УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ КОЛМОГОРОВА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.В. Дружинина, Е.В. Лисовский
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН
Калужский филиал МГТУ имени Н.Э. Баумана

ON STABILITY AND CONVERGENCE OF DECISIONS OF THE KOLMOGOROV SYSTEMS IN INFINITE-DIMENSIONAL SPACE

O.V. Druzhinina, E.V. Lisovsky

В статье изучены вопросы устойчивости и сходимости решений систем Колмогорова в бесконечномерном пространстве на основе свойств локальной суммируемости, неотрицательности коэффициентов и диагонального доминирования.

Ключевые слова: бесконечномерные системы дифференциальных уравнений, системы Колмогорова, устойчивость, сходимость, логарифмическая норма.

The problems of stability and convergence of solutions of Kolmogorov's systems in infinite-dimensional space are studied in the paper on the basis of properties of local integrability, nonnegativity of coefficients and diagonal domination.

Keywords: infinite-dimensional systems of the differential equations, Kolmogorov's systems, stability, convergence, logarithmic norm.

Вопросы устойчивости и сходимости решений дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах с различных точек зрения рассматривались в [1–8] и в других работах. Качественные свойства решений систем Колмогорова [9] и их модификаций изучались в [10–14] и в других работах.

В статье рассматриваются сходимость и устойчивость решений некоторых счетных систем линейных дифференциальных уравнений, а именно счетных систем Колмогорова (далее K-системы) и счетных систем размножения и гибели (далее РГ-системы).

Рассматривается K-система вида

$$y_i' = -a_{ii}(t)\, y_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}(t)\, y_j, \quad i = 1, 2, \dots, \qquad (1)$$

в предположении, что выполнены следующие условия.

P_1. Коэффициенты $a_{ij}(t)$, входящие в (1), являются линейными комбинациями конечного числа локально суммируемых при $t \in R^+ ::= [0, \infty)$ функций.

P_2. Коэффициенты $a_{ij}(t)$ неотрицательны, то есть

$$a_{ij}(t) \ge 0 \quad \forall i, j, \ \forall t \in R^+. \qquad (2)$$

P_3. Коэффициенты $a_{ij}(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$a_{ii}(t) \ge \sum_{j \neq i} a_{ji}(t) \quad \forall i, \ \forall t \in R^+ \qquad (3)$$

или равенствам

$$a_{ii}(t) = \sum_{j \neq i} a_{ji}(t) \quad \forall i, \ \forall t \in R^+. \qquad (4)$$

Частным случаем K-системы (1) является РГ-система вида

$$\begin{gathered} y_1' = -\lambda_1 y_1 + \mu_2 y_2, \\ y_k' = \lambda_{k-1} y_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) y_k + \mu_{k+1} y_{k+1}, \end{gathered} \qquad (5)$$

получаемая из (1) при условиях: $a_{ij} = \lambda_j + \mu_j$ при $i = j$, $a_{ij} = \lambda_j$ при $i = j+1$, $a_{ij} = \mu_j$ при $i = j-1$, $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$, причем $\mu_1 = 0$, а другие коэффициенты удовлетворяют условиям (2) – (4).

Обозначим через l_1 пространство суммируемых последовательностей $x = \{x_i\}$ с нормой

$$\|x\| = \sum |x_i|.$$

В пространстве l_1 система (1) может быть представлена в виде эволюционного уравнения

$$y' = A(t)\, y. \qquad (6)$$

В силу условия P_1 на функции $a_{ij}(t)$ оператор $A(t)$ является ограниченным в пространстве l_1, а его норма $\|A(t)\|$ локально суммируемой.

Оператор $V\colon\ l_1 \to l_1$ называется положительным, если $x \in l_{1+} \Rightarrow \forall x \in l_{1+}$, где l_{1+} – конус векторов с неотрицательными координатами (в пространстве l_1).

Если решение уравнения (6) представимо в виде $y(t) = U(t,s)y(s)$, $t \ge s$, то оператор $U(t,s)$ называется оператором сдвига уравнения (6). Оператор сдвига $U(t,s)$ уравнения (6) является положительным при $t \ge s$.

Генеральным показателем уравнения (6) называется верхний предел

$$\kappa_g = \overline{\lim_{t,s\to\infty}}\ s^{-1} \ln \|U(t+s,\, t)\|).$$

Симплексом H_1 (соответственно и симплексом H_2) называется множество таких векторов $y = (y_1,\ \ y_2,\ldots)^T$ из конуса l_{1+}, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i \le 1$ (соответственно $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i = 1$).

Система (1) является H_1-инвариантной (соответственно и H_2-инвариантной), если она удовлетворяет условию (3) (соответственно и условию (4)). Действительно, если $y(0) \in H_1(H_2)$, то по условию (3) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i'(t) \le 0$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \le 1 \quad \forall t \in R^+.$$

Соответственно по условию (4)

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) = 1 \quad \forall t \in R^+.$$

Для изучения качественных свойств систем (1), (5) используется понятие логарифмической нормы [4, 15]. Для оператора *K*-системы логарифмическая норма определяется по формуле

$$\mu(A) = \sup_i \left(-a_{ii} + \sum_{j \ne i} a_{ji} \right). \qquad (7)$$

Рассмотрим *K*-систему в пространстве l_1, для которой выполнены условия, наложенные на коэффициенты системы: основное условие P_1, условие неотрицательности коэффициентов P_2 и условие диагонального доминирования P_3.

Нетрудно доказать, что в пространстве l_1 *K*-система устойчива.

Действительно, логарифмическая норма $\mu(A)$ оператора *K*-системы неположительна, то есть $\mu(A) \le 0$. Этот факт следует из определения логарифмической нормы (7) и условия диагонального доминирования. Очевидно, что для оператора сдвига $U(t,s)$ *K*-системы справедливо неравенство $\|U(t,s)\| \le 1 \quad \forall t \ge s$. Поэтому *K*-система устойчива по Ляпунову.

Теорема 1. Пусть 1) функции $a_{ij}(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in R^+$, 2) имеют место оценки

$$\sup\|A(t)\| \le N_1 < \infty,\ \sup\|A'(t)\| < N_2 < 1, \qquad (8)$$

3) существует натуральное число *k* такое, что

$$\exists b > 0,\ a_{kk}(t) \ge \sum_{i \ne k} a_{ik}(t) + b \quad \forall t \in R^+, \qquad (9)$$

$$a_{ii+1}(t) \ge a > 0,\ i \ge 1 \quad \forall t \in R^+. \qquad (10)$$

Тогда для решения $y(t)$ K-системы имеет место свойство

$$y_i(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,\ i = k, k+1, \ldots. \qquad (11)$$

Доказательство. В условиях теоремы достаточно рассмотреть лишь решения *K*-системы, выходящие из конуса l_{1+} (вследствие положительности оператора сдвига $U(t,s)$).

Имеет место следующее неравенство:

$$\sup_{t \ge t_0} |x'(t)| \le 4 \sup_{t \ge t_0} |x(t)| \cdot \sup_{t \ge t_0} |x''(t)|, \qquad (12)$$

если $x(t)$ – скалярная функция.

Из условий теоремы следует ограниченность $\|y(t)\|$ на R^+. В результате дифференцирования по t *K*-системы получим уравнение

$$y'' = A'(t)\, y + A(t)\, y'.$$

Для нормы $\|y'\|$ и $\|y''\|$ производных имеем следующие оценки:

$$\|y'(t)\| = \|A(t)y\| \le N_1 \|y(t)\|, \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} \|y''(t)\| &\le \|A'(t)y\| + \|A(t)y'\| \le \\ &\le N_2\|y(t)\| + N_1\|y'(t)\| \le (N_2 + N_1^2)\|y(t)\|. \end{aligned} \qquad (14)$$

Из (13), (14) вытекает, что нормы первой и второй производных ограничены на R^+.

Из условия (9) имеем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i' \le -b\, y_k$.

Поскольку норма $\|y(t)\|$ ограничена, то $\int\limits_0^{\infty} y_k(s)\, ds < \infty$.

Применяя неравенство (12) к интегралу $x(t) = \int\limits_0^t y_k(s)\, ds$ и устремляя t_0 к бесконечности, получим, что $y_k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Положим, что в (12) $x(t) = y_k(t)$ и, устремляя t к бесконечности, будем иметь, что $y_k'(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Установим теперь, что $y_{k+1}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. В самом деле, в правой части равенства

$$y_k' = a_{k1}y_1 + \ldots - a_{kk}y_k + a_{kk+1}y_{k+1} + \ldots \quad (15)$$

все слагаемые, за исключением одного, неотрицательны. Отрицательное слагаемое в (15) и левая часть (15) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, и поэтому $a_{kk+1}y_{k+1} \to 0$ при $t \to +\infty$. В силу условия (10) $y_{k+1}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Продолжая те же рассуждения, получим, что имеет место заключение (11). Теорема доказана.

Для бесконечномерной РГ-системы вида (5), где функции $\lambda_i(t)$ и $\mu_j(t)$ неотрицательны и являются ограниченными линейными комбинациями конечного числа локально суммируемых функций, получены теоремы о сходимости и устойчивости решений в предположении, что выполнены условия существования средних значений функций $\lambda_i(t)$ и $\mu_j(t)$. Доказательства базируются на результатах работ [2, 12], на применении теоремы 1 и свойствах логарифмической нормы для системы (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1949.
2. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1990. (2-е изд., доп. М.: Изд-во URSS, 2007).
3. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967.
4. **Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970.
5. **Curtain R.F., Pritchard A.** Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. – Berlin: Springler-Verlag, , 1978.
6. **Крейн С.Г., Хазан М.И.** Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т. 21. – С. 130–264.
7. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова исследования устойчивости и притяжения в общих временных системах // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 10. – С. 17–48.
8. **Шестаков А.А., Дружинина О.В.** О неустойчивости состояния равновесия по первому приближению стационарного нелинейного уравнения в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 840.
9. **Kolmogoroff A.** Über die analytischen Methoden in der wahrcheinlichkeitsrechnung // Mathematische Annalen. – 1931. – Vol. 104. – P. 415–458.
10. **Гнеденко Б.В., Макаров И.П.** Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, № 9. – С. 1696–1698.
11. **Зейфман А.И.** Качественные свойства неоднородных процессов рождения и гибели // Проблемы устойчивости стохастических моделей: тр. семинара. – М.: ВНИИ системных исследований, 1988. – С. 32–39.
12. **Дружинина О.В.** Асимптотические свойства и устойчивость решений бесконечномерных систем размножения и гибели – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.06.1993, № 1727-В93.
13. **Зейфман А.И., Коротышева А.В., Сатин Я.А., Шоргин С.Я.** Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами // Информатика и ее применения. – 2011. – Т. 5, № 3. – С. 27–33.
14. **Зейфман А.И., Королев В.Ю., Коротышева А.В., Шоргин С.Я.** Общие оценки устойчивости для нестационарных марковских цепей с непрерывным временем // Информатика и ее применения. – 2014. – Т. 8, № 1. – С. 106–117.
15. **Бойков И.В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008.

Дружинина Ольга Валентиновна, д. ф.-м. н.,
главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, ИЦ ИУ РАН
119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2
тел.: +7 (499) 135-52-09
главный научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65;
тел: +7 (495) 334-93-69; e-mail: ovdruzh@ipu.ru