УДК 517.91

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ПЕРВОГО РОДА ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

А.О. Харламова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

LIMIT CYCLES OF THE FIRST KIND PHASE SYSTEM

A.O. Kharlamova

Рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты. Получены условия существования предельного цикла первого рода. Рассмотрен пример математической модели системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами второго порядка в цепях управления.

Ключевые слова: фазовая система, предельные циклы, режимы синхронизации, вращение векторного поля, неподвижная точка, оператор сдвига по траекториям.

We consider a system of differential equations, a mathematical model of the frequency phase-locked loop. The conditions of existence of limit cycle of the first kind. An example of a mathematical model of frequency phase-locked system with a first-order filters in the control circuits.

Keywords: phase system, limit cycles, timing, the rotation of the vector field, a fixed point, the shift operator along trajectories.

Введение. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП). Базовая математическая модель системы ЧФАП приводится к системе дифференциальных уравнений [1–3]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d\,\frac{2kc^T x}{1+\tau^2 (c^T x)^2}\,, \quad \dot{\sigma} = c^T x\,, \quad (1)$$

где $x,b,c,d \in \mathbf{R}^2$, $k,\tau \in \mathbf{R}$, $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая, непрерывно дифференцируемая функция. Для системы ЧФАП продолжены исследования, проведенные в работах [1, 2], решается задача определения условий существования предельных циклов первого рода. Теоретическому исследованию динамики систем ЧФАП посвящена обширная литература [1–8], основные результаты относятся к определению областей существования синхронных режимов, которые являются рабочими режимами для системы ЧФАП. Нахождение синхронных режимов связано с условиями глобальной устойчивости и определением областей притяжения состояний равновесия системы (1). Менее изученными являются условия реализации колебательных режимов. Установление в системе ЧФАПЧ колебательного режима связано с нарушением устойчивости состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации и образованию устойчивого предельного цикла вокруг этого состояния равновесия. При исследовании системы (1) в работе используются результаты, полученные в [5–8].

Теоретические исследования. Условия, обеспечивающие существование предельного цикла первого рода, определяются результатами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = \xi_2 > 0$, $l^T d = -\xi_1 < 0$, $rang\|c,l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k > 0$;

2) $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, для $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$ справедливы соотношения $\varphi(\sigma) = a_2\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma})$, $|\varphi_2(\tilde{\sigma})| \le \tau_1 + \tau_2|\tilde{\sigma}|$, $\tau_1 \ge 0$, $\tau_2 \ge 0$, $\varphi(\sigma) = \varphi(\tilde{\sigma} + \sigma_1) = \varphi_0(\tilde{\sigma})$, $\dot{\varphi}_0(0) > 0$, $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_1$, $\dot{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_2) < 0$, $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma})$ – ограничена на сегменте $[0;\Delta]$;

3) существуют h_1, h_2, λ_1, $\lambda_2 \in \mathrm{R}$, удовлетворяющие неравенствам

$$2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1} > 0\,, \qquad (2)$$

$$h_2^2 = a_2\Gamma - h_1\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) > 0\,, \qquad (3)$$

$$(h_1^2 + h_2^2)\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - h_1 a_2 \Gamma \le 0\,, \qquad (4)$$

$$2\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1} \ge 0, \qquad (5)$$

$$\lambda_2^2 = a_2\Gamma + \lambda_1\left(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) > 0\,, \qquad (6)$$

$$\lambda_1 < \nu\Gamma^{-1}; \qquad (7)$$

4) пусть $\delta_1 = \nu\Gamma^{-1}\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) + \beta_1$, $\delta_2 = \nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1$, $\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1 < 0$, $g(R) = \dfrac{R\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\lambda_2\left(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}\right)}\left(|\delta_1| + 2k|\delta_2|\right)$ и существуют R, r,

$r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$r_1 > g(R),\ r_2 > g(R),\ r^* = \max\{r_1; r_2\}, \qquad (8)$$

$$r^* R + R^2\left(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) + \frac{\Gamma R^3}{\lambda_2^2}\left(\tau_1 + \frac{\tau_2}{\lambda_2}R\right) + \frac{k\xi_2 R}{\tau} < 0, \qquad (9)$$

$$-r^* + r\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - \frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^2 - \frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^3 -$$

$$-2k\xi_2\tau^2\left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_2^2}\right)^{3/2} r^3 > 0, \qquad (10)$$

$$\sqrt{\frac{R^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} < \tilde{\sigma}_2; \qquad (11)$$

5) для функции $\mathrm{U}^{\pm}(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}h_1 \pm \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2}$ справедливо неравенство

$$\left(\mathrm{U}^{\pm}(\tilde{\sigma}) + \tilde{\sigma}\lambda_1\right)^2 + \tilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2 < 0, \qquad (12)$$

где $\tilde{\sigma} \in \left[-\frac{r}{h_2}; \frac{r}{h_2}\right]$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $W_1(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x - r_1$, $W_2(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x + r_2$, $V_1(z) = \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)^2 + +\tilde{\sigma}^2 h_2^2 - r^2$, $V_2(z) = \left(c^T x + \tilde{\sigma}\lambda_1\right)^2 + \tilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, $r_1 > g(R)$, $r_2 > g(R)$, r, R, r_1, r_2 удовлетворяют условию 4) теоремы. Пусть $\Omega_1 = \{z : W_1(z) \le 0\}$, $\Omega_2 = \{z : W_2(z) \ge 0\}$, $\Omega_3 = \{z : V_1(z) \ge 0\}$, $\Omega_4 = \{z : V_2(z) \le 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$. Граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : W_1(z) = 0,\ V_1(z) \ge 0, V_2(z) \le 0\},$$

$$\partial\Omega_2 = \{z : W_2(z) = 0,\ V_1(z) \ge 0, V_2(z) \le 0\},$$

$$\partial\Omega_3 = \{z : V_1(z) = 0, W_1(z) \le 0, W_2(z) \ge 0\},$$

$$\partial\Omega_4 = \{z : V_2(z) = 0, W_1(z) \le 0, W_2(z) \ge 0\},$$

причем из условия 5) теоремы следует, что пересечение множеств $\partial\Omega_3$ и $\partial\Omega_4$ пусто.

Рассмотрим множество $\partial\Omega_1$. Если $z \in \partial\Omega_1$, то справедливы соотношения:

$$l^T x = r_1 - \nu\Gamma^{-1}c^T x, \qquad (13)$$

$$V_2(z) = \left(c^T x + \tilde{\sigma}\lambda_1\right)^2 + \tilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2 = \left(c^T x\right)^2 + 2\left(c^T x\right)\tilde{\sigma}\lambda_1 + \tilde{\sigma}^2\lambda_1^2 +$$

$$+\tilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2 = \tilde{\sigma}^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) + 2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\,\frac{c^T x\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\tilde{\sigma} +$$

$$+\frac{\left(c^T x\right)^2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} - \frac{\left(c^T x\right)^2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \left(c^T x\right)^2 - R^2 = \left(\tilde{\sigma}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^T x\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\right)^2 + \left(c^T x\right)^2\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} - R^2 \le 0. \qquad (14)$$

Используя соотношение (14), получим неравенство

$$\left|c^T x\right| \le \frac{R}{\lambda_2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \qquad (15)$$

Из условий 1), 4) теоремы и (8), (13)–(15) следует, что производная функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{W}_1(z) = l^T Ax + l^T b\varphi(\sigma) + l^T d\frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2} + \nu\Gamma^{-1}c^T Ax +$$

$$+\nu\Gamma^{-1}c^T b\varphi(\sigma) + \nu\Gamma^{-1}c^T d\frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2} = -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x +$$

$$+\nu\varphi(\sigma) - \frac{2k\xi_1 c^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2} + \nu\Gamma^{-1}l^T x - \nu\varphi(\sigma) + \nu\Gamma^{-1}\frac{2k\xi_2 c^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2} =$$

$$= l^T x\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) - \beta_1 c^T x + \left(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1\right)\frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2} =$$

$$= \left(r_1 - \nu\Gamma^{-1}c^T x\right)\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) - \beta_1 c^T x + \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2}\left(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \right.$$

$$\left. - \xi_1\right) = c^T x\left(\nu\Gamma^{-1}\alpha_1 - \nu^2\Gamma^{-2} - \beta_1\right) + \nu\Gamma^{-1}r_1 - \alpha_1 r_1 +$$

$$+\left(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1\right)\frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2} = c^T x\left(\nu\Gamma^{-1}\alpha_1 - \nu^2\Gamma^{-2} - \beta_1\right) +$$

$$+ r_1\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) + \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2}\left(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1\right) \le$$

$$\le \left|c^T x\right|\left|\delta_1\right| + r_1\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) + \frac{2k\left|c^T x\right|}{1 + \tau^2(c^T x)^2}\left|\delta_2\right| <$$

$$< \left|c^T x\right|\left|\delta_1\right| - g(R)\left(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) + \frac{2k\left|c^T x\right|}{1 + \tau^2(c^T x)^2}\left|\delta_2\right| \le$$

$$\le \frac{R\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\lambda_2}\left|\delta_1\right| - g(R)\left(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) + 2k\left|\delta_2\right|\frac{R\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\lambda_2} =$$

$$= \frac{R\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\lambda_2}\left(\left|\delta_1\right| + 2k\left|\delta_2\right|\right) - g(R)\left(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) = 0. \qquad (16)$$

Из (16) получим, что для производной функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$ выполняется неравенство

$$\dot{W}_1(z) < 0. \qquad (17)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_2$. Если $z \in \partial\Omega_2$, то справедливы (14), (15) и соотношение

$$l^T x = -r_2 - \nu\Gamma^{-1}c^T x. \qquad (18)$$

Используя условия 1), 4) теоремы (8), (14), (15) и (18) имеем, что производная функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{W}_2(z) = c^T x\left(\nu\Gamma^{-1}\alpha_1 - \nu^2\Gamma^{-2} - \beta_1\right) - r_2\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) + \frac{2kc^T x}{1+\tau^2(c^T x)^2}\left(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1\right) \geq -\left|c^T x\right|\left|\delta_1\right| - \frac{2k\left|c^T x\right|}{1+\tau^2(c^T x)^2}\left|\delta_2\right| - r_2\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) \geq$$
$$\geq -\frac{R\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\lambda_2}\left|\delta_1\right| + r_2\left(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - 2k\left|\delta_2\right|\frac{R\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\lambda_2} > -\frac{R\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\lambda_2} \times$$
$$\times\left(\left|\delta_1\right| + 2k\left|\delta_2\right|\right) + g(R)\left(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) = 0. \quad (19)$$

Из (19) получили, что производная функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{W}_2(z) > 0. \quad (20)$$

В системе (1) сделаем замену переменных $\sigma = \tilde{\sigma} + \sigma_1$. Тогда в силу условия 2) теоремы система (1) примет вид

$$\dot{x} = Ax + a_2\tilde{\sigma}b + \tilde{\sigma}^2\varphi_2(\tilde{\sigma})b + 2kd(c^T x) - 2k\tau^2 d\frac{(c^T x)^3}{1+\tau^2(c^T x)^2}, \quad \dot{\tilde{\sigma}} = c^T x. \quad (21)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3$. Если $z \in \partial\Omega_3$, то справедливо равенство

$$V_1(z) = \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)^2 + \tilde{\sigma}^2 h_2^2 - r^2 = \left(\tilde{\sigma}\sqrt{h_1^2+h_2^2} - \frac{c^T x h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)^2 + \left(c^T x\right)^2\frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - r^2 = 0. \quad (22)$$

Следовательно, в силу (22) для $z \in \partial\Omega_3$ выполняются неравенства:

$$\left|c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right| \leq r, \quad (23)$$

$$\left|\tilde{\sigma}\right| \leq \frac{r}{h_2}, \quad (24)$$

$$\left|c^T x\right| \leq \frac{r\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{h_2}, \quad (25)$$

$$\left|l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x\right| \leq r_2 \leq r^*. \quad (26)$$

Используя условия 1)–4) теоремы, найдем производную функции $V_1(z)$ в силу системы (21) на множестве $\partial\Omega_3$

$$2^{-1}\dot{V}_1(z) = \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\left(c^T Ax + c^T ba_2\tilde{\sigma} + c^T b\tilde{\sigma}^2\varphi_2(\tilde{\sigma}) + 2kc^T d\left(c^T x - \frac{\tau^2\left(c^T x\right)^3}{1+\tau^2\left(c^T x\right)^2}\right) - c^T xh_1\right) + \tilde{\sigma}c^T xh_2^2 =$$
$$= \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\left(l^T x - a_2\Gamma\tilde{\sigma} + 2k\xi_2 c^T x - \Gamma\tilde{\sigma}^2\varphi_2(\tilde{\sigma}) - \frac{2k\tau^2\xi_2\left(c^T x\right)^3}{1+\tau^2\left(c^T x\right)^2} - c^T xh_1\right) + \tilde{\sigma}c^T xh_2^2 =$$
$$= \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\left(l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x\right) + \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\left(-\nu\Gamma^{-1}c^T x - a_2\Gamma\tilde{\sigma} + 2k\xi_2 c^T x - c^T xh_1\right) + \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\left(-\Gamma\tilde{\sigma}^2\varphi_2(\tilde{\sigma})\right) -$$
$$- 2k\tau^2\xi_2\left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\frac{\left(c^T x\right)^3}{1+\tau^2\left(c^T x\right)^2} + \tilde{\sigma}c^T xh_2^2. \quad (27)$$

Найдём оценки слагаемых в выражении (27). Используя неравенства (23)–(26), получим:

$$\left|c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right|\left|l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x\right| \leq rr^*, \quad (28)$$

$$\left|c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right|\frac{2k\tau^2\xi_2\left|c^T x\right|^3}{1+\tau^2\left|c^T x\right|^2} \leq 2k\tau^2\xi_2 r^4\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}}{h_2^3}, \quad (29)$$

$$\left|c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right|\Gamma\tilde{\sigma}^2\left|\varphi_2(\tilde{\sigma})\right| \leq r^3\Gamma\frac{\left|\tau_1 + \tau_2\left|\tilde{\sigma}\right|\right|}{h_2^2} \leq \frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^3 + \frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^4. \quad (30)$$

Из соотношений (22), (28)–(30) следует, что (27) примет вид

$$2^{-1}\dot{V}_1(z) \geq -rr^* + \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\left(c^T x\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - \tilde{\sigma}h_1\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) + \tilde{\sigma}h_1\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - \tilde{\sigma}a_2\Gamma\right) +$$
$$+ h_2^2\tilde{\sigma}c^T x - \frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^3 - \frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^4 - 2k\tau^2\xi_2\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}}{h_2^3}r^4 =$$
$$= -rr^* + \left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right)\left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)^2 + \left(c^T x - \tilde{\sigma}h_1\right)\tilde{\sigma}\left(h_1\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - a_2\Gamma\right) + h_2^2\tilde{\sigma}c^T x - \frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^3 -$$
$$- \frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^4 - 2k\tau^2\xi_2\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}}{h_2^3}r^4 = -rr^* + r^2\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) + \left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right)\left(-h_2^2\right)\tilde{\sigma}^2 +$$
$$+ c^T x\tilde{\sigma}\left(h_1\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - a_2\Gamma + h_2^2\right) - \tilde{\sigma}^2 h_1\left(h_1\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - a_2\Gamma\right) - \frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^3 - \frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^4 -$$
$$- 2k\tau^2\xi_2\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}}{h_2^3}r^4 = -rr^* + r^2\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) + c^T x\tilde{\sigma}\left(h_1\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - a_2\Gamma + h_2^2\right) -$$
$$- \tilde{\sigma}^2\left(\left(h_1^2 + h_2^2\right)\left(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}\right) - h_1 a_2\Gamma\right) -$$

$$-\frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^3-\frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^4-2k\tau^2\xi_2\frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}}{h_2^3}r^4>$$
$$>-r^*+r\left(2k\xi_2-h_1-\nu\Gamma^{-1}\right)-\frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^2-$$
$$-\frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^3-2k\xi_2\tau^2\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{h_2^2}\right)^{3/2}r^3>0. \quad (31)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_4$. Если $z\in\partial\Omega_4$, то справедливо равенство

$$V_2(z)=\left(c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right)^2+\tilde\sigma^2\lambda_2^2-R^2=\left(c^Tx\right)^2+$$
$$+2\left(c^Tx\right)\tilde\sigma\lambda_1+\tilde\sigma^2\lambda_1^2+\tilde\sigma^2\lambda_2^2-R^2=\left(\tilde\sigma^2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)\right)+$$
$$+2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\frac{c^Tx\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\tilde\sigma+\frac{\left(c^Tx\right)^2\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-\frac{\left(c^Tx\right)^2\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+$$
$$+\left(c^Tx\right)^2-R^2=\left(\tilde\sigma\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+\frac{c^Tx\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\right)^2+$$
$$+\left(c^Tx\right)^2\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-R^2=0. \quad (32)$$

Следовательно, в силу (32) для $z\in\partial\Omega_4$ выполняются неравенства:

$$\left|c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right|\le R, \quad (33)$$

$$\left|\tilde\sigma\right|\le\frac{R}{\lambda_2}, \quad (34)$$

$$\left|c^Tx\right|\le\frac{R\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\lambda_2}, \quad (35)$$

$$\left|l^Tx+\nu\Gamma^{-1}c^Tx\right|\le r_2\le r^*. \quad (36)$$

Используя условия 1)–4) теоремы, найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (21) на множестве $\partial\Omega_4$

$$2^{-1}\dot V_2(z)=\left(c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right)\left(l^Tx-a_2\Gamma\tilde\sigma-\Gamma\tilde\sigma^2\varphi_2(\tilde\sigma)+\right.$$
$$\left.+2k\xi_2\frac{c^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2}+c^Tx\lambda_1\right)+\lambda_2^2\tilde\sigma c^Tx=$$
$$=\left(c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right)\left(l^Tx+\nu\Gamma^{-1}c^Tx\right)+\left(c^Tx+\right.$$
$$\left.+\tilde\sigma\lambda_1\right)\left(-\nu\Gamma^{-1}c^Tx-a_2\Gamma\tilde\sigma+c^Tx\lambda_1\right)+\left(c^Tx+\right.$$
$$\left.+\tilde\sigma\lambda_1\right)\left(-\Gamma\tilde\sigma^2\varphi_2(\tilde\sigma)\right)+\left(c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right)\times$$
$$\times2k\xi_2\frac{c^Tx}{1+\tau^2\left(c^Tx\right)^2}+\tilde\sigma c^Tx\lambda_2^2. \quad (37)$$

Используя неравенства (33)–(36), сделаем оценку слагаемых в выражении (37):

$$\left|c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right|\left|l^Tx+\nu\Gamma^{-1}c^Tx\right|\le Rr^*, \quad (38)$$

$$\left|c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right|\frac{2k\xi_2\left|c^Tx\right|}{1+\tau^2\left|c^Tx\right|^2}\le\frac{Rk\xi_2}{\tau}, \quad (39)$$

$$\left|c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right|\Gamma\left|\tilde\sigma^2\right|\left|\varphi_2(\tilde\sigma)\right|\le R^3\Gamma\frac{\left|\tau_1+\tau_2\left|\tilde\sigma\right|\right|}{\lambda_2^2}\le$$
$$\le\frac{\Gamma\tau_1}{\lambda_2^2}R^3+\frac{\Gamma\tau_2}{\lambda_2^3}R^4. \quad (40)$$

Исходя из соотношений (38)–(40), выражение (37) имеет оценку

$$2^{-1}\dot V_2(z)\le Rr^*+\left(c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right)\left(c^Tx\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)+\right.$$
$$\left.+\tilde\sigma\lambda_1\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)-\tilde\sigma\lambda_1\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)-\tilde\sigma a_2\Gamma\right)+$$
$$+\frac{R^3\Gamma}{\lambda_2^2}\left(\tau_1+\tau_2\frac{R}{\lambda_2}\right)+\frac{Rk\xi_2}{\tau}+\lambda_2^2\tilde\sigma c^Tx=$$
$$=Rr^*+\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\left(c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right)^2-\left(c^Tx+\tilde\sigma\lambda_1\right)\left(a_2\Gamma+\right.$$
$$\left.+\lambda_1\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\right)\tilde\sigma+\lambda_2^2\tilde\sigma c^Tx+\frac{R^3\Gamma}{\lambda_2^2}\left(\tau_1+\tau_2\frac{R}{\lambda_2}\right)+$$
$$+\frac{Rk\xi_2}{\tau}=Rr^*+\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)R^2-\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\lambda_2^2\tilde\sigma^2-$$
$$-c^Tx\tilde\sigma\left(a_2\Gamma+\lambda_1\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\right)+c^Tx\tilde\sigma\lambda_2^2-$$
$$-\lambda_1\tilde\sigma^2\left(a_2\Gamma+\lambda_1\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\right)+\frac{R^3\Gamma}{\lambda_2^2}\left(\tau_1+\tau_2\frac{R}{\lambda_2}\right)+$$
$$+\frac{Rk\xi_2}{\tau}=Rr^*+\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)R^2-\tilde\sigma^2\left(\lambda_2^2(\lambda_1-\right.$$
$$\left.-\nu\Gamma^{-1}\right)+\lambda_1a_2\Gamma+\lambda_1^2\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\Big)+c^Tx\tilde\sigma\left(\lambda_2^2-\right.$$
$$\left.-a_2\Gamma-\lambda_1\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\right)+\frac{R^3\Gamma}{\lambda_2^2}\left(\tau_1+\tau_2\frac{R}{\lambda_2}\right)+$$
$$+\frac{Rk\xi_2}{\tau}\le Rr^*+\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)R^2+$$
$$+\frac{R^3\Gamma}{\lambda_2^2}\left(\tau_1+\tau_2\frac{R}{\lambda_2}\right)+\frac{Rk\xi_2}{\tau}<0. \quad (41)$$

Из (17), (20), (31), (41) следует, что множество Ω является положительно инвариантным.

Рассмотрим функцию $Q_0(z)=\tilde\sigma$ и плоскость $P=\{z:Q_0(z)=0\}$. Найдём пересечение множества Ω и плоскости P, обозначим получившиеся множества через D_1 и D_2, тогда $\Omega\cap P=D_1\cup D_2$, где $D_1=\Omega\cap P\cap\{z:c^Tx>0\}$, $D_2=\Omega\cap P\cap\{z:c^Tx<0\}$. Рассмотрим функцию $Q_1(z)=c^Tx$ и плоскость $L=\{z:Q_1(z)=0\}$. Найдём пересечение множества Ω и плоскости L, обозначим получившиеся множества через D_3 и D_4, тогда $\Omega\cap L=D_3\cup D_4$, где $D_3=\Omega\cap L\cap\{z:\tilde\sigma>0\}$, $D_2=\Omega\cap L\cap\{z:\tilde\sigma<0\}$. Используя условия 1) и 2) теоремы, неравенство (11), положительную инвариантность множества Ω, рассуждения леммы 3.1 [4, с. 111] и леммы И. Барбалата

[11, с. 230], получим, что функция $\widetilde{\sigma}(t)$ бесконечное число раз меняет знак.

Возьмём точку $z_0 \in D_1$, которая определяет решение $z(t,z_0)$, $z(t_0) = z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, g_{z_0} – траектория, соответствующая решению $z(t,z_0)$. Для $z_0 \in D_1$ справедливо соотношение $\dot{Q}_0(z_0) = = \dot{\widetilde{\sigma}} = c^T x_0 > 0$. Следовательно, множество D_1 – бесконтактно и существует значение времени T_1 такое, что $\widetilde{\sigma}(t_0 + T_1) > 0$. Поскольку функция $\widetilde{\sigma}(t)$ бесконечное число раз меняет знак, то существует такое значение времени T_2, что $\widetilde{\sigma}(t_0+T_2)<0$ и траектория g_{z_0} пересекает множество D_2 в точке z_2. Пусть $z_2 \in D_2$. В этом случае справедливо соотношение $\dot{Q}_0(z_2) = \dot{\widetilde{\sigma}} = c^T x_2 < 0$. Так как функция $\widetilde{\sigma}(t)$ бесконечное число раз меняет знак, то существует значение времени T_3, при котором траектория g_{z_0} в момент времени T_3 пересекает множество D_4. С учетом того, что функция $\widetilde{\sigma}(t)$ бесконечное число раз меняет знак, существует такое значение времени T_4, при котором $\widetilde{\sigma}(t_0+T_4)>0$ и траектория g_{z_0} пересекает множество D_1. Так как функция $\widetilde{\sigma}(t)$ непрерывная, то существует $T_z \in (t_0+T_2; t_0+T_4)$ такое, что $z(t_0,T_z)=0$. Тогда $\bar{z} = z(t_0+T_z) \in D_1$ и $z_0 \in D_1$. Введем оператор $U(z_0) = z(t_0+T_z) = \bar{z}$. Из непрерывности траекторий g_{z_0} системы (1) и того факта, что D_1 – множество без контакта, следует непрерывность оператора U [4]. Множество D_1 – замкнутое, ограниченное, выпуклое, оператор U отображает множество D_1 в себя, $U(D_1) \subset D_1$. Тогда, по теореме Брауэра, существует неподвижная точка оператора U такая, что $Uz^* = z^* \in D_1$. Неподвижная точка z^* определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1) имеет предельный цикл первого рода. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1), где $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\alpha_1 > 0,\ \beta_1 > 0,\ k > 0$. Тогда $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = \xi_2 > 0$, $l^T d = -\xi_1 < 0$, $rang\|c,l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$. Для системы (1) выполнено условие 1) теоремы.

Рассмотрим случай $\alpha_1 = 1.25$, $\beta_1 = 0.0519$, $\xi_1 = 0.0344$, $\xi_2 = 0.8$, $\Gamma = 1$, $\nu = 0.043$, $\tau = 55.9$, $k = 0.0324$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.4$.

Функция $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая с периодом $\Delta = 2\pi$. Уравнение $\varphi(\sigma) = 0$ на сегменте $[0;\Delta]$ имеет два корня $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, где $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, $\sigma_1 = \arcsin\gamma$, $\sigma_2 = \pi - \arcsin\gamma$, получим $\sigma_1 = 0.412$, $\sigma_2 = 2.73$. Обозначим $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$, тогда $\sigma = \widetilde{\sigma} + \sigma_1$. Функцию $\varphi(\sigma)$ представим в виде $\varphi(\sigma) = \grave{a}_2\widetilde{\sigma} + + \widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma})$. Для этого найдем производные функции $\varphi_0(\widetilde{\sigma}) = \varphi(\widetilde{\sigma} + \sigma_1) = -\gamma + \sin(\widetilde{\sigma} + \sigma_1)$ в нуле, получим разложение функции $\varphi_0(\widetilde{\sigma})$ в ряд

$$\varphi_0(\widetilde{\sigma}) = (\cos\sigma_1)\widetilde{\sigma} - \frac{\sin\sigma_1}{2!}\widetilde{\sigma}^2 - \frac{\cos\sigma_1}{3!}\widetilde{\sigma}^3 + \frac{\sin\sigma_1}{4!}\widetilde{\sigma}^4 + \ldots,$$

отсюда определим $a_2 = \cos\sigma_1 = \sqrt{1-\gamma^2} = 0.917$. Найдем разложение в ряд функции $\varphi_2(\widetilde{\sigma})$:

$$\varphi_2(\widetilde{\sigma}) = \left(-\frac{\gamma}{2!} + \frac{\gamma}{4!}\widetilde{\sigma}^2 - \frac{\gamma}{6!}\widetilde{\sigma}^4 + \ldots\right) +$$

$$+\widetilde{\sigma}\cos\sigma_1\left(-\frac{1}{3!} + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{5!} - \frac{\widetilde{\sigma}^4}{7!} + \ldots\right) = \varphi_{21} + \widetilde{\sigma}\varphi_{22},$$

где, $\varphi_{21} = -\frac{\gamma}{2!} + \frac{\gamma}{4!}\widetilde{\sigma}^2 - \frac{\gamma}{6!}\widetilde{\sigma}^4 + \ldots$, $\varphi_{22} = \cos\sigma_1\left(-\frac{1}{3!} + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{5!} - \frac{\widetilde{\sigma}^4}{7!} + \ldots\right)$. Ряды φ_{21} и φ_{22} – знакочередующиеся, сходящиеся, сумма которых не превосходит первого члена. Тогда $|-\varphi_2| \leq |-\varphi_{21}| + |\widetilde{\sigma}||-\varphi_{22}| \leq \leq \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{6}a_2|\widetilde{\sigma}|$. Таким образом справедливо неравенство $|\varphi_2(\widetilde{\sigma})| \leq \tau_1 + \tau_2|\widetilde{\sigma}|$, где $\tau_1 = \frac{1}{2}\gamma = 0.2$ и $\tau_2 = = \frac{1}{6}\sqrt{1-\gamma^2} = 0.153$. Найдем $\dot{\varphi}_0(0) = \cos 0 = 1 > 0$, $\dot{\varphi}_0(\widetilde{\sigma}_2) = \cos\sigma_2 = \cos 2.73 = -0.916 < 0$, $\dot{\varphi}(\widetilde{\sigma}) = = \cos\widetilde{\sigma}$ – ограниченная функция на сегменте $[0;\Delta]$. Для системы (2) выполнено условие 2) теоремы.

Решая неравенства (2)–(4) относительно h_1 и неравенства (5)–(7) относительно λ_1, получим, что $h_1 \in [0.004388; 0.008776)$, $\lambda_1 \in [0.0215; 0.043)$. Для системы (1) выполнено условие 3) теоремы.

Найдём $\delta_1 = 0.00001$, $\delta_2 = 0$, $\nu\Gamma^{-1} = -1.207$, $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.153$, возьмём $h_1 = 0.0044$, $\lambda_1 = 0.022$ и по формулам (3), (6) определим $h_2 = 0.9573$, $\lambda_2 = 0.9571$. Для соотношений (8), (9) возьмём $r^* = g(R) + 10^{-7}$. Подставим r^* в неравенство (9).

Решение неравенства (9) определяется корнями многочлена четвертой степени. Численно доказывается, что если $R \in [0.0357;\ 0.0554)$, то неравенство (9) выполнено. Выберем $R = 0.036$ и определим $g(R)$, получим, что $g(R) = 2.983 \cdot 10^{-7}$. Тогда $r^* = 2.983 \cdot 10^{-7}$. Подставим r^* в неравенство (10). Решение неравенства (10) определяется корнями многочлена третьей степени. Численно доказывается, что неравенство (10) выполняется, если $r \in [0.0000685;\ 0.00452]$. Выберем, $r = 0.004$. Найдём $\widetilde{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_1 = 2.318$. В этом случае $\sqrt{\dfrac{R^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = 1.8957 < 2.318$. Для системы (1) выполнено условие 4) теоремы.

Численно доказывается, что для $\widetilde{\sigma} \in$ $\in [-0.0003133;\ 0.003133]$ выполняется условие 5) теоремы.

Для системы (1) выполнены условия теоремы. Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода. Условия теоремы позволяют определить область начальных условий цикла первого рода системы (1).

Для рассматриваемого примера найдём $D_1 = \Omega \bigcap \{z : c^T x > 0\} \bigcap \{z : \widetilde{\sigma} = 0\}$. Для границы множества Ω возьмём $r_1 = r_2 = r^*$. Множество D_1 определяется линиями

$$L_1 : \left(c^T x - \widetilde{\sigma} h_1\right)^2 + \widetilde{\sigma}^2 h_2^2 = r^2 \Leftrightarrow x_2 = r \Leftrightarrow x_2 = 0.004,$$

$$L_2 : l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x = r_1 \Leftrightarrow x_1 + \nu \Gamma^{-1} x_2 = r_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 0.043 x_2 = 2.983 \cdot 10^{-7},$$

$$L_3 : \left(c^T x + \widetilde{\sigma} \lambda_1\right)^2 + \widetilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 = R^2 \Leftrightarrow x_2 = R \Leftrightarrow x_2 = 0.036,$$

$$L_4 : l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x = -r_2 \Leftrightarrow x_1 + \nu \Gamma^{-1} x_2 = -r_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 0.043 x_2 = -2.983 \cdot 10^{-7}.$$

Множество D_1 содержится в плоскости $P = \{z : \sigma - \sigma_1 = 0\}$, где $\sigma_1 = 0.412$. На рисунках 1, 2, 3 изображено множество D_1, ограниченное линиями L_1, L_2, L_3, L_4, и его отображение оператором T.

Численными методами доказывается, что цикл первого рода определяется начальными условиями $\delta_1 = -0.0004043$, $x_2 = 0.009401$, $\sigma = 0.412$. На рисунке 3 изображена точка $N(-0.0004043, 0.009401, 0.412)$.

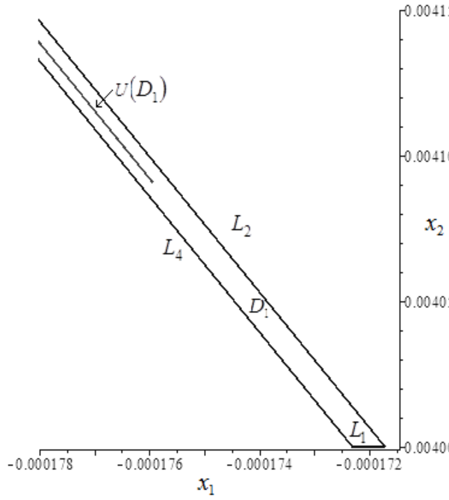

Рис. 1

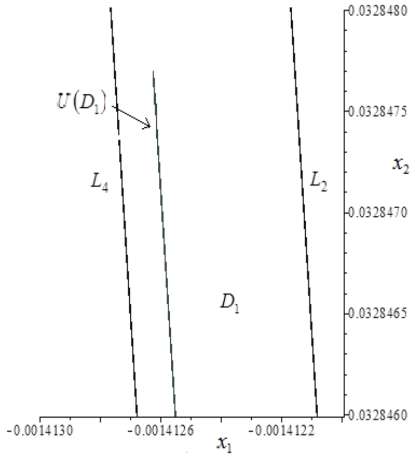

Рис. 2

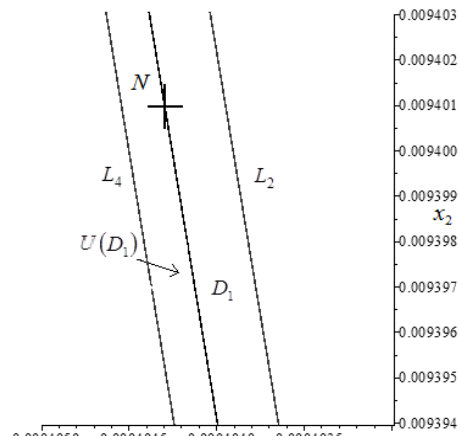

Рис. 3

На рисунке 4 изображена проекция цикла первого рода системы (1) на плоскости (x_2, σ).

Таким образом, для системы (1) определены условия существования предельного цикла первого рода. Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они позволяют использовать систему ЧФАПЧ как генератор модулированных колебаний, а также определять условия существования квазисинхронных режимов.

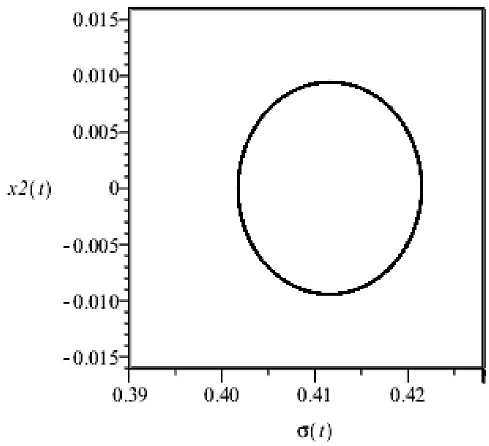

Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шалфеев В.Д.** К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Радиофизика. – 1969. – Т. 12, № 7. – С. 1037−1051.
2. **Пономаренко В.П., Матросов В.В.** Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки // Радиотехника и электроника. – 1997. – Т. 42, № 9. – С. 1125–1133.
3. **Шалфеев В.Д., Матросов В.В.** Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. – 366 с.
4. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. − СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1992. – 368 с.
5. **Мамонов С.С.** Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 70−81.
6. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Условия существования предельных циклов второго рода для модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 13, № 4. –С. 51–57.
7. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Влияние частотного кольца системы фазовой автоподстройки на условия существования циклов второго рода // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнении. – 2014. – Т. 14, № 5. – С. 55–60.
8. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 97–102.
9. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
10. **Плисс В.А.** Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.; Л.: Наука, 1964. – 368 с.
11. **Попов В.М.** Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970. – 454 с.

Харламова Анастасия Олеговна, аспирант кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46

тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail: a.harlamova@rsu.edu.ru