notion of stability in the sense of Zhukovsky with another stability notions is characterized.

Keywords: dynamical system, nonlinear differential equation, stability in the sense of Zhukovsky, stability in the sense of Lyapunov, near-periodical stability, prolongational stability, stability in the sense of Poisson .

1. Введение

Статья посвящена нахождению условий устойчивости по Жуковскому для динамических систем, определенных на локально компактном метрическом пространстве. Непрерывную динамическую систему будем обозначать символом (M, φ), где M – локально компактное метрическое пространство с метрикой ρ и $\varphi(x,t)$ – непрерывное отображение пространства $M \times R^+$ в пространство M. К системе вида (M, φ) принадлежат, в частности, динамические системы, определяемые конечномерными дифференциальными уравнениями в пространстве R^n.

Исследование устойчивости в смысле Жуковского в настоящей работе проведено с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений и методов топологической динамики [1–4].

Проблема устойчивости в смысле Жуковского в настоящее время интенсивно изучается как отечественными, так и зарубежными авторами [5–8]. В работе [9] рассмотрена взаимосвязь некоторых типов устойчивости. Устойчивость в смысле Жуковского интегральных множеств изучена в работе [10], а предельные свойства устойчивых по Жуковскому траекторий – в работе [11]. В [12] и [13] дано развитие первого и второго методов Ляпунова для изучения устойчивости по Жуковскому. В [14] рассмотрены некоторые приложения в задачах небесной механики.

2. Обозначения и определения

Пусть (M, ρ) – метрическое пространство с заданной метрикой ρ. Обозначим через

$$B(x,\rho) = \{y \in M : \rho(x,y) < \rho\},$$
$$\overline{B}(x,\rho) = \{y \in M : \rho(x,y) \le \rho\}$$

соответственно открытый и замкнутый шар с центром в точке x и радиусом $\rho > 0$.

Непрерывным потоком (M, φ) на M называется непрерывное отображение $\varphi : M \times R \to M$, обладающее свойствами

$$\varphi(x,0) = x,\ \varphi(\varphi(x,t),\tau) = \varphi(x, t+\tau)$$
$$\forall x \in M, \quad \forall t, \tau \in R.$$

Непрерывный поток (M, φ) на M называется также непрерывной динамической системой на M. Непрерывные потоки в ряде случаев задаются многомерным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(x),\ f \in C^1(M \to M),$$

обладающим решением $\varphi : M \times R \to M$.

Предположим, что M – локально компактное метрическое пространство с метрикой ρ.

Для сокращения будем писать $x \cdot t$ вместо $\varphi(x,t)$. Если $A \subset M$ и $I \subset R$, то $A \cdot I = \{x \cdot t : \in \mathrm{A}, t \in I\}$.

Траекторией и положительной полутраекторией точки x называются множества $x \cdot R = \{x\} \cdot R$ и $x \cdot R^+ = \{x\} \cdot R^+$ соответственно.

Предельное множество $L^+(x)$, предельное множество продолжения $J^+(x)$ и множество продолжения $D^+(x)$ точки x определяются соответственно выражениями

$$L^+(x) = \left\{ y \in M : \ x \cdot t_n \to y \ \ \exists \{t_n\} \in R^+, t_n \to +\infty \right\};$$

$$J^+(x) = \left\{ y \in M : \ \ \exists \{x_n\} \subset M, \exists \{t_n\} \in R^+, \right.$$
$$\left. x_n \to +\infty, \ t_n \to +\infty, \ x_n \cdot t_n \to y \right\};$$

$$D^+(x) = \left\{ y \in M : \ \ \exists x_n \subset M, \ \ \exists t_n \in R^+, \right.$$
$$\left. x_n \to x, \ x_n \cdot t_n \to y \right\}.$$

Множество $N \subset M$ называется положительно (отрицательно) инвариантным, если $N \cdot R^+ = N$ $\left(N \cdot R^- = N \right)$ и инвариантным, если $N \cdot R = N$.

Компактное множество $Q \subset M$ положительно (отрицательно) пролонгационно устойчиво, если каждая окрестность U_1 множества Q содержит положительную (отрицательную) окрестность U_2 этого множества.

Определим пролонгацию множества Q формулами

$$D^+(Q) = \bigcup_{x \in Q} D^+(x), \ D^-(Q) = \bigcup_{x \in Q} D^-(x).$$

С использованием теорем топологической динамики [2, 3] нетрудно показать, что компактное множество Q в локально компактном метрическом пространстве положительно (отрицательно) пролонгационно устойчиво тогда и только тогда, когда

$$D^+(Q) = Q \ \left(D^-(Q) = Q \right). \qquad (1)$$

Множество точек $x \in M$, удовлетворяющих условию

$$D^+(x) = L^+(x) \ \ \left(D^-(x) = L^-(x) \right), \qquad (2)$$

называется положительно (отрицательно) около-периодическим ансамблем, а множество точек $x \in M$, удовлетворяющих условиям

$$D^+(x) = L^+(x) \ \text{ и } \ D^-(x) = L^-(x), - \qquad (3)$$

около-периодическим ансамблем.

Ансамбли (2) и (3) соответственно обозначим

$$\Omega_1^+, \ \Omega_1^-, \ \Omega_1. \qquad (4)$$

Точки, принадлежащие соответственно ансамблям (4), назовем положительно около-периодическими, отрицательно около-периодическими и около-периодическими.

Множество точек $x \in M$, удовлетворяющих условию: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$x \cdot R \subset B\left(x \cdot [t - \tau, t + \tau], \ \varepsilon \right) \ \ \forall t \in R, \qquad (5)$$

называется рекуррентным ансамблем и обозначается через Ω_2.

Точки, принадлежащие ансамблю (5), назовем рекуррентными.

Множество точек $x \in M$, удовлетворяющих условию

$$x \in L^+(x) \ \ \left(x \in L^-(x) \right), \qquad (6)$$

называется положительно (отрицательно) пуассоновским, а множество точек, удовлетворяющих условиям

$$x \in L^+(x) \ \text{ и } \ x \in L^-(x), - \qquad (7)$$

пуассоновским ансамблем.

Ансамбли (6) и (7) соответственно обозначим

$$\Omega_3^+, \ \Omega_3^-, \ \Omega_3. \qquad (8)$$

Точку, принадлежащую соответственно ансамблям (8), назовем положительно пуассоновской, отрицательно пуассоновской и пуассоновской.

Множество точек $x \in M$, удовлетворяющих условию

$$x \in J^+(x), \qquad (9)$$

называется неблуждающим ансамблем и обозначается через Ω_4. Точки, принадлежащие ансамблю (9), называются неблуждающими.

Из самих понятий ансамблей следуют свойства

$$\Omega_2 \Rightarrow \Omega_3 \Rightarrow \Omega_4, \qquad (10)$$

означающие, что рекуррентная точка является пуассоновской, а пуассоновская точка – неблуждающей.

В терминах понятий и свойств в (1)–(10) возможно лаконичным образом изложить ряд основных фактов топологической динамики. Важен вопрос о взаимосвязи множеств Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 в случае устойчивости по Жуковскому. Отметим, что указанный вопрос решен в случае устойчивости по Ляпунову в работах [1–3].

Точка $x \in M$ называется:

а) положительно (отрицательно) устойчивой по Жуковскому, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $y \in B(x, \delta)$ существует временная параметризация γ_y такая, что

$$\rho\left(x \cdot t, \ y \cdot \gamma_y(t) \right) < \varepsilon \ \ \ \forall t \in R^+ \left(\forall t \in R^- \right),$$

где γ_y – гомеоморфизм из R^+ на R^+ (из R^-

на R^-) такой, что $\gamma_y(0)=0$;

б) положительно (отрицательно) асимптотически устойчивой по Жуковскому, если она положительно (отрицательно) устойчива по Жуковскому и, кроме того,

$$\rho\left(x\cdot t,\ y\cdot\gamma_y(t)\right)\to 0 \quad t\to+\infty\ \left(t\to-\infty\right);$$

в) устойчивой по Жуковскому, если она положительно и отрицательно устойчива по Жуковскому.

Комментарии

1. Из определения устойчивости по Жуковскому следует, что для двух различных точек y_1 и y_2, принадлежащих $B(x,\delta)$, величина $\left|\gamma_{y_1}(t)-\gamma_{y_2}(t)\right|$, $t\in R^+$, может быть неограниченной даже в случае малости расстояния $\rho\left(y_1,y_2\right)$. В общем случае величина γ_y не является непрерывной по y.

2. Если точка x устойчива по Жуковскому, то она является таковой и для точки $x\cdot t$ $\forall t\in R$ и, следовательно, траектория $x\cdot R$ может быть названа устойчивой по Жуковскому.

3. Если $\gamma_y(t)\equiv t$ $\forall y\in B(x,\delta)$, то устойчивость по Жуковскому совпадает с устойчивостью по Ляпунову.

4. Определение устойчивости по Жуковскому, близкое к вышеприведенному, предложено известным ученым в области механики и теории дифференциальных уравнений Г.А. Леоновым [5] и достаточно сильно отличается от первоначального понятия прочности движения, предложенного самим Н.Е. Жуковским в 1882 году. Следуя установившейся традиции, сохраним термин «устойчивость по Жуковскому». Вопросы устойчивости по Жуковскому рассмотрены в монографиях [5, 8] и в статьях [9–14].

3. Условия устойчивости

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Точка $x\in M$ и ее полутраектория $C^+(x)$ является периодической тогда и только тогда, когда

$$L^+(x)=C^+(x). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть (11) выполнено. Тогда $x\in L^+(x)$. Следовательно, для каждого $t_1<0$ имеем $x\cdot t_1\in C^+(x)$ и, стало быть, существует $t_2\geq 0$ такое, что $x\cdot t_2=x\cdot t_1$. Из определения динамической системы следует, что $(x\cdot t)=$ $=x\cdot\left(t+t_2-t_1\right)$ $\forall t\in R$, что и доказывает периодичность траектории с периодом t_2-t_1. Обратное очевидно. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть в точке $x\in M$ динамическая система (M,φ) положительно устойчива по Жуковскому. Тогда

$$J^+(x)=L^+(x). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть точка $x\in M$ положительно устойчива по Жуковскому. Покажем, что $L^+(x)\supset J^+(x)$. Пусть $x_0\in J^+(x)$. Тогда существуют последовательность $\{t_n\}$ из R^+ и последовательность $\{x_n\}$ из M такие, что $x_n\to x$, $t_n\to+\infty$ и $x_n\cdot t_n\to x_0$.

Для заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что для каждого $y\in B(x,\delta)$ имеется гомеоморфизм $\gamma(y,t)$ из R^+ на R^+ такой, что $\gamma(y,0)=0$, $\rho\left(x\cdot\gamma(y,t),\ y\cdot t\right)<\varepsilon$ $\forall t\in R^+$. Выберем $n_0>0$ так, чтобы выполнялись оценки $\rho(x,x_n)<\delta(\varepsilon)$ и $\rho\left(x_n\cdot t_n,x_0\right)<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$. Кроме того, при $n\geq n_0$ справедливо неравенство

$$\rho\left(x\cdot\gamma(x_n,t),\ x_n\cdot t\right)<\varepsilon \quad \forall t\in R^+,$$

где гомеоморфизм $\gamma(x_n,t)$ определен аналогично гомеоморфизму $\gamma(y,t)$. Следовательно, при $n\geq n_0$ имеем

$$\rho\left(x\cdot\gamma(x_n,t_n),\ x_0\right)\leq\rho\left(x\cdot\gamma(x_n,t),\ x_n\cdot t_n\right)+$$
$$+\rho\left(x_n\cdot t_n,\ x_0\right)<2\varepsilon,$$
$$\gamma\left(x_n\cdot t_n\right)\to+\infty,\ t_n\to+\infty.$$

Из предыдущих неравенств следует, что $x_0\in L^+(x)$ и $L^+(x)\supset J^+(x)$. Так как $L^+(x)\supset J^+(x)$ верно по определению самих множеств $L^+(x)$ и $J^+(x)$, то $L^+(x)=J^+(x)$. Теорема (2) доказана.

Теорема 3. Пусть точка $x\in M$ является периодической и положительно около-периодической. Тогда траектория $C(x)$ динамической системы (M,φ) положительно пролонгационно устойчива.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда $D^+(x)=L^+(x)=C(x)$. Если точка y принадлежит периодической траектории $C(x)$, то

$$C^+(y)=C^+(x),\ J^+(y)=J^+(x). \tag{13}$$

Из (13) следует, что

$$D^+(y) = C^+(y) \cup J^+(y) = \\ = C^+(x) \cup J^+(x) = D^+(x). \quad (14)$$

Согласно (14) имеем $D^+(x \cdot R) = x \cdot R$ и траектория $C(x)$ положительно пролонгационно устойчива. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть компактное минимальное множество динамической системы (M, φ) имеет устойчивую по Жуковскому точку. Тогда каждая точка минимального множества устойчива по Жуковскому.

Доказательство. Обозначим через P компактное минимальное множество динамической системы (M, φ), а через $x_0 \in P$ устойчивую по Жуковскому точку. Предположим, что $y_0 \in P$. Согласно определению устойчивости по Жуковскому для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для $y \in B(x, \delta)$ имеется временная параметризация, удовлетворяющая неравенству

$$\rho\left(x_0 \cdot t, \gamma(y, t)\right) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall t \in R^+, \ \gamma(y, 0) = 0,$$

где $\gamma(y, t)$ – гомеоморфизм R^+ на R^+. Компактное минимальное множество P покроем совокупностью открытых множеств $\left\{B(x_0, \delta) \cdot t, \ t \in R\right\}$. Тогда существует число $\gamma_0 \in R$ такое, что $y_0 \in B(x_0, \delta) \cdot \gamma_0$. Выберем $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ таким образом, что $B(y_0, \varepsilon_0) \subset B(x_0, \delta) \cdot \gamma_0$. Для каждого $x \in B(y_0, \varepsilon_0)$ точки $x \cdot (-\gamma_0)$ и $y_0 \cdot (-\gamma_0)$ лежат в шаре $B(x_0, \delta)$. Следовательно, существуют такие гомеоморфизмы $\gamma_1(x, t)$ и $\gamma_2(x, t)$, переводящие R^+ на R^+, что $\gamma_1(x, 0) = \gamma_2(x, 0) = 0$ и при этом

$$\rho\left(x \cdot \left(\gamma_1(x, t) - \gamma_0\right), x_0 \cdot t\right) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall t \in R^+,$$

$$\rho\left(y_0 \cdot \left(\gamma_2(y_0, t) - \gamma_0\right), x_0 \cdot t\right) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall t \in R^+.$$

Из предыдущих неравенств следует оценка

$$\rho\left(x \cdot \left(\gamma(x, t) - \gamma_0\right), y_0 \cdot \left(\gamma(y_0, t) - \gamma_0\right)\right) < \varepsilon \ \ \forall t \in R^+$$

и, следовательно, произвольная точка $y_0 \in P$ устойчива по Жуковскому. Теорема 4 доказана.

Если динамическая система (M, φ) около-периодически устойчива для всех точек $x \in M$, то назовем ее около-периодически устойчивой на M.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. Пусть (M, φ) – периодическая система, не имеющая состояний равновесия. Тогда система устойчива по Жуковскому.

Доказательство. Так как система не имеет состояний равновесия, то для каждой точки $x \in M$ обозначим минимальный период через $\tau_x^* > 0$. Из свойства непрерывности φ следует, что существует число $\delta > 0$, при котором если $y \in B(x, \delta)$, то $\rho(y \cdot t, x \cdot t) < \varepsilon, \ t \in \left[0, \tau_x^* + 1\right]$. Обозначим через τ_y^* период точки x. Тогда $\left|\tau_y^* - \tau_x^*\right| < 1$ для $y \in B(x, \delta)$.

Определим гомеоморфизм $\gamma_y \colon R^+ \to R^+$. Для каждого положительного целого числа k и для каждого $t \in \left[(k-1)\tau_x^*, k\tau_x^*\right]$, положим,

$$\gamma_y(t) = \left[(k-1)\tau_y^* + \left[t - (k-1)\tau_x^*\right], k\tau_x^*\right] \frac{\tau_y^*}{\tau_x^*}. \quad (15)$$

С учетом (15) согласно определению устойчивости по Жуковскому получим, что точка x положительно устойчива по Жуковскому. Доказательство отрицательной устойчивости по Жуковскому точки x аналогично. Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Если периодическая система (M, φ) не имеет состояний равновесия, то система около-периодически устойчива.

Доказательство. Если x – неблуждающая точка, то $x \cdot R^+ \subset J^+(x)$ в силу инвариантности множества $J^+(x)$ и, следовательно, $D^+(x) = x \cdot R^+ \bigcup J^+(x) = L^+(x)$. Обратно: при $x \in D^+(x) = L^+(x)$ около-периодическая точка является пуассоновой и неблуждающей. Теорема 6 доказана.

Предложенные в настоящей работе условия устойчивости могут найти применение при изучении устойчивости и хаотического поведения технических систем, в задачах обеспечения безопасного функционирования транспортных систем, при решении ряда задач математической теории управления.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 13-08-00710-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.
2. **Барбашин Е.А.** Метод сечений в теории динамических систем. Минск: Наука и техника, 1979.
3. **Сибирский К.С.** Введение в топологическую динамику. Кишинев: Изд-во АН МССР, 1975.
4. **Козлов В.В., Фурта С.Д.** Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1996.
5. **Леонов Г.А.** Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2006.
6. **Ding C., Soriano J.M.** Uniformly asymptotically Zhukovskij stable orbits // Computers Math. Appl. 2005. Vol. 49. P. 81–84.
7. **Шестаков А.А., Дружинина О.В.** Финальные свойства асимптотически прочных и фазово асимптотически устойчивых траекторий и конечномерных динамических потоков // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2006. № 11. С. 251–255.
8. **Дружинина О.В.** Методы анализа устойчивости и динамической прочности траекторий нелинейных дифференциальных систем. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2008.
9. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О расширении понятия орбитальной устойчивости траекторий динамической системы // Доклады РАН. 2001. Т. 377. № 5. С. 621–625.
10. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О сохранении свойства асимптотической прочности в смысле Жуковского интегрального множества при возмущениях нелинейного дифференциального уравнения // Доклады РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 52–56.
11. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О предельных свойствах асимптотически устойчивых по Ляпунову и асимптотически прочных по Жуковскому траекторий динамических систем // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 2. С. 185–190.
12. **Дружинина О.В.** Признаки асимптотической прочности и непрочности движения динамической системы // Доклады РАН. 1997. Т. 355. № 4. С. 476–478.
13. **Дружинина О.В.** Исследование прочности по Жуковскому траекторий гладких динамических систем с помощью функций Ляпунова // Доклады РАН. 1998. Т. 362. № 2. С. 198–201.
14. **Дружинина О.В.** О прочности в смысле Жуковского траекторий некоторых систем небесной механики // Доклады РАН. 2002. Т. 384. № 2. С. 188–192.

Шестаков Александр Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9,
e-mail: aashestakov@yandex.ru

УДК 517.977.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Е. В. Щенникова, Е. А. Лизина
Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева

STABILIZATION OF DYNAMIC SECOND-ORDER SYSTEM WITH PIECEWISE CONSTANT CONTROLLER

E. V. Shchennikova, E. A. Lizina

Исследуется непрерывно-дискретная линейная система второго порядка с периодическими матрицами коэффициентов, для которой найдено кусочно-постоянное управляющее воздействие, стабилизирующее положение равновесия указанной системы.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, периодические коэффициенты, кусочно–постоянное управление.

We investigate continuous-discrete second-order system with periodic matrix of coefficients, for wich existence of a piecewise constant controller, stabilizing the equilibrium of this system is proved.

Keywords: continuous–discrete system, periodic coefficients, piecewise constant controller.

В последнее время все больше внимания уделяется моделям непрерывно-дискретных систем, содержащих взаимодействующие дискретные и непрерывные компоненты ([1–4] и др.). Системы этого вида широко встречаются в прикладных проблемах управления механическими, электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и во многих других областях. В последние годы гибридным системам стали уделять большое внимание и специалисты по теории управления (например, [5–6] и библиография в них). В известных работах по гибридным системам основное внимание уделяется проблемам качественного анализа.

В данной работе рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами вида

$$\ddot{z} + p(t)z = q(t)u(ph), \qquad (1)$$

где $p(t), q(t)$ – непрерывные ω-периодические функции, $u = u(ph)$ – кусочно-постоянное управление. Измерения вектора состояния системы (1) производятся в моменты времени $t = ph$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, где h – шаг квантования, то есть величина интервала между измерениями. На основе этих измерений формируется управление v. Здесь возникает задача нахождения кусочно-постоянного управления, стабилизирующего систему (1).

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(ph), \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – непрерывные ω-периодические матрицы, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1 ::= z$, $x_2 ::= \dot{z}$, $u(ph)$ – управление.

Разобьем отрезок $[0, \omega]$ на m равных частей точками $\{t_k\}_{k=\overline{0,m}}$ так, чтобы $t_0 = 0$, $t_m = \omega$, а точки разбиения t_k $(k = \overline{1, m-1})$ совпадали с моментами квантования системы (1). На каждом промежутке $t_k \le t \le t_{k+1}$ заменим матрицы $A(t)$ и $B(t)$ постоянными матрицами, построенными по следующему правилу [7, с. 194]:

$$\overline{A}_k = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t)dt, \quad \overline{B}_k = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} B(t)dt, \qquad (3)$$

$k = \overline{0, m-1}$. Тогда на отрезке $[0, \omega]$ их заменят кусочно-постоянные матрицы $A^*(t)$ и $B^*(t)$, определяемые соответственно условиями

$$A^*(t) = \{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{m-1}\},$$

где $\min\limits_{t\in[t_k, t_{k+1})} A(t) \le \overline{A}_k \le \max\limits_{t\in[t_k, t_{k+1})} A(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, m-1}$.

$$B^*(t) = \{\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_{m-1}\},$$

где $\min\limits_{t\in[t_k, t_{k+1})} B(t) \le \overline{B}_k \le \max\limits_{t\in[t_k, t_{k+1})} B(t)$ при $t \in$

$\in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, m-1}$. Запишем соответствующую систему

$$\dot{x}^* = A^*(t)x^* + B^*(t)u(ph),\ t \in [0, \omega],\ p = \overline{0, m}, \quad (4)$$

где $x^*(t)$ – непрерывная матрица, удовлетворяющая в точках непрерывности матриц $A^*(t)$ и $B^*(t)$ системе (2). Отметим, что данная система на каждом промежутке $t \in [t_k, t_{k+1})$ является непрерывно-дискретной с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x}_h = \overline{A}_k x_h + \overline{B}_k u_k(ph),\ t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (5)$$

где $\overline{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\overline{p}_k & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$, $\overline{p}_k = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(t)dt$, $\overline{q}_k = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} q(t)dt$, $u_k = u_k(ph)$.

Замечание. В случае, когда $\overline{q}_k = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} q(t)dt = 0$, способ разбиения можно выбрать так, чтобы указанный интеграл не был равен нулю. Например, $\overline{q}_k = \max\limits_{t_k \le t < t_{k+1}} q(t)$, или $\overline{q}_k = \min\limits_{t_k \le t < t_{k+1}} q(t)$, или $\overline{q}_k = \frac{\max q(t) + \min q(t)}{2}$, $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Также можно воспользоваться приемом, описанным в работе [8]. Пусть функции $p(t)$ и $q(t)$ таковы, что на отрезке $[0, \omega]$ имеются точки, в которых они обращаются в нуль. Обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_l$ точки, в которых хотя бы одна из этих функций обращается в нуль. В этом случае отрезок $[0, \omega]$ разбивается так, чтобы точки α_i $(i = \overline{0, l})$ совпали с концами отрезков разбиения. Тогда функция $q(t)$ будет иметь на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$ постоянный знак, и, следовательно, $\overline{q}_k = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} q(t)dt \ne 0$.

В качестве управляющего воздействия для системы (5) выберем управление вида

$$u_k(ph) = \overline{C}_k^T x_h(ph),\ t \in [t_k; t_{k+1}), \quad (6)$$

где $\overline{C}_k^T$ – вектор-строка размерности (1×2). В результате получим систему с постоянной матрицей коэффициентов и кусочно-постоянным управлением

$$\dot{x}_h = \overline{A}_k x + \overline{B}_k \overline{C}_k^T x_h(ph),\ t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (7)$$

и рассмотрим соответствующую систему с непрерывным управлением

$$\dot{x}_h = \overline{A}_k x_h + \overline{B}_k u_k,\quad u_k = \overline{C}_k^T x \quad (8_1)$$

или

$$\dot{x}_h = \left(\overline{A}_k + \overline{B}_k \overline{C}_k^T\right)x_h, \quad (8_2)$$

где матрицы $\overline{A}_k$ и $\overline{B}_k$ построены по правилам (3).

Отметим, что ранг матрицы $K_k = \{\overline{B}_k, \overline{A}_k \overline{B}_k\}$ $(k = \overline{1, m})$ в системе (8_2) равен 2 [8], то есть условие управляемости Калмана [9–10] выполнено и коэффициенты усиления $\overline{C}_k$, обеспечивающие $\operatorname{Re}\lambda_j\left(\overline{A}_k + \overline{B}_k \overline{C}_k^T\right) < 0$, существуют. В работе [10, с. 100] доказано, что для любого непрерывного управления $u_k = \overline{C}_k^T x_h$, которое обеспечивает в системе (8_2) выполнения условия $\operatorname{Re}\lambda_j\left(\overline{A}_k + \overline{B}_k \overline{C}_k^T\right) < 0$, существует число $h_0 > 0$ такое, что для всех $h \le h_0$ кусочно-постоянное управление (6) будет обеспечивать монотонное убывание нормы фазового состояния системы (7) на каждом промежутке $t \in [t_k; t_{k+1})$.

Найдем $\overline{C}_k$ для системы (8_2) аналогично тому, как это сделано в работе [11]. Обозначим через $\overline{M}_k = \overline{A}_k + \overline{B}_k \overline{C}_k^T$. Здесь

$$\overline{M}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\overline{p}_k + \overline{q}_k \overline{c}_k^{(q)} & \overline{q}_k \overline{c}_k^{(2)} \end{pmatrix},\ k = 0, 1, ..., m-1.$$

Характеристическое уравнение системы (8_2) имеет вид $\lambda^2 - \overline{q}_k \overline{c}_k^{(2)}\lambda + \overline{p}_k - \overline{q}_k \overline{c}_k^{(1)} = 0$. На каждом промежутке $t_k \le t < t_{k+1}$ управление выбирается так, чтобы характеристическое уравнение имело $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ $(i = 1,2)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Рауса – Гурвица [7]: $\begin{cases} \overline{q}_k \overline{c}_k^{(2)} < 0, \\ \overline{p}_k - \overline{q}_k \overline{c}_k^{(1)} > 0. \end{cases}$ В системе (8_1) заменим переменные x_1 и x_2 по правилу $X_h = K_k Y_h$, где $Y_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $K_k = \begin{pmatrix} \overline{q}_k & 0 \\ 0 & \overline{q}_k \end{pmatrix}$, $\det K_k, \ne 0$. В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{Y}_h = K_k^{-1}\overline{A}_k K_k Y_h + K_k^{-1}\overline{B}_k u_k$$

или

$$\ddot{y}_1 + \overline{p}_k y_1 = \overline{q}_k u_k. \quad (9)$$

Пусть $u_k = \gamma_1^{(k)}\dot{y}_2 + \gamma_2^{(k)} y_2$. Тогда получим уравнение $\ddot{y}_1 - \gamma_1^{(k)}\dot{y}_1 + \left(\overline{p}_k - \gamma_2^{(k)}\right)y_1 = 0$, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$\left(\lambda^{(k)}\right)^2 - \gamma_1^{(k)}\lambda^{(k)} + \overline{p}_k - \gamma_2^{(k)} = 0,$$

и, используя формулы Виета, получим $\gamma_1^{(k)}$ и $\gamma_2^{(k)}$:

$$\gamma_1^{(k)} = \lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)},\ \gamma_2^{(k)} = \overline{p}_k - \lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(k)}.$$

Следовательно, с учетом соотношения (9) получим

$$u_k = \left(\lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)}\right)y_1 + \left(\overline{p}_k - \lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(k)}\right)y_2, \quad (10)$$

где $\dot{y}_1 = y_2$. Учитывая, что $X_h = K_k Y_h$, вернемся к исходным переменным, то есть

$$y_1 = \frac{x_2}{\overline{q}_k}, \quad y_2 = \frac{x_1}{\overline{q}_k}. \qquad (11)$$

Заменив в равенстве (10) y_i через x_i $(i = 1, 2)$ в соответствии с (11) получим

$$u_k = \frac{\overline{p}_k - \lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(k)}}{\overline{q}_k} x_1 + \frac{\lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)}}{\overline{q}_k} x_2$$

и найдем

$$\overline{c}_k^{(1)} = \frac{\overline{p}_k - \lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(k)}}{\overline{q}_k}, \quad \overline{c}_k^{(2)} = \frac{\lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)}}{\overline{q}_k}. \qquad (12)$$

Кроме того, отметим, что система (8_2) будет иметь $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ $(i = 1, 2)$ при выполнении следующих условий: $\begin{cases} \gamma_1^{(k)} < 0, \\ \gamma_2^{(k)} < \overline{p}_k, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \end{cases}$ Следовательно, коэффициенты $\overline{c}_k^{(1)}$ и $\overline{c}_k^{(2)}$ находятся через элементы матриц $\overline{M}_k$ и через ее собственные числа. Далее будем считать, что коэффициенты усиления $\overline{C}_k$ $(k = 0,..., m-1)$ найдены

Таким образом, стабилизирующее управление применительно к системе (4) имеет вид

$$u = C^{*T}(t)x^*(ph), t \in [0, \omega], \qquad (13)$$

где $C^*(t) = \{\overline{C}_1, ..., \overline{C}_{m-1}\}$, $\overline{C}_k = \begin{pmatrix} \overline{c}_k^{(1)} & 0 \\ 0 & c_k^{(2)} \end{pmatrix}$, $k = \overline{0, m-1}$, и на каждом промежутке $t_k \le t < t_{k+1}$ определяется по формулам (12).

Подставим управление (13) в систему (4). В результате получим

$$\dot{x}^* = A^*(t)x^* + B^*(t)C^{*T}(t)x^*(ph), t \in [0, \omega]$$

или

$$\dot{x}^* = M^*(t)x^* + N^*(t)\left(x^*(ph) - x^*\right), \ t \in [0, \omega], \qquad (14)$$

где $M^*(t) = A^*(t) + B^*(t)C^{*T}(t)$ и $M^*(t) = \{\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_{m-1}\}$, $N^*(t) = B^*(t)C^{*T}(t)$, $N^*(t) = \{\overline{N}_1, \dots, \overline{N}_{m-1}\}$. Фундаментальную систему решений (14) можно оценить следующим образом [12]:

$$\left\|X^*(\omega)\right\| \le \frac{e^{h\|\overline{M}_k\|} e^{h\|\overline{M}_{k-1}\|} \cdot \ldots \cdot e^{h\|\overline{M}_0\|}}{\cdot (1 + \nu_1\Psi_1(t)) \ldots \cdot (1 + \nu_{m-1}\Psi_{m-1}(t))} + \\ + \Phi(t)h + \nu_0 \cdot \ldots \cdot \nu_{m-1} \cdot \Psi_0 \cdot \ldots \cdot \Psi_{m-1} \cdot h^{m-1}, \qquad (15)$$

где $e^{h\overline{M}_k} e^{h\overline{M}_{k-1}} \cdot \ldots \cdot e^{h\overline{M}_0}$ – матрица монодромии соответствующей системы с непрерывным управлением

$$\dot{x}^* = \left(A^*(t) + B^*(t)C^{*T}(t)\right)x^* = M^*(t)x^*, \qquad (16)$$

где $\Psi_0(t), ..., \Psi_{m-2}(t), \Phi(t)$ – некоторые вещественные функции, ν_k, $k = \overline{0, m}$ – вещественные числа.

Итак, вывод относительно устойчивости или неустойчивости системы (14) можно сделать, оценив мультипликаторы фундаментальной матрицы решений системы (16). Очевидно, что решение системы (16), а значит и системы (14) является асимптоптически устойчивым. Для обоснования того, что кусочно-постоянное управление (13) решает и задачу стабилизации для уравнения (2), запишем его в виде

$$\dot{x} = M(t)x + N(t)(x(ph) - x), \ t \in [0, \omega]. \qquad (17)$$

где $A(t) + B(t)C(t) = M(t)$, $B(t)C(t) = N(t)$, $C(t)$ – некоторый непрерывный периодический вектор коэффициентов усиления.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть:

а) для системы с кусочно-постоянными матрицами коэффициентов (4) построено управление $u = C^{*T}(t)x^*(ph)$ с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (13);

б) для системы (2) постороено некоторое непрерывное управление $u = C^T(t)x$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение отрезка $[0, \omega]$ на части, что если имеет место неравенство $\left\|C(t) - C^*(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{3L}$, то верна следующая оценка

$$\left\|x(t) - x^*(t)\right\| < \varepsilon\omega e^{2\omega R}, \qquad (18)$$

где $x(t)$ – решение системы (2), $x^*(t)$ – решение системы (4), L – верхняя граница нормы матрицы $B(t)$, R – верхняя граница нормы матрицы $M(t)$.

Доказательство. В доказательстве будем рассматривать системы (2) и (4) соответственно в виде (16) и (14). Пусть число $\varepsilon > 0$ такое, что $h < \varepsilon$ и при этом будет выполняться неравенство [11]

$$\left\|C^*\right\| \le S. \qquad (19)$$

Оценим нормы матриц $C(t)$ и $M(t)$. Так как матрицы $A(t)$ и $B(t)$ непрерывны и ω-периодические, то они ограничены, то есть существуют числа $K > 0$ и $L > 0$ такие, что $\|A(t)\| \le K$, $\|B(t)\| \le L$.

Тогда $\left\|\overline{A}_k\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t)dt\right\| \le \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|A(t)\|dt \le \frac{1}{h}hK = K.$

Аналогично из того, что $\|B(t)\| < L$, $\left\|C^*(t)\right\| \le S$, следует $\left\|\overline{B}_k\right\| \le L$, $\left\|\overline{C}_k\right\| \le S$. Таким образом,

$$\left\|\overline{M}_k\right\| = \left\|\overline{A}_k + \overline{B}_k\overline{C}_k\right\| \le K + LS = R$$

для всех промежутков в $[t_k, t_{k+1})$, а значит $\|M^*(t)\| \le R$.

Учитывая неравенства (18) и (19), оценим норму $\|C(t)\|$. Очевидно, что $\|C(t)\| - \|C^*(t)\| \le$ $\le \|C(t) - C^*(t)\|$, поэтому

$$\|C(t)\| \le \|C^*(t)\| + \|C(t) - C^*(t)\| < S + \frac{\varepsilon}{3L} = P.$$

Далее оценим норму $\|x(t) - x^*(t)\|$. Фундаментальные матрицы решений систем (14) и (17) при $0 \le t \le \omega$ можно записать соответственно в виде

$$X^*(t) = E + \int_0^t M^*(t_1)X^*(t_1)dt_1 + \sum_{i=0,h,2h,\dots,\omega} c_1 h \|X(i)\| \int_i^t N^*(t_1)dt_1,$$

$$X(t) = E + \int_0^t M(t_1)X(t_1)dt_1 - \int_0^t N(t_1)X(t_1)dt_1 + \sum_{i=0,h,2h,\dots,\omega} X(i)\int_i^t N(t_1)dt_1.$$

Следовательно,

$$X^*(t) - X(t) = \int_0^t \left[M^*(t_1)X^*(t_1) - (M(t_1) - N(t_1))X(t_1)\right]dt_1 + \sum_{i=h,2h,\dots,\omega} [c_1 h \|X(i)\| \int_0^t N^*(t_1)dt_1 - X(i)\int_i^t N(t_1)dt_1].$$

Переходя к норме при $0 \le t \le \omega$, получим

$$\|X^*(t) - X(t)\| = \int_0^t \|M^*(t_1)X^*(t_1) - M(t_1) + N(t_1)\| \cdot \|X(t_1)\| dt_1 + \int_0^t \|M(t_1) - N(t_1)\| \cdot \|X^*(t_1) - X(t_1)\| dt_1 + \sum_{i=h,2h,\dots,\omega} \|c_1 h - 1\| \cdot \|X(i)\| \int_0^t \|N^*(t_1) - N(t_1)\| dt_{.1}. \quad (20)$$

Из неравенства (15) при $t \in [0, \omega]$ и $h \to 0$ находим

$$\|X^*(t)\| \le e^{h\|\overline{M}_k\|} e^{h\|\overline{M}_{k-1}\|} \cdot \ldots \cdot e^{h\|\overline{M}_0\|} \le e^{(h+h+\ldots+h)R} = e^{\omega R}.$$

Так как $A(t)$ и $B(t)$ непрерывны на отрезке $[0, \omega]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) такое, что $\|A(t') - A(t'')\| \le \frac{\varepsilon}{3}$, $\|B(t') - B(t'')\| \le \frac{\varepsilon}{3P}$, при $t', t'' \in [0, \omega]$ и $|t' - t''| < \delta$. Разобьем отрезок $[0, \omega]$ так, чтобы $h < \delta$ $(k = 0, 1, \dots, m-1)$. Тогда для всех $t \in [0, \omega]$ будем иметь $\|A^*(t) - A(t)\| < \varepsilon/3$, $\|B^*(t) - B(t)\| < \varepsilon/(3Đ)$, а, следовательно,

$$\|M^*(t) - M(t) + N(t)\| = \|A^*(t) + B^*(t)C^{*T}(t) - A(t) - B(t)C^T(t) + B(t)C^T(t)\| \le$$
$$\le \|A^*(t) - A(t)\| + \|B^*(t)C^{*T}(t)\| \le \frac{\varepsilon}{3} + LS,$$
$$\|M(t) - N(t)\| = \|A(t) + B(t)C(t) - B(t)C(t)\| \le \|A(t)\| \le K,$$
$$\|N^*(t) - N(t)\| = \|B^*(t)C^{*T}(t) - B(t)C(t)\| \le$$
$$\le \|B^*(t)\| \cdot \|C^*(t) - C(t)\| + \|C(t)\| \cdot \|B^*(t) - B(t)\| \le$$
$$\le L\frac{\varepsilon}{3L} + P\frac{\varepsilon}{3P} \le \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Таким образом, из формулы (20) получаем

$$\|X^*(t) - X(t)\| \le$$
$$\le \int_0^t \left(\frac{\varepsilon}{3} + Ls\right)\|X(t_1)\|dt_1 + \int_0^t K\|X^*(t_1) - X(t_1)\|dt_1 +$$
$$+ \sum_{i=h,2h,\dots,\omega} \|c_1 h - 1\| \cdot \|X(i)\| \int_0^t \frac{2}{3}\varepsilon dt_{.1} \le \left(\frac{\varepsilon}{3} + LS\right)\varpi\varepsilon e^{\omega R} +$$
$$+ \int_0^t K\|X^*(t) - X(t_1)\|dt_1 + \frac{\varepsilon}{3P}\varepsilon\omega\|c_1 h - 1\|Ke^{\omega R} =$$
$$= (\varepsilon + LS + \|c_1 h - 1\|K)\omega\varepsilon e^{\omega R} + \int_0^t K\|X^*(t_1) - X(t_1)\|dt_1.$$

Применив лемму Гронуолла – Беллмана [7], получим

$$\|X^*(t) - X(t)\| \le (\varepsilon + LS + \|c_1 h - 1\|K)\omega\varepsilon e^{\omega R} = \Omega\omega\varepsilon r^{\omega R},$$

и, следовательно,

$$\|X^*(\omega) - X(\omega)\| \le$$
$$\le (\varepsilon + LS + \|c_1 h - 1\|K)\omega\varepsilon e^{\omega R} =$$
$$= \Omega\omega\varepsilon e^{\omega R}. \quad (21)$$

Так как моменты квантования h и соответственно число $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$ можно выбрать достаточно малыми, то из неравенства (21) будем иметь $\lim_{h\to 0}\|X^*(\omega) - X(\omega)\| = 0$, причем стремление к нулю является монотонным. Теорема доказана.

Рассмотрим характеристические уравнения $\det(X(\omega) - \rho E) = 0$ и $\det(X^*(\omega) - \rho E) = 0$ систем (17) и (14), где ρ_j, $\rho_j^*(h)$ – соответственно корни этих уравнений, $j = \overline{1, n}$. Так как корни $\rho_j^*(h)$ являются непрерывными функциями величины h,

то в силу соотношения (21) имеем $\lim\limits_{h\to 0}\rho_j^*(h)=\rho_j$, $j=\overline{1,n}$.

Таким образом, выбрав моменты квантования h достаточно малыми, можно определить мультипликаторы ρ_j с любой степенью точности, $j=\overline{1,m};\ m\le n$.

Пример. Пусть дано уравнение

$$\ddot{y}+p(t)y=q(t)u(ph), \qquad (22)$$

где $p(t)$ и $q(t)$ – ω-периодические функции. Разобьем отрезок $[0,\omega]$ на две части точкой $t=c$. На каждом из промежутков заменим непрерывные функции $p(t)$, $q(t)$ кусочно-постоянными $\overline{p}_k$, $\overline{q}_k$ ($k=1,2$) по правилам (3) следующим образом:

$$\overline{p}(t)=\begin{cases}\alpha^2 \text{ при } 0\le t<c,\\ \beta^2 \text{ при } c\le t<\omega,\end{cases}\quad \overline{p}(t)=\begin{cases}\alpha_1^2 \text{ при } 0\le t<c,\\ \beta_1^2 \text{ при } c\le t<\omega.\end{cases}$$

Таким образом, от системы с периодическими коэффициентами (22) осуществлен переход к системе с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{X}^*=A^*(t)X^*+B^*(t)u(ph), \qquad (23)$$

где

$$A^*(t)=\begin{cases}\overline{A}_1 \text{ при } 0\le t<c,\\ \overline{A}_2 \text{ при } c\le t<\omega,\end{cases}\quad B^*(t)=\begin{cases}\overline{B}_1 \text{ при } 0\le t<c,\\ \overline{B}_2 \text{ при } c\le t<\omega.\end{cases}$$

На отрезке $0\le t<c$ перепишем систему (23) в виде $\dot{x}_1=\overline{A}_1x_1+\overline{B}_1u_1(ph)$, где $\overline{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}$, $\overline{B}_1=\begin{pmatrix}0\\ \alpha_1^2\end{pmatrix}$. Одновременно рассмотрим систему с непрерывным управлением

$$\dot{x}_1=\overline{A}_1x_1+\overline{B}_1u_1(x), \qquad (24)$$

в которой управление имеет вид

$$u_1(x)=\overline{C}_1^Tx_1. \qquad (25)$$

Подставив управление (25) в уравнение (24), получим $\dot{x}_1=\left(\overline{A}_1+\overline{B}_1\overline{C}_1^T\right)x_1=\overline{M}_1x_1$. Заметим, что аналогичным образом определяется и матрица $\overline{M}_2$ при $t\in[c,\omega]$.

Найдем коэффициенты усиления $\overline{C}_1$, используя алгоритм, описанный в работе [13]. Пусть $\hat{C}_1=\begin{pmatrix}\overline{c}_1^{(1)}\\ \overline{c}_1^{(2)}\end{pmatrix}$. Тогда матрица $\overline{M}_1$ и ее характеристическое уравнение соответственно имеют вид

$$\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha^2+\alpha_1^2c_1^{(1)} & \alpha_1^2c_1^{(2)}\end{pmatrix},$$

и $\lambda^2-\alpha_1c_1^{(2)}\lambda+\alpha^2-\alpha_1^2c_1^{(1)}=0.$

На коэффициенты уравнения наложим условия Рауса – Гурвица: $\alpha_1c_1^{(2)}<0$, $\alpha^2-\alpha_1^2c_1^{(1)}<0$. Применяя замену (9), получим систему $\ddot{y}-\alpha^2y=\alpha_1^2u$, в которую подставим управление вида $u=\gamma_1\dot{y}+\gamma_2y$. Получим уравнение $\ddot{y}-\gamma_1\dot{y}+\left(\alpha^2-\gamma_2\right)=0$, характеристическое уравнение которого имеет вид $\lambda^2-\gamma_1\lambda+\left(\alpha^2-\gamma_2\right)=0$. Учитывая все условия, наложенные на коэффициенты данного уравнения, положим, что $\gamma_1=-5$, $\gamma_2=1$, $\alpha^2=5$. Используя формулы (12), получим $c_1^{(1)}=\dfrac{1}{\alpha_1^2}$, $c_1^{(2)}=-\dfrac{15}{\alpha_1^2}$. Отметим, что данные коэффициенты удовлетворяют условию Рауса – Гурвица. Матрица $\overline{M}_1$ в этом случае примет вид $\overline{M}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & -5\end{pmatrix}$, а ее характеристические числа – $\alpha_1=-4$, $\alpha_2=-1$.

Аналогично на промежутке $c\le t\le\omega$ уравнение (22) примет вид $\ddot{y}-\beta^2y=\beta_1^2u(ph)$, $k=1,2$, или $\dot{x}_2=\overline{A}_2x_2+\overline{B}_2\overline{C}_2^Tx_2(ph)$, где $\overline{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\beta^2 & 0\end{pmatrix}$, $\overline{B}_1=\begin{pmatrix}0\\ \beta_1^2\end{pmatrix}$. Повторяя предыдущие рассуждения, найдем коэффициенты усиления для уравнения (22) на данном отрезке: $c_2^{(1)}=\dfrac{1}{\beta_1^2}$, $c_2^{(2)}=-\dfrac{15}{\beta_1^2}$. Здесь $\overline{M}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{pmatrix}$, а $\delta_1=-5$, $\delta_2=-1$ – характеристические числа данной матрицы.

Как было показано выше, фундаментальная матрица непрерывно-дискретной системы (23) может быть оценена следующим образом:

$$X^*(t)\le e^{c\overline{M}_1}\cdot e^{(\omega-c)\overline{M}_2},$$

где $e^{c\overline{M}_1}\cdot e^{(\omega-c)\overline{M}_2}$ – матрица монодромии соответствующей системы с кусочно-постоянными периодическими коэффициентами и непрерывным управлением

$$\dot{x}^*=\left(A^*(t)+B^*(t)C^*(t)\right)x^*=M^*(t)x^*. \qquad (26)$$

Для вычисления коэффициентов характеристического уравнения данной матрицы воспользуемся результатами работы [13]. Так, характеристические числа матрицы (26) удовлетворяют квадратному уравнению

$$\eta^2+q\eta-\exp\left(\int_0^\omega trM^*(t)dt\right)=0,$$

где

$$q=e^{\lambda_1c+\delta_1T}+e^{\lambda_2c+\delta_2T}-$$
$$-\frac{\left(e^{\delta_2T}-e^{\delta_1T}\right)\left(e^{\lambda_2T}-e^{\lambda_1T}\right)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\delta_2-\delta_1)}(\lambda_2-\delta_2)(\lambda_1-\delta_1),$$

$T = \omega - c$, а $tr\, M^*(t) = \sum_{i=1}^{2} m_{ii}$ – след матрицы $M^*(t)$. Подставляя найденные значения λ_1, λ_2, δ_1, и δ_2 в данные формулы, получим

$$q = e^{c-5\omega} + e^{-\omega}, \quad \exp\left(\int_0^{\omega} trM(t)dt\right) = e^{-5\omega} + e^{-6\omega},$$

откуда $\eta^2 + (e^{c-5\omega} + e^{-\omega})\eta + e^{-5\omega} + e^{-6\omega} = 0$. Положим, $\omega = \ln 2$, $c = \frac{\ln 2}{2}$, тогда $\eta_1 \approx -0{,}558$, $\eta_2 \approx 0{,}102$. Абсолютные величинв корней характеристического уравнения меньше единицы. Отсюда заключаем, что решение системы (26) асимптотически устойчиво по Ляпунову, а значит при всех $h < h_0$ решение системы (23) также асимптотически устойчиво. В этом случае абсолютное значение мультипликаторов $\rho_j^*(h)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ системы (21) меньше единицы. По доказанной теореме $\lim_{h\to 0} \rho_j^*(h) = \rho_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, то есть мультипликаторы исходной непрерывно-дискретной периодической системы (17) также меньше единицы, что означает ее асимптотическую устойчивость [9, с. 189].

Таким образом, доказанная теорема позволяет использовать приближенно найденную матрицу монодромии для нахождения кусочно-постоянного управления применительно к непрерывно-дискретным системам второго порядка с периодическими матрицами коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Branicky M. S.** Stability of hybrid systems: state of art // Proceedin s of the 36th conference on Decision and Control. San Diego, California USA, December 1997. P. 120–125.
2. **Branicky M. S.** Stability of switched and hybrid systems // Proc. IEEE Conf. On Decision and Control. Lake Buena Vista, FL., December 1994. P. 3498–3503.
3. **Hu B., Michel A. N.** Stability analysis of a class of non-linear multi-rate digital control systems. //Circuits, Systems and Signal Processing. 1999. P. 43–57.
4. **Hui Te, Michel A. N.** Stability theory for hybrid dynamical systems // IEEE, Transactions automatic control. Vol. 43, № 4.
5. **Александров А. Ю., Платонов А. В.** Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями //Автоматика и телемеханика. 2008. Т.69. №7. С. 1101–1116.
6. **Васильев С. Н., Маликов А. И.** О некоторых результатах по устойчивости переключаемых гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 23–81.
7. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
8. **Учватова Н. Н., Щенников В. Н.** Моделирование управления в динамической системе второго порядка // Саранск: Изд-во Средневолжского математического общества, 2005. Препринт № 90.
9. **Воронов А. А.** Введение в динамику сложных управляемых систем. М. : Наука, 1985. 352 с.
10. **Зубов В. И.** Лекции по теории управления М.: Наука. 1975. 496 с.
11. **Учватова Н. Н., Щенников В. Н.** Приближенное построение стабилизирующего управления для системы второго порядка с периодическими коэффициентами // Морд. гос. ун-т им. Н.П.Огарева. – Саранск, 2002. 16 с. Деп. в ВИНИТИ № 375 В2002 от 26.02.02
12. **Лизина Е. А**. О стабилизации линейной непрерывно-дискретной системы с периодическими коэффициентами // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. IV Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. Пенза: Приволжский Дом знаний, 2012. 208 с. С. 58–64.
13. **Блинов И. Н.** Линейные дифференциальные системы с кусочно-постоянными периодическими коэффициентами // Автоматика и телемеханика, 1965. Т. XXVI. №1. С. 180–183.

Щенникова Елена Владимировна, д. ф.-м. н., профессор кафедры информатики и вычислительной техники Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева
430005, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68
тел. 8(8342)233205, e-mail: du@math.mrsu.ru