УДК 517.938

НЕНУЛЕВЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ, СПЕКТР КОТОРЫХ – ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК

М.Т. Терёхин
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE NON-ZERO ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF THE LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL DEVIATION, WHEN THE SPECTRUM OF SOLUTIONS IS FOUNDED SET WITH THE FINITE NUMBER OF LIMITING PIONTS

M.T. Teryokhin

Исследуется проблема существования ненулевого почти периодического решения линейной системы дифференциальных уравнений с параметром. В качестве спектра почти периодических решений рассматривается ограниченное счетное множество неотрицательных чисел. Основным методом исследования является метод тригонометрических рядов. Метод неподвижной точки нелинейного оператора используется для определения условий существования почти периодического решения.

Ключевые слова: вектор-форма, жорданова форма матриц, базис пространства, линейный функционал, ранг матрицы, неподвижная точка, спектр, оператор.

We investigate the problem of the existence of non-zero almost periodic solution of linear system of differential equations with a parameter. As the spectrum of almost periodic solutions we consider the founded set of nonnegative numbers. The main research method is the method of trigonometric series. The method of fixed point of a nonlinear operator is used to determination of the conditions of existence of non-zero almost periodic solutions.

Key words: vector form, Jordan form of matrix, basis of the space, linear functional, rank of the matrix, fixed point, spectrum operator.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$R(t,x,\varepsilon)=T\dot{x}(t)+A\dot{x}(t-\varphi(\varepsilon))+ \\ +B(t)x(t)+C(x(t-f(\varepsilon)))=0, \qquad (1)$$

в которой $\grave{O},\hat{A}-n\times n$-матрицы, $A-(n\times q_1)$-матрица, $C-(n\times q_2)$-матрица, $x(t-\varphi(\varepsilon))=(\dot{x}_1(t-\varphi_{11}(\varepsilon)),\dot{x}_2(t-\varphi_{12}(\varepsilon)),\ldots,\dot{x}_1(t-\varphi_{1\overline{m}_1}(\varepsilon)),\dot{x}_2(t-\varphi_{21}(\varepsilon)),$ $\dot{x}_2(t-\varphi_{22}(\varepsilon)),\ldots,\dot{x}_2(t-\varphi_{2\overline{m}_2}(\varepsilon)),\ldots,\dot{x}_n(t-\varphi_{n1}(\varepsilon)),$ $\dot{x}_n(t-\varphi_{n2}(\varepsilon)),\ldots,\dot{x}_n(t-\varphi_{n\overline{m}_n}(\varepsilon)),x(t-f(\varepsilon))=(x_1(t-f_{11}(\varepsilon)),x_1(t-f_{12}(\varepsilon)),\ldots,x_1(t-f_{12}(\varepsilon)),\ldots,x_1(t-f_{1\sigma_1}(\varepsilon)),$ $x_2(t-f(\varepsilon)))=(x_2(t-f_{21}(\varepsilon)),x_2(t-f_{22}(\varepsilon)),\ldots,x_2(t-f_{2\sigma_2}(\varepsilon),\ldots,x_n(t-f_{n1}(\varepsilon)),x_n(t-f_{n2}(\varepsilon)),\ldots,x_n(t-f_{n\sigma_n}(\varepsilon)),\varepsilon-m$-мерный параметр, $q_1=\sum_{i=1}^{n}\overline{m_i}$, $q_2=\sum_{i=2}^{n}\sigma_i$.

Введем следующие обозначения: $|u|=\max_i\{|u_i|\}$, $\|p\|=\max_{|u|\le 1}|P_u|$, $u\in E_k$, P – матрица, $V(\delta_0)=\{\varepsilon\in E_m:|\varepsilon|\le\delta_0\}$, $\delta_0>0$ – некоторое число, E_k-k-мерное векторное пространство, $N-$ множество натуральных чисел, $R=(-\infty;\infty)$.

Далее всюду будем предполагать, что при любых i,j функции $\varphi_{ij}(\varepsilon),f_{ij}(\varepsilon)$ определены и непрерывны на множестве $V(\delta_0)$ и $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_{ij}(\varepsilon)=0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}f_{ij}(\varepsilon)=0$.

Пусть Q – счетное ограниченное множество неотрицательных чисел, имеющее конечное число предельных точек, и пусть такими точками будут $s_1,s_2,\ldots,s_p$, $p\ge 1$. Следовательно, существует число $r>0$ такое, что при любых $(i,j)\in\{1,2,\ldots,p\}$ $R_i(r)\cap R_j(r)=\varnothing$, $\varnothing$ – пустое множество $R_i(r)=\{\lambda\in Q:|\lambda-s_i|<r\}$, $i=\overline{1,p}$.

Для удобства записей и рассуждений множество Q представим равенством $Q=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ldots)$.

Ставится задача: найти условия существования ненулевого, почти периодического решения системы (1), спектром которого является множество Q.

Проблема существования почти периодических решений системы дифференциальных уравнений исследовалась в работах [1–3], квазипериодических решений – в работе [4].

В статье методом тригонометрических рядов и методом неподвижной точки нелинейного оператора в соответствии с методикой, предложенной в работе [5], исследуется проблема существования ненулевого, почти периодического решения системы (1), спектр которого – множество Q.

Пусть M_n – множество рядов $a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\lambda_k t+b_k\sin\lambda_k t$, при любом $k\in N$ a_k, b_k – n-мерные векторы (коэффициенты ряда), $\lambda_k\in Q$, нулевым элементом множества M_n назовем ряд с нулевыми коэффициентами.

Пусть $x=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\lambda_k t+b_k\sin\lambda_k t\in M_n$, $y=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos\lambda_k t+d_k\sin\lambda_k t\in M_n$, Y – $n\times n$-матрица, γ – действительное число. Операции $x+y$, $Yx,\gamma x,$ определим согласно равенствам

$$x+y=a_0+c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+c_k)\cos\lambda_k t+(b_k+d_k)\sin\lambda_k t,$$

$Yx=Ya_0+\sum_{k=1}^{\infty}Ya_k\cos\lambda_k t+Yb_k\sin\lambda_k t,$ $\gamma x=\gamma a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{a_k}\cos\lambda_k t+\gamma_{b_k}\sin\lambda_k t,$ $\dot{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k b_k\cos\lambda_k t-\lambda_k a_k\sin\lambda_k t$. Очевидно, что $x+y, Yx, \gamma x, \dot{x}$ – элементы множества M_n. Следовательно, M_n – замкнутое, ограниченное относительно вышеуказанных операций множество.

Определение 1. Элемент $x_0\in M_n$ назовем почти периодическим решением системы (1) при некотором $\varepsilon\in V(\delta_0)$, если $R(t,x_0,\varepsilon)$ – нулевой элемент множества M_n.

Для нахождения условий существования точки периодического решения подставим ряд $x\in M_n$ в систему (1). Получим

$$R(t,x,\varepsilon)=\left(B+C^*\right)a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\{[T\lambda_k b_k+\lambda_k\overline{A}\cos\lambda_k f(\varepsilon)a_k+\lambda_k\overline{A}\sin\lambda_k\varphi(\varepsilon)a_k+C^*a_k-C^*a_k+Ba_k+\overline{C}\cos\lambda_k f(\varepsilon)a_k+A^*\lambda_k b_k-A^*\lambda_k b_k-\overline{C}\sin\lambda_k f(\varepsilon)b_k]\cos\lambda_k t+[-T\lambda_k a_k-A^*\lambda_k a_k+A^*\lambda_k a_k+\lambda_k\overline{A}\sin\lambda_k\varphi(\varepsilon)b_k-\lambda_k\overline{A}\cos\lambda_k\varphi(\varepsilon)\times a_k+Bb_k+C^*b_k-C^*b_k+\overline{C}\sin\lambda_k f(\varepsilon)b_k+\overline{C}\cos\lambda_k\times f(\varepsilon)b_k]\}\sin\lambda_k t,$$

$A^*=\left(a^*_{ij}\right)_1^n$, $a^*_{ij}=\sum_{s=1}^{\overline{m}_j}a_{ij}^{(s)}$, $C^*=\left(c^*_{is}\right)_1^n$, $c^*_{is}=\sum_{s=1}^{\sigma}c_{ij}^{(s)}$, $\overline{A}\cos\lambda_k\varphi(\varepsilon)=\left(\overline{a}_{ij},\cos\lambda_k\times\varphi(\varepsilon)\right)_1^n$ – скалярное произведение векторов $\overline{a}_{ij}=\left(a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)},\ldots,a_{ij}^{(\overline{m}_j)}\right)$, $\cos\lambda_k\varphi(\varepsilon)=\left(\cos\lambda_k\varphi_{j1}(\varepsilon),\cos\lambda_k\varphi_{j2}(\varepsilon),\ldots,\cos\lambda_k\varphi_{j\overline{m}_j}(\varepsilon)\right)$, $\overline{A}\sin\lambda_k\varphi(\varepsilon)=\left(\overline{a}_{ij},\sin\lambda_k\varphi(\varepsilon)\right)_1^n$, $\left(\overline{a}_{ij},\sin\lambda_k\varphi(\varepsilon)\right)$ – скалярное произведение векторов $\overline{a}_{ij}$, $\sin\lambda_k\varphi(\varepsilon)=\left(\sin\lambda_k\varphi_{j1}(\varepsilon),\sin\lambda_k\varphi_{j2}(\varepsilon),\ldots,\sin\lambda_k\varphi_{j\overline{m}_j}(\varepsilon)\right)$, $\overline{C}\cos\lambda_k f(\varepsilon)=\left(\overline{c}_{ij},f(\varepsilon)\right)$ $\left(\overline{c}_{ij},\cos\lambda_k f(\varepsilon)\right)$ – скалярное произведение векторов $\overline{c}_{ij}=\left(c_{ij}^{(1)},c_{ij}^{(2)},\ldots,c_{ij}^{(\sigma_j)}\right)$, $\cos\lambda_k f(\varepsilon)=\left(\cos\lambda_k f_{j1}(\varepsilon),\cos\lambda_k f_{j2}(\varepsilon),\ldots,\cos\lambda_k f_{j\sigma_j}(\varepsilon)\right)$, $\overline{C}\times\sin\lambda_k f(\varepsilon)=\left(\overline{c}_{ij},\sin\lambda_k f(\varepsilon)\right)_1^n$, $\left(\overline{c}_{ij},\sin\lambda_k f(\varepsilon)\right)$ – скалярное произведение векторов $\overline{c}_{ij}$, $\sin\lambda_k f(\varepsilon)=\left(\sin\lambda_k f_{j1}(\varepsilon),\sin\lambda_k f_{j2}(\varepsilon),\ldots,\sin\lambda_k f_{j\sigma_j}(\varepsilon)\right)$.

Согласно определению 1, элемент $x\in M_n$ является решением системы (1) тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства (см. (2)):

$$\left(B+C^*\right)a_0=0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left[B+C^*+\lambda_k\overline{A}\sin\lambda_k\varphi(\varepsilon)+\overline{C}\cos\lambda_k f(\varepsilon)-\right.\\ \left.-C^*\right]a_k+\left[\left(T+A^*\right)a_k+\lambda_k\overline{A}\cos\lambda_k\varphi(\varepsilon)-\right.\\ \left.-\overline{C}\sin\lambda_k f(\varepsilon)-\lambda_k A^*\right]b_k=0,\\ \left[-\left(T+A^*\right)\lambda_k-\lambda_k\overline{A}\cos\lambda_k\varphi(\varepsilon)+\overline{C}\sin\lambda_k f(\varepsilon)+\right.\\ \left.+\lambda_k A^*\right]\alpha_k+\left[B+C^*+\lambda_k\overline{A}\sin\varphi(\varepsilon)+\right.\\ \left.+\overline{C}\cos\lambda_k f(\varepsilon)-C^*\right]b_k=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Матрицу $H(\lambda)$ определим равенством $H(\lambda)=\left[colon\left(B+C^*\right),-\left(T+A^*\right)\lambda,colon\left(T+A^*\right)\lambda,\ B+C^*\right]$, $H(0)=B+C^*$. Матрицу $G(\lambda,\varepsilon)$ – равенством $G(\lambda,\varepsilon)=\left[-\operatorname{colon}\left(\lambda\overline{A}\sin\lambda\varphi(\varepsilon)+\overline{C}\cos\lambda f(\varepsilon)-C^*\right),\left(-\lambda\overline{A}\cos\lambda\varphi(\varepsilon)+\overline{C}\sin\lambda f(\varepsilon)+\lambda A^*\right),\ \operatorname{colon}\left(\lambda\overline{A}\times\cos\lambda\varphi(\varepsilon)-\overline{C}\sin\lambda f(\varepsilon)-\lambda A^*,\lambda\overline{A}\sin\lambda\varphi(\varepsilon)+\overline{C}\cos\lambda\times\right.\right.$

$\times f(\varepsilon)-C^*\big)\big]$. Следовательно, систему (4) можно записать так:

$$H(\lambda)\gamma_k + G(\lambda,\varepsilon)\gamma_k = 0, \qquad (5)$$

в которой $\gamma_k = colon(a_k, b_k)$.

Уравнение $\det H(\lambda)=0$ имеет не более чем $2n$ различных действительных корней.

Будем предполагать, что предельные точки множества Q не являются корнями уравнения $\det H(\lambda)=0$. Это значит, что существует число $\delta_0 \in (0,r)$ такое, что при любом $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{p} R_i(\delta_0)$ выполняется неравенство $\det H(\lambda)\neq 0$. Это значит, что можно указать число ν_0, удовлетворяющее неравенству $|\det H(\lambda)| \geq \nu_0$.

Пусть уравнение $\det H(\lambda)=0$ имеет $q \geq 1$ различных действительных корней, принадлежащих множеству Q, и пусть для определенности такими корнями будут числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_q$. Следовательно, на множестве $Q_1 = Q - \bigcup_{i=1}^{p} R_{k_i}(r) \bigcup \{\lambda_1,\lambda_2, \ldots,\lambda_q\}$ выполнено неравенство $\det H(\lambda)\neq 0$.

Множество Q_1 – конечное, поэтому число $\delta_1 \in (0,\delta_0]$ можно выбрать так, что при любом $\lambda \in Q_1$ и любом $\varepsilon \in (0,\delta_1]$ будет выполняться неравенство $\det[H(\lambda)\gamma_k + C_\tau(\lambda,\varepsilon)] \neq 0$. Это значит, что решение системы (1) следует искать во множестве тригонометрических многочленов вида

$$x = a_0 + \sum_{j=1}^{q} a_j \cos\lambda_j t + b_j \sin\lambda_j t.$$

Множество W определим равенством $W = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_q\}$. Без потери общности можно считать, что при любом $k=\overline{1,q}$ матрица $H(\lambda_k)$ представлена в жордановой форме (если 0 – корень уравнения $\det H(\lambda)=0$, то будем считать, что матрица $B+C^*$ представлена в жордановой форме).

Пусть $\lambda_j \in W$. Так как $\det H(\lambda)=0$, то $E_j^0 = \ker H(\lambda_j)$ – множество, содержащее не только нулевой элемент, E_j^2 – инвариантное множество относительно преобразования $H(\lambda_j)x = y$, пространство E_j^1 таково, что любой ненулевой элемент $y \in E_j^1$ удовлетворяет соотношению $y \notin E_j^0 \oplus E_j^2$. В частном случае может оказаться, что E_j^1 содержит только нулевой элемент. Следовательно, $E_{2n} = E_j^0 \oplus E_j^1 \oplus E_j^2$.

Предположим, $rangH(\lambda_j) = 2n - r_j$, $0 < r_j < 2n$. Следовательно, E_j^0 содержит r_j линейно независимых векторов (a_j^ν, b_j^ν), $\nu = \overline{1,r_j}$, образующих базис пространства E_j^0.

Пусть векторы (u_j^μ, v_j^μ), $\mu = \overline{1,m_j}$, образуют базис пространства E_j^1, векторы (c_j^l, d_j^l), $l = \overline{1,\theta_j}$, $\theta_j = 2n - (r_j + m_j)$, составляют базис пространства E_j^2 (в случае нулевого корня уравнения $\det H(\lambda)=0$ базис пространства E_j^0 составляют векторы a_j^ν, базис пространства E_j^1 – векторы u_j^μ, базис пространства E_j^2 – векторы c_j^l).

В условиях предположений относительно матрицы $H(\lambda_j)$ базисные векторы пространств E_j^0, E_j^1 и E_j^2 можно выбрать попарно ортогональными независимо от того, какому из пространств они принадлежат.

При любом $\nu \in \{1,2,\ldots,r_j\}$ вектор h_j^ν определим равенством $h_j^\nu = colon(a_j^\nu, b_j^\nu)$, при этом векторы a_j^ν, b_j^ν выбираются согласно равенству $h_j^\nu = \max\{|a_j^\nu|,|b_j^\nu|\}=1$. При любом $\mu \in \{1,2,\ldots,m_j\}$ вектор g_j^μ определим равенством $g_j^\mu = colon(u_j^\mu, v_j^\mu)$, $|g_j^\mu| = \max\{|u_j^\mu|,|v_j^\mu|\}=1$, при любом $l \in \{1,2,\ldots,\theta_j\}$ вектор φ_j^l определим равенством $\varphi_j^l = colon(c_j^l, d_j^l)$, $|\varphi_j^l| = \max\{|c_j^l|,|d_j^l|\}$.

Символом E_{0j}^ν обозначим пространство, образованное вектором h_j^ν, символом E_{1j}^μ – пространство, образованное вектором g_j^μ, символом E_{2j}^l – пространство, образованное вектором φ_j^l. Следовательно, $E_j^0 = \sum_{\nu=1}^{r_j} \oplus E_{0j}^\nu$, $E_j^1 = \sum_{\mu=1}^{m_j} \oplus E_{1j}^\mu$,

$$E_j^2 = \sum_{l=1}^{\theta_j} \oplus E_{2j}^l.$$

Линейные функционалы $\xi_{0j}^\nu(\gamma)$, $\xi_{1j}^\mu(\gamma)$ определим соответственно равенствами $\xi_{0j}^\nu(\gamma) = (\gamma, h_j^\nu)$,

$\xi_{1j}^{\mu}(\gamma)=(\gamma, g_j^{\nu})$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение векторов. Непосредственно вычислением устанавливаем, что для любого вектора $\gamma \in E_{2j}^{l}, \xi_{0j}^{\nu}(\gamma)=0$, $\xi_{1j}^{\mu}(\gamma)=0$. Кроме того, $\xi_{0j}^{\nu}(h_j^{\nu})=\xi_{1j}^{\mu}(g_j^{\mu})=1$, $\xi_{0j}^{\nu}(g_j^{\nu})=\xi_{1j}^{\mu}(h_j^{\mu})=0$. Следовательно, любой вектор $\gamma \in E_{2n}$ можно представить равенством $\gamma = P_j\gamma + \sum_{\nu=1}^{r_j}\xi_{0j}^{\nu}(\gamma)h_j^{\nu} + \sum_{\mu=1}^{m_j}\xi_{1j}^{\mu}(\gamma)\times$ $\times g_j^{\mu}$, где P_j – оператор проектирования пространства E_{2n} в пространство E_j^2, $P_j\gamma=\gamma$ для любого $\gamma \in E_j^2$ и, следовательно $P_j\gamma \in E_j^2$.

Задача поиска элемента $\gamma \in E_{2n}$, удовлетворяющего системе

$$R_j(\lambda_j,\gamma,\varepsilon) \equiv H(\lambda_j)\gamma + G(\lambda_j,\varepsilon)\gamma = 0, \qquad (6)$$

равносильна задаче поиска вектора $\gamma \in E_{2n}$, удовлетворяющего равенствам

$$P_j(R_j(\lambda_j,\gamma,\varepsilon))=0, \qquad (7)$$

$$\xi_{0j}^{\nu}(R_j(\lambda_j,\gamma,\varepsilon))=0,\ \xi_{1j}^{\mu}(R_j(\lambda_j,\gamma,\varepsilon))=0 \qquad (8)$$

при любых $\nu \in \{1,2,\dots,r_j\}$, $\mu \in \{1,2,\dots,m_j\}$.

Решение системы (7) будем искать в виде

$$\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)=P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)+\sum_{\nu=1}^{r_j}\alpha_j^{\nu}h_j^{\nu}+\sum_{\mu=1}^{m_j}\beta_j^{\mu}g_j^{\mu},$$

где $\alpha_j=\left(\alpha_j^1,\alpha_j^2,\dots,\alpha_j^{r_j}\right)$, $\beta_j=\left(\beta_j^1,\beta_j^2,\dots,\beta_j^{m_j}\right)$ – постоянные векторы, подлежащие определению, $|\alpha_j|=\max\limits_{\nu=1,r_j}\{|\alpha_j^{\nu}|\}$, $|p_j|=\max\limits_{\mu=1,m_j}\{|\beta_j^{\mu}|\}$. Подставив $\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ в систему (7), получим

$$P_jH(\lambda_j)\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)+P_jG(\lambda_j,\varepsilon)\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)=0.$$

В силу инвариантности множества E_j^2 относительно преобразования $H(\lambda_j)x=y$ и того, что при любом $x \in E_j^2$, $x \neq 0$, $H(\lambda_j)x \neq 0$, система $H(\lambda_j)x=y$ однозначно разрешима относительно x, то есть существует матрица $H^*(\lambda_j)$такая, что $x=H^*(\lambda_j)y$. Следовательно, $|x| \le \|H^*(\lambda_j)\||y|$.

На множестве E_j^2 оператор P_j коммутирует с матрицей $H(\lambda_j)$, поэтому равенство (7) можно записать так:

$$H(\lambda_j)P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)+P_jG(\lambda_j,\varepsilon)\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)=0.$$

Отсюда

$$P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)=-H^*(\lambda_j)P_jG(\lambda_j,\varepsilon)\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$$

или, что всё равно,

$$P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)=-H^*(\lambda_j)P_jG(\lambda_j,\varepsilon)\left[P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=1}^{r_j}\alpha_j^{\nu}h_j^{\nu}+\sum_{\mu=1}^{m_j}\beta_j^{\mu}g_j^{\mu}\right].$$

Пусть $P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)=z$. Символом $\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ обозначим оператор, определенный равенством $\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)z=-H^*(\lambda_j)P_jC_{\tau}(\lambda_j,\varepsilon)z+$ $+\sum_{\nu=1}^{r_j}\alpha_j^{\nu}h_j^{\nu}+\sum_{\mu=1}^{m_j}\beta_j^{\mu}g_j^{\mu}$.

Пусть $\delta^*>0$ – некоторое число. Для краткости записей положим, $\Delta_1(\delta^*)=\{\alpha:|\alpha|\le\delta^*\}$, $\Delta_2(\delta^*)=\{\beta:|\beta|\le\delta^*\}$, $T(\delta^*)=\{z\in E_j^2:|z|\le\delta^*\}$.

Теорема 1. Существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что при любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\alpha_j\in\Delta_1(\delta^*)$, $\beta_j\in$ $\in\Delta_2(\delta^*)$ оператор $\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ на множестве $T(\delta^*)$ имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Из того, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|G(\lambda_j,\varepsilon)\|=0$, следует, что число $\varepsilon_0>0$ можно выбрать так, чтобы при любом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ были выполнены неравенства $\|H^*(\lambda_j)\|\cdot\|G(\lambda_j,\varepsilon)\|\times$ $\times(1+r_j+m_j)\le1$, $\|H^*(\lambda_j)\|\cdot\|G(\lambda_j,\varepsilon)\|\le q(\varepsilon)\le q<1$, $q>0$ – некоторое число, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}q(\varepsilon)=0$. Тогда для любых фиксированных $\varepsilon(|\varepsilon|\le\varepsilon_0)$, $\alpha_j\in\Delta_1(\delta^*)$, $\beta_j\in\Delta_2(\delta^*)$, любых $z\in T(\delta^*)$, $((z_1,z_2)\in T(\delta^*))$ выполнены неравенства $|\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)z|\le\|H^*(\lambda_j)\|\times$ $\times\|G(\lambda_j,\varepsilon)\|(1+r_j+m_j)\delta^*<\delta^*$, $|\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)z_1-$ $-\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)z_2|\le\|H^*(\lambda_j)\|\cdot\|G(\lambda_j,\varepsilon)\||z_1-z_2|\le q(\varepsilon)\le$ $\le q<|z_1-z_2|$, $\|P\|=1$, $|h_j^{\nu}|=|g_j^{\mu}|=1$.

Следовательно, оператор $\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ отображает замкнутое ограниченное множество $T(\delta^*)$ в себя и является на этом множестве оператором сжатия. Это значит, что оператор $\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ на множестве $T(\delta^*)$ имеет единственную неподвижную точку, а система (7) – единственное решение на этом множестве $T(\delta^*)$. Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что число ε_0 выбрано таким же образом, как и в доказательстве теоремы 1.

Замечание 1. На множестве $T(\delta^*)$ оператор $\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $q(\varepsilon)$.

Замечание 2. Фиксируем $\varepsilon(|\varepsilon|\le\varepsilon_0)$. Если при любых $\alpha_j^i\in\Delta_1(\delta^*)$, $\beta_j^i\in\Delta_2(\delta^*)$, $i=1,2$, $P_j\gamma_j(\alpha_j^1,\beta_j^1,\varepsilon)$, $P_j\gamma_j(\alpha_j^2,\beta_j^2,\varepsilon)$ – неподвижные точки операторов $\Gamma\gamma_j(\alpha_j^1,\beta_j^1,\varepsilon)$, $\Gamma\gamma_j(\alpha_j^2,\beta_j^2,\varepsilon)$, то при любом $i\in\{1,2\}$ $P_j\gamma_j(\alpha_j^i,\beta_j^i,\varepsilon)=-H^*(\lambda_j)P_j\times$ $\times G(\lambda_j,\varepsilon)\left[P_j\gamma_j(\alpha_j^i,\beta_j^i,\varepsilon)+\sum_{\nu=1}^{r_j}\alpha_j^{i\nu}h_j^\nu+\sum_{\mu=1}^{m_j}\beta_j^{i\mu}g_j^\mu\right]$.

Следовательно, $|P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)-P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)|\le$ $\le\|H^*(\lambda_j)\|\|G(\lambda_j,\varepsilon)\|\Big(|P_j\gamma_j(\alpha_j^1,\beta_j^1,\varepsilon)-P_j\gamma_j(\alpha_j^2,\beta_j^2,\varepsilon)|+$ $+\sum_{\nu=1}^{r_j}|\alpha_j^{1\nu}-\alpha_j^{2\nu}|+\sum_{\mu=1}^{m_j}|\beta_j^{1\mu}-\beta_j^{2\mu}|\Big)$. Отсюда $|P_j\gamma_j(\alpha_j^1,$ $\beta_j^1,\varepsilon)-P_j\gamma_j(\alpha_j^2,\beta_j^2,\varepsilon)|\le\frac{q(\varepsilon)}{1-q(\varepsilon)}\left(\sum_{\nu=1}^{r_j}|\alpha_j^{1\nu}-\alpha_j^{2\nu}|+\right.$ $\left.+\sum_{\mu=1}^{m_j}|\beta_j^{1\mu}-\beta_j^{2\mu}|\right)$.

Замечание 3. При $z=0$ $|\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)0|\le$ $\le\|H^*(\lambda_j)\|\cdot\|G(\lambda_j,\varepsilon)\|\left(\sum_{\nu=1}^{r_j}|\alpha_j^\nu|+\sum_{\mu=1}^{m_j}|\beta_j^\mu|\right)\le q(\varepsilon)(r_j|\alpha_j|+$ $+m_j|\beta_j|)$. Поэтому, предположив, что $P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ – неподвижная точка оператора $\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$, получим, что $|P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)|=$ $|\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)|\le|\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)0|+|\Gamma(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)\times$ $\times P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)-\tilde{A}(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)0|\le q(\varepsilon)(r_j|\alpha_j|+m_j|\beta_j|+$ $+q(\varepsilon)|P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)|$. Отсюда

$$|P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)|\le\frac{q(\varepsilon)}{1-q(\varepsilon)}(r_j|\alpha_j|+m_j|\beta_j|).\quad(9)$$

Далее будем предполагать, что при любом $\varepsilon\in V(\delta_0)$ $\|G(\lambda_j,\varepsilon)\|/|\varepsilon|<m_0$, m_0 – некоторое число. Тогда, учитывая неравенство (9), получим

$$|G(\lambda_j,\varepsilon)P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)|=o(|\varepsilon|).\quad(10)$$

Из теоремы 1 следует: для того чтобы $\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$ было решением системы (6), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства

$$\xi_{0j}^\nu(R_j(\lambda_j,P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon),\varepsilon)+I_j(\alpha_j,\beta_j))=0,\quad(11)$$

$$\xi_{1j}^\mu(R_j(\lambda_j,P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon),\varepsilon)+I_j(\alpha_j,\beta_j))=0,\quad(12)$$

где $I_j(\alpha_j,\beta_j)=\sum_{\nu=1}^{r_j}\alpha_j^\nu h_j^\nu+\sum_{\mu=1}^{m_j}\beta_j^\mu g_j^\mu$.

Из равенства (11) следует, что $(H(\lambda_j)\times$ $\times P\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)+I_j(\alpha_j,\beta_j))+G(\lambda_j,\varepsilon)(P_jx_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)+$ $+I_j(\alpha_j,\beta_j)),h_j^\nu)=(H(\lambda_j)P\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon),h_j^\nu)+(H(\lambda_j)\times$ $\times I_j(\alpha_j,\beta_j),h_j^\nu)+G(\lambda_j,\varepsilon)(P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon),h_j^\nu)+(G(\lambda_j,\varepsilon)\times$ $\times I_j(\alpha_j,\beta_j),h_j^\nu)$.

Учитывая, что $H(\lambda_j)P\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)\in E_j^2$, получим $(H(\lambda_j)P\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon),h_j^\nu)=0$. Из того, что $H(\lambda_j)h_j^\nu=0$ при любом $\nu=\overline{1,r_j}$, следует, что $(H(\lambda_j)I_j(\alpha_j,\beta_j),h_j^\nu)=(M_{0j}^\nu,\beta_j)$, где M_{0j}^ν – известный вектор. Из неравенства (9) следует, что $G(\lambda_j,\varepsilon)P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)=0(|\varepsilon|)$, $\lim_{\varepsilon\to0}o(|\varepsilon|)/|\varepsilon|=0$. Следовательно,

$$|(G(\lambda_j,\varepsilon)P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon),h_j^\nu)|=o(\varepsilon),\quad(13)$$

где $\lim_{\varepsilon\to0}o(|\varepsilon|)/|\varepsilon|=0$.

Из соотношения $(G(\lambda_j,\varepsilon)P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon),h_j^\nu)=$ $=G(\lambda_j,\varepsilon)\left(\sum_{\nu=1}^{r_j}\alpha_j^\nu h_j^\nu+\sum_{\mu=1}^{m_j}\beta_j^\mu g_j^\mu,h_j^\nu\right)$ следует, что $(G(\lambda_j,\varepsilon)I_j(\alpha_j,\beta_j),h_j^\nu)=(G_{0j}^\nu(\lambda_j,\varepsilon),colon(\alpha_j,\beta_j))$, $G_{0j}^\nu(\lambda_j,\varepsilon)$ – известный r_j+m_j-мерный вектор. Таким образом, равенство (11) можно записать так:

$(M_{0j}^\nu,\beta_j)+(G_{oj}^\nu(\lambda_j,\varepsilon),colon(\alpha_j,\beta_j))+o_{0j}^\nu(|\varepsilon|)=0$.

Поэтому, учитывая, что $\nu=\overline{1,r_j}$, получим систему

$$M_{0j}\beta_j+G_{oj}(\lambda_j,\varepsilon)colon(\alpha_j,\beta_j)+o_{0j}(|\varepsilon|)=0,$$

в которой M_{0j} – $r_j\times m_j$-матрица, $G_{0j}(\lambda_j,\varepsilon)$ – $r_j\times(r_j+m_j)$-матрица.

Аналогично рассуждая, получим что равенство (12) может быть записано так:

$$(M_{1j}^\mu\beta_j)+\left(G_{1j}^\mu(\lambda_j,\varepsilon),colon(\alpha_j,\beta_j)\right)+o(|\varepsilon|)=0.$$

Поэтому с учетом того, что $\mu=\overline{1,m_j}$, получим систему

$$M_{1j}\beta_j+G_{1j}(\lambda_j,\varepsilon)colon(\alpha_j,\beta_j)+o(|\varepsilon|)=0,$$

в которой M_{1j} – $m_j\times m_j$-матрица, $G_{1j}(\lambda_j,\varepsilon)$ – $m_j\times(r_j+m_j)$-матрица.

Итак, окончательно получаем: для того чтобы система (6) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система

$$M_j\beta_j + G_j(\lambda_j,\varepsilon)colon(\alpha_j,\beta_j) + o(|\varepsilon|) = 0\,, \quad (14)$$

в которой $M_j = colon(M_{0j}, M_{1j})$,

$$G_j(\lambda_j,\varepsilon) = colon(G_{0j}(\lambda_j,\varepsilon), C_{1j}(\lambda_j,\varepsilon)),$$
$$o(|\varepsilon|) = colon\,(o(|\varepsilon|), o(|\varepsilon|)).$$

Заметим, что из равенства (13) следует, что если $G(\lambda_j,\varepsilon) = o\left(|\varepsilon|^k\right)$, то $(G(\lambda_j,\varepsilon)P_j\gamma_j(\alpha_j,\beta_j,\varepsilon), h_j^\nu) = o\left(|\varepsilon|^{k+1}\right)$.

Предположим, что элементы матрицы $G_j(\lambda_j,\varepsilon) = \left(g_{ik}^j(\lambda_j,\varepsilon)\right)_1^{r_j+m_j}$ представимы равенствами $g_{ik}^j(\lambda_j,\varepsilon) = g_{ik}^{j,s-1}(\varepsilon) + o\left(|\varepsilon|^{s-1}\right)$, $s \ge 2$, в котором $g_{ik}^{j,s-1}(\varepsilon)$ – форма порядка $s-1$ относительно ε. (Из определения выражения $q(\varepsilon)$ следует, что $q(\varepsilon) = o(|\varepsilon|^{s-1})$.) Тогда система (14) может быть записана в виде

$$M_j\beta_j + G_j^{s\text{-}1}(\varepsilon)colon(\alpha_j,\beta_j) + o\left(|\varepsilon|^s\right) = 0\,, \quad (15)$$

Тогда, полагая $y_j = (\alpha_j,\beta_j,\varepsilon)$, систему (15) сведем к системе

$$M_j\beta_j + \overline{G}_j^s(y_j) + o\left(|y_j|^s\right) = 0\,, \quad (16)$$

в которой $\overline{G}_j^s(y_j)$ – вектор-форма порядка s относительно y.

Пусть $rangM_j = \theta_j$, $0 \le \theta_j \le m_j$. Элементарными преобразованиями систему (16) сведем к системе

$$X_j^0\beta_j + o(y_j) = 0,\; H_j^0(y_j) + o\left(|y_j|^s\right) = 0, \quad (17)$$

в которой X_j^0 – $(\theta_j + m_j)$-матрица, $rangX_j = \theta_j$, $H_j^0(y_j)$ – вектор-форма порядка s относительно y_j (M_j – нулевая матрица в системе (16) при $rangM_j = 0$).

Положим, $S_j^0(y) = colon(X_j^0\beta_j, H_j^0(y_j))$. Путем замены переменных $y = \rho e$, $\rho > 0$, систему (17) сведем к системе $S_j^0(e) + o(\rho,e) = 0$.

Теорема 2. Если при любом e $(|e|=1)$ $S_j^0(e)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что во множестве $\{y : 0 < |y| \le \delta\}$ нет решения системы (17).

Доказательство. Пусть $V = \{e : |e| = 1\}$. Функция $\left|S_j^0(e)\right|$ на множестве V определена, непрерывна и при любом $e \in V$ удовлетворяет неравенству $\left|S_j^0(e)\right| > 0$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует число $m > 0$ такое, что при любом $e \in V$ $\left|S_j^0(e)\right| \ge m$.

Из того, что $\lim\limits_{\rho\to 0} o(\rho,e) = 0$ равномерно относительно $e \in V$, следует существование числа $\rho^* > 0$ такого, что $|o(\rho,e)| < \frac{m}{2}$ при любом $\rho \in (0,\rho^*)$ и любом $e \in V$. Это значит, что при любых $\rho \in (0,\rho^*)$, $e \in V$ справедливы неравенства $\left|S_j^0(e) + o(\rho,e)\right| \ge \left\|S_j^0(e)\right\| - \|o(\rho,e)\| > \frac{m}{2}$, то есть во множестве $\{y\colon 0 < \rho < \rho^*,\;\; e \in V\}$ нет решений системы (17). Теорема доказана.

Таким образом, необходимым условием существования ненулевого решения системы (17) в достаточно малой окрестности точки $y = 0$ является существование вектора e^* $(|e| = 1)$, удовлетворяющего равенству $S_j^0(e^*) = 0$.

Пусть $e_j^* \in V$ таково, что $S_j^0(e_j^*) = 0$. Тогда в окрестности e_j^* систему (17) можно представить в виде

$$DS_j^0(e_j^*)\tau + \sum_{i=2}^{s} P_{1i}^j(e_j^*,\tau) + O(\rho,e) = 0\,, \quad (18)$$

в которой $DS_j^0(e_j^*)$ – матрица Якоби вектор-функции $S_j^0(e)$, $P_{1i}^j(e_j^*,\tau)$ – вектор-форма порядка i относительно τ, $\tau = e - e_j^*$, $\lim\limits_{\rho\to 0} O(\rho,e) = 0$ равномерно относительно $e\left(e = e_j^* - \tau\right)$, $|\tau| \le \Delta$, $\Delta < 1$ – число.

Теорема 3. Пусть $DS_j^0(e_j^*)$ – $(r_j + m_j)\times\omega_j$-матрица, $\omega_j \ge r_j + m_j$. Если $rangDS_j^0(e_j^*) = r_j + m_j$, то система (17) имеет ненулевое решение, а система (1) – ненулевое почти периодическое решение.

Доказательство. Для определенности положим, что минор порядка $r_j + m_j$, отличный от нуля, расположен на первых $r_j + m_j$ столбцах матрицы $DS_j^0(e_j^*)$. Следовательно, матрицу $DS_j^0(e_j^*)$

можно представить равенством $DS_j^0\left(e_j^*\right) = \left(D_{j1}, D_{j2}\right)$, а систему (18) – равенством

$$D_{j1}\tau_1 + D_{j2}\tau_2 + o\left(|\tau_1|\right) + O\left(\tau_1, \tau_2\right) + O(\rho, e) = 0,$$

в котором D_{j1} – $\left(r_j + m_j\right)\times\left(r_j + m_j\right)$-матрица, $\det D_{j1} \neq 0$, D_{j2} – $\left(r_j + m_j\right)\times\left[\omega_i - \left(r_j + m_j\right)\right]$-матрица, $\lim\limits_{\tau_1 \to 0} o\left(|\tau_1|\right)/|\tau_1| = 0$, $\lim\limits_{\tau_2 \to 0} O\left(\tau_1, \tau_2\right) = 0$ равномерно по $\tau_1\left(|\tau_1| \le \Delta\right)$. Тогда $\tau_1 = -D_{j1}^{-1}\left[D_{j2}\tau_2 + o\left(|\tau_1|\right) + O\left(\tau_1, \tau_2\right) + O(\rho, e)\right]$.

Оператор Γ определим равенством $\Gamma\tau_1 = -D_{j1}^{-1}\left[D_{j2}\tau_2 + o\left(|\tau_1|\right) + O\left(\tau_1, \tau_2\right) + O(\rho, e)\right]$. Из определения оператора Γ следует, что числа $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ можно выбрать так, то при любых фиксированных $\tau_2\left(|\tau_2| \le \delta_2\right)$, $\rho \in \left(0, \delta_2\right]$ на множестве $\left\{\tau_1 : \left(|\tau_1| \le \delta\right)\right\}$ оператор Γ имеет неподвижную точку. Непрерывность оператора следует из его определения.

Пусть при фиксированных $\tau_{2j}^*\left(\left|\tau_{2j}^*\right| \le \delta_1\right)$, $\rho_j^* \in \left(0, \delta_1\right]$ неподвижной точкой оператора Γ является точка $\tau_{1j}^*\left(\left|\tau_{1j}^*\right| \le \delta\right)$. Тогда решением системы (18) будет вектор $y_j^* = \rho_j^*\left(e_j^* + \tau_{1j}^*\right)$. Выбрав $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\left|\tau_{1j}^*\right| < 1$, получим, что y_j^* будет ненулевым решением системы (17). Теорема доказана.

Следовательно, τ_{1j}^*, τ_{2j}^*, ρ_j^*, $\left(\tau_j^* = \left(\tau_{1j}^*, \tau_{2j}^*\right)\right)$, $e_j^\alpha = e_j^* + \tau_j^*$ – решение системы (18). Тогда, учитывая, что $y_j^* = \rho_j^*\left(e_j^* + \tau_j^*\right)$ и, следовательно, $y_j^* = \left(\alpha_j^*, \beta_j^*, e_j^*\right)$ $\left(\alpha_j^* = \rho_j^* \bar{e}_{\alpha j}^*, \beta_j^* = \rho_j^* \bar{e}_{\beta j}^*, \varepsilon_j^* = \rho_j^* \bar{e}_{\varepsilon j}^*\right)$, получим, что y_j^* – решение системы (16), а $\gamma_j^* = P\gamma_j^* + \sum\limits_{\nu=1}^{r_j} \alpha_j^{*\nu} h_j^\nu + \sum\limits_{\mu=1}^{m_j} \beta_j^{*\mu} g_j^\mu$ является решением системы (6) при $\varepsilon = \varepsilon^*$. Отсюда

$$a_0 = \sum_{i=1}^{k} \nu_i a_0^i,$$

$$a_j^* = \sum_{i=1}^{k} r_j a_0^i + \sum_{\nu=1}^{r_j} \alpha_j^{*\nu} u_j^\nu + \sum_{\mu=1}^{m_j} \beta_j^{*\mu} u_j^\mu + o_{1j}\left(|y|\right), \quad (19)$$

$$b_j^* = \sum_{\nu=1}^{r_j} \alpha_j^{*\nu} b_j^\nu + \sum_{\mu=1}^{m_j} \beta_j^{*\mu} v_j^\mu + o_{2j}\left(|y|^s\right),$$

где $\left(a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^k\right)$ – линейно независимые решения системы $\left(B + C^*\right)a_0 = 0$, $h_j^\nu = colon\left(a_j^\nu, b_j^\nu\right)$, $g_j^\mu = colon\left(u_j^\mu, v_j^\mu\right)$. Тогда, определив векторы a_0, a_j^*, b_j^* согласно равенствам (19), получим, что решение системы (1) можно представить равенством

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i a_0^i + \left(\sum_{\nu=1}^{r_j} \alpha_j^{*\nu} u_j^\nu + \sum_{\mu=1}^{m_j} \beta_j^{*\mu} u_j^\mu\right)\cos\lambda_j t + \left(\sum_{\nu=1}^{r_j} \alpha_j^{*\nu} b_j^\nu + \sum_{\mu=1}^{m_j} \beta_j^{*\mu} v_j^\mu\right)\sin\lambda_j t + o_j\left(|y|^s\right)$$

и, следовательно, равенством

$$x(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{q} a_j^* \cos\lambda_j t + b_j^* \sin\lambda_j t + o\left(|y|^s\right), \quad (20)$$

в котором $o\left(|y|^s\right) = \sum\limits_{j=1}^{q} o_j\left(|y|^s\right)$. Теорема доказана.

Пусть $rangDS_j^0\left(e_j^*\right) = r$, $0 < r < r_j + m_j$. Тогда, полагая для простоты рассуждений, что минор порядка r, отличный от нуля, расположен в верхнем левом углу матрицы $DS_j^0\left(e_j^*\right)$. Элементарными преобразованиями систему (18) сведем к системе

$$\begin{gathered} D_j\tau + \sum_{i=2}^{s} \overline{P}_{1i}^j\left(e_j^*, \tau\right) + \overline{O}(\rho, e) = 0, \\ \sum_{i=2}^{s} \overline{\overline{P}}_{1i}^j\left(e_j^*, \tau\right) + \overline{\overline{O}}(\rho, e) = 0, \end{gathered} \quad (21)$$

в которой D_j – $r \times \left(r_j + m_j\right)$-матрица, $rangD_j = r$, $\tau = \left(\tau_1, \tau_2\right)$, $\overline{P}_{1i}^j\left(e_j^*, \tau\right)$, $\overline{\overline{P}}_{1i}^j\left(e_j^*, \tau\right)$ – вектор-форма порядка i относительно τ, $\lim\limits_{\rho \to 0} colon\left(\overline{O}_j(\rho, l), \overline{\overline{O}}_j(\rho, l)\right) = 0$ равномерно по $e_j\left(|e_j| \le d\right)$, $d > 0$ – произвольное фиксированное число. Пусть число $k \in N$ таково, что при любом $i < k$ $\overline{P}_{1i}^j\left(e_j^*, \tau\right) \equiv 0$, $\overline{\overline{P}}_{1i}^j\left(e_j^*, \tau\right) \not\equiv 0$. Выполняя замену переменных $\tau = \rho_1\eta$, систему (21) сведем к системе

$$\begin{gathered} D_j\eta + O_{0j}\left(\rho_1, \eta\right) + \overline{O}_j(\rho, e) = 0, \\ P_{1k}^j\left(e_j^*, \eta\right) + O_{1j}\left(\rho_1, \eta\right) + \overline{\overline{O}}(\rho, e)/\rho_1^k = 0. \end{gathered} \quad (22)$$

Теорема 4. Если для любого $\eta\left(|\eta| \le 1\right)$ $colon\left(D\eta, P_{1k}^j\left(e_j^*, \eta\right)\right) \neq 0$, то в любой окрестности точки $y = 0$ имеется множество, в котором нет решения системы (18).

Доказательство в основном аналогично доказательству теоремы 2. Отличие состоит в том, что после установления оценки необходимой величины $\left(O_{0j}(\rho_1,\eta), O_{1j}(\rho_1,\eta)\right)$ фиксируется $\rho_1 > 0$, затем число $\rho^* > 0$ выбирается так, чтобы при любом $\rho \in \left(0, \rho^*\right]$ выражение $colon\left(\overline{O}(\rho,e)/\rho_1,\ \overline{O}(\rho,e)/\rho_1\right)$ имело необходимую оценку.

Следовательно, необходимым условием существования множества в окрестности точки $y = 0$, в котором имеется решение системы (18), является наличие точки $\eta^*\left(\left|\eta^*\right| \le 1\right)$, удовлетворяющей равенству $colon\left(D_\eta^*, \overline{P}_{1i}^{j}\left(e_j^*,\eta^*\right)\right) = 0$.

Для удобства рассуждений систему (22) запишем в виде

$$S_{1j}(\eta) + O_j^{(1)}(\rho_1,\eta) + \mathrm{O}_j^*(\rho, \rho_1, e) = 0. \qquad (23)$$

в котором $S_{1j}(\eta) = colon\left(D_j\eta,\ P_{1k}\left(e_j^*,\eta\right)\right)$, $O_j^{(1)} = colon\left(O_{0j}(\rho_1,\eta), O_{1j}(\rho_1,\eta)\right)$, $O_j^*(\rho,\rho_1,\eta) = colon\left(o(\rho_1,\eta)/\rho_1,\ o(\rho_1,\eta)/\rho_1^k\right)$.

Вектор функцию $S_{1j}(\eta)$ в окрестности точки η^* представим в виде $S_{1j}(\eta) = DS_{1j}\left(\eta^*\right)\sigma + \sum_{i=2}^{s} P_{2i}^{j}\left(\eta^*,\sigma\right)$, в котором $DS_{1j}\left(\eta^*\right)$ − матрица Якоби вектор-формы $S_{1j}(\eta)$ в точке η^* при любом $i = \overline{2,k}$, $P_{2i}^{j}\left(\eta^*,\sigma\right)$ − вектор-форма порядка i относительно σ, $\sigma = \eta - \eta^*$.

Тогда систему (23) можно записать так:

$$DS_{1j}\left(\eta^*\right)\sigma + \sum_{i=2}^{s} P_{2i}^{j}\left(e_j^*,\tau\right) + O_j^{(1)}(\rho_1,\eta) + \mathrm{O}_j^*(\rho, \rho_1, e) = 0. \qquad (24)$$

Теорема 5. Если $rangDS_{1j}\left(\eta^*\right) = r_j + m_j$, то система (21) имеет ненулевое решение, а система (1) − ненулевое, почти периодическое решение.

Доказательство с соответствующими изменениями аналогично доказательству теоремы 3.

Пусть $rangDS_{1j}\left(\eta^*\right) \in \left(0, r_j + m_j\right)$. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получим теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5. И так далее. Процесс получения условий существования (отсутствия) решения системы (6) будет закончен, как только будет получена система уравнений, для которой выполнены условия одной из теорем, аналогичной теореме 4 или 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бирюк Г.И.** Об одной теореме существования точки периодического решения некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром // ДАН СССР. – 1954. – № 1. – С. 5–7.
2. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М: Наука, 1947. – 472 с.
3. **Терёхин М.Т.** Почти периодические решения линейных дифференциальных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2000. – № 3. – С. 121–126.
4. **Терёхин М.Т., Чихачёва О.А.** Квазипериодические режимы в математических моделях с малым отклонением // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – 2006. – № 1(13). – С. 140–159.
5. **Терёхин М.Т.** Ненулевые периодические решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенной матрицей при производных // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 39, № 12. – С. 1645–1653.

Терехин Михаил Тихонович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46
тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail:m.terehin@rsu.edu.ru