УДК 517.925

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА

В.В. Абрамов

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

ABOUT THE SMALL OSCILLATIONS OF A PENDULUM

V.V. Abramov

Исследована модель маятника с одной степенью свободы и с вибрирующей точкой подвеса. Предполагается, что длина маятника и сопротивление среды малы. Получены условия ветвления малых устойчивых периодических решений.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, малое периодическое решение, устойчивость, оператор монодромии, физический маятник.

The pendulum model with one degree of freedom and with the vibrating suspension point is investigated. It is supposed that length of a pendulum and resistance of the environment are small.

Keywords: system differential equations, small periodic solution, stability, operator of monodromy, physical pendulum.

Рассмотрим модель физического маятника [1]

$$\ddot{y} + \sin y + p_1 \cos \beta t \sin y + p_2 \dot{y} = 0\,, \qquad (1)$$

в которой y – угол отклонения маятника от нулевого положения равновесия, $p_1 \cos \beta t \sin y$ – движущая сила, связанная с колебаниями точки подвеса, $p_2 \dot{y}$ – влияние вязкого трения среды, в которой движется маятник.

Предполагая, что амплитуда колебаний точки подвеса и коэффициент вязкого трения малы, то есть в уравнении (1) $p_1 = \mu_1^2$, $p_2 = \mu_2^2$ – малые параметры, определим условия мягкого возбуждения колебаний маятника. С этой целью применим результаты работы [2].

Рассмотрим в R^n систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu) \qquad (2)$$

с ω-периодической по t правой частью, гладко зависящей от x и от малого параметра $\mu \in R^m$, в которой $f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$ $f'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nn}$.

Для исследования проблемы мягкого возбуждения колебаний в модели вида (2) ставится **задача**: определить условия существования ненулевого устойчивого периодического решения $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$, $x(0, a^*, \mu^*, \alpha) = a^*$, для которого имеет место параметризация $a^* = a(\alpha)$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $0 \le \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} a^* = 0_n$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mu^* = 0_m$. При этом будем говорить, что периодическое решение является малым, а пара $(a'_+(0), \mu'_+(0))$ – направление его ветвления.

Для согласования начального значения периодического решения с малым параметром системы будем использовать свойства оператора монодромии.

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$ при условии $X(0) = E$, $X = X(\omega)$ – матрица монодромии. Вычислим

$$p(a, \mu) + \psi(a, \mu) = X \int_0^{\omega} X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau\,,$$

где $p(a, \mu)$ – первое приближение оператора монодромии, которое нелинейно зависит от (a, μ), $p(\alpha a, \alpha\mu) = \alpha^k p(a, \mu)$, слагаемое $\psi(a, \mu)$ обладает свойством $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{-k} \|\psi(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$. Получим локальный вид оператора монодромии системы (2)

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \psi(a, \mu). \qquad (3)$$

Теорема 1 [2]. Пусть для системы (2) с оператором монодромии вида (3) выполняются условия: 1) $\det(X - E) = 0$; 2) существует пара (a_0, μ_0), $a_0 \ne 0_n$, $\mu_0 \ne 0_m$, для которой $[X - E]a_0 = 0_n$, $p(a_0, \mu_0) = 0_n$; 3) $rang P = n$ для $n \times m$-матрицы $P = [p'_a(a_0, \mu_0)K \;\; p'_\mu(a_0, \mu_0)]$, K – фундаментальная матрица решений системы $[X - E]a = 0_n$. Тогда система (2) имеет малое периодическое решение с направлением ветвления (a_0, μ_0).

Условия 1) и 2) теоремы 1 необходимы для наличия малого периодического решения [3].

Модели (1) соответствуют система вида (2)

$$\dot{x} = Ax + f_1(t,x,\mu) + \widetilde{f}(t,x,\mu), \qquad (4)$$

в которой $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1 = y$, $x_2 = -\dot{x}_1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\omega = \dfrac{2\pi m}{\beta}$, $f_1(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1^2 \cos\beta t x_1 - \mu_2^2 x_2 - x_1^3/6 \end{pmatrix}$,

$\widetilde{f}(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\sin x_1 - x_1 + x_1^3/6\right) + \mu_1^2 \cos\beta t(\sin x_1 - x_1) \end{pmatrix}$,

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{-3} \left\| \widetilde{f}(t,\alpha x,\alpha\mu) \right\| \equiv 0.$

Определим необходимые условия существования малого периодического решения системы (4). Для этого используем прием, предложенный в работе [4].

Так как $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, то условие 1) теоремы 1 выполняется только при целом значении $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{m}{\beta} \ge 1$, то есть при $X = E$. Поэтому далее будем предполагать, что $\beta = m/\nu$ – рациональное число.

Для системы (4) найдем локальное представление вида (3) оператора монодромии при $\omega = 2\pi\nu$, $\nu \in N$. Тогда $X - E = 0_{22}$. Вычислим первое приближение оператора монодромии, нелинейно зависящее от (a,μ),

$$p(a,\mu) = \int_0^{\omega} X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a, \mu)\, d\tau. \qquad (5)$$

При $\beta \ne 2$ из равенства (5) получим

$$p(a,\mu) = -\frac{\pi m}{8} \begin{pmatrix} 8\mu_2^2 a_1 - a_2(a_1^2 + a_2^2) \\ 8\mu_2^2 a_2 + a_1(a_1^2 + a_2^2) \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Проверим условие 2) теоремы 1. При этом всюду далее можно предполагать, что направление ветвления $a_0 = (a_{01}, a_{02})^T$ в фазовом пространстве удовлетворяет условию $\|a_0\|_2^2 = c^2 > 0$. В силу равенства (6) из уравнения $p_1(a_0,\mu) = 0$ выразим $8\mu_2^2 = c^2 a_{02}/a_{01}$, а из уравнения $p_2(a_0,\mu) = 0$ выразим $8\mu_2^2 = -c^2 a_{01}/a_{02}$.

Полученное противоречие позволяет сделать **вывод**: при $\beta \ne 2$ система (4) не имеет малого периодического решения. Из равенства (6) следует, что в рассматриваемом случае функция $p(a,\mu)$, свойства которой определяют условия существования малого периодического решения, не зависит от μ_2^2. Следовательно, сделанный вывод не зависит от амплитуды вибрации точки подвеса маятника.

Пусть далее $\beta = 2$. Тогда из равенства (5) при $\omega = 2\pi$ получим

$$p(a,\mu) = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 4\mu_1^2 a_2 - 8\mu_2^2 a_1 + a_2(a_1^2 + a_2^2) \\ 4\mu_1^2 a_1 - 8\mu_2^2 a_2 - a_1(a_1^2 + a_2^2) \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Из уравнения $p(a_0,\mu) = 0_2$ в силу условия (7) вычислим направление ветвления $\mu_0 = (\mu_{01}, \mu_{02})^T$ в пространстве параметров, для которого

$$\mu_{01}^2 = \frac{c^4}{4(a_{01}^2 - a_{02}^2)}, \quad \mu_{02}^2 = \frac{a_{01}a_{02}c^2}{4(a_{01}^2 - a_{02}^2)}. \qquad (8)$$

Итак, для любого $a_0 = (a_{01}, a_{02})^T$: $\|a_0\|_2 = c$, $a_{01}a_{02} \ge 0$, $|a_{01}| > |a_{02}|$, существует такое значение μ_0, определяемое равенствами (8), что пара (a_0, μ_0) удовлетворяет условию 2) теоремы 1.

Проверим условие 3) теоремы 1. Для матрицы Якоби $J = p'_a(a_0,\mu_0) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$, в которой

$$P_{11} = \frac{\pi}{2}\frac{a_{01}a_{02}^3}{a_{02}^2 - a_{01}^2}, \quad P_{22} = \frac{\pi}{2}\frac{a_{02}a_{01}^3}{a_{02}^2 - a_{01}^2},$$

$$P_{12} = \frac{\pi}{4}\frac{(a_{02}^4 - a_{01}^4) - 2a_{01}^2 a_{02}^2}{a_{02}^2 - a_{01}^2},$$

$$P_{21} = -\frac{\pi}{4}\frac{(a_{02}^4 - a_{01}^4) + 2a_{01}^2 a_{02}^2}{a_{02}^2 - a_{01}^2},$$

вычислим $\det J = \dfrac{\pi^2}{16}(a_{02}^2 + a_{01}^2)^2 = \dfrac{\pi^2}{16}c^4$. Так как в рассматриваемом случае $X = E$, то $K = E$, значит, $rang[p'_a(a_0,\mu_0)K \;\; p'_\mu(a_0,\mu_0)] = 2$.

Итак, по теореме 1 при $\beta = 2$ система (4) имеет малое 2π-периодическое решение с направлением ветвления (a_0,μ_0), удовлетворяющим равенству (8).

Исследуем периодическое решение на устойчивость по линейному приближению. С учетом условия (8) вычислим характеристики матрицы монодромии $M(\alpha) = E + \alpha J$ системы в вариациях

$$trM(\alpha) = 2 + \alpha trJ = 2 + \alpha\frac{\pi}{2}\frac{a_{01}a_{02}^3 + a_{02}a_{01}^3}{a_{02}^2 - a_{01}^2} =$$

$$= 2 + \alpha\frac{\pi}{2}\frac{a_{01}a_{02}c^2}{a_{02}^2 - a_{01}^2} = 2(1 - \alpha\pi\mu_{02}^2),$$

$$\det M(\alpha) = 1 + \alpha trJ + \alpha^2 \det J =$$

$$= 1 + 2\alpha(1 - \alpha\pi\mu_{02}^2) + \alpha^2\pi^2 c^4/16,$$

а затем вычислим мультипликаторы

$$\rho_{1,2}(\alpha) = 0.5\left(trM(\alpha) \pm \sqrt{(trM(\alpha))^2 - 4\det M(\alpha)} \right) =$$

$$= 1 - \alpha\pi\mu_{02}^2 \pm \sqrt{(\alpha\pi\mu_{02}^2)^2 - (\alpha\pi c^2/4)^2}.$$

Так как $\left|\rho_{1,2}(\alpha)\right| < 1$ при малых $\alpha > 0$, то можно сделать **вывод**: малое 2π-периодическое решение асимптотически устойчиво. Из вида мультипликаторов следует, что устойчивость обеспечивается за счет наличия вязкого трения.

Оценим количество малых периодических решений системы (4), то есть количество значений a_0, удовлетворяющих условиям (8) при заданном значении μ_0.

Очевидно, условия (8) остаются в силе при замене a_0 на $-a_0$, причем $p'_a(a_0, \mu_0) = = p'_a(-a_0, \mu_0)$, а значит система (4) имеет, по крайней мере, два малых устойчивых периодических решения. Выясним, существуют ли у рассматриваемой системы другие малые периодические решения.

Обозначим $a_{01} = c\cos\varphi$, $a_{02} = c\sin\varphi$. Тогда условия (8) примут вид

$$4\mu_{01}^2 = \frac{c^4}{\cos 2\varphi}, \; 8\mu_{02}^2 = c^2 tg 2\varphi, \tag{9}$$

где $\varphi \in (0, \pi/4) \cup (\pi, 5\pi/4)$. Допустим, задано направление ветвления μ_0 в пространстве параметров. Из условий (9) получим уравнение $\overline{\mu}\cos^2 2\varphi + \cos 2\varphi - \overline{\mu} = 0$, где $\overline{\mu} = \mu_{01}^2/(4\mu_{02}^2)^2$. Это уравнение имеет решения $\varphi_1 = \varphi_0/2$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, $\varphi_0 = \arccos\frac{\sqrt{1+(2\overline{\mu})^2} - 1}{2}$. Подставив эти значения во второе из равенств (9), получим $c_0 = \sqrt{8\mu_{02}^2 ctg\varphi_0}$, значит условиям (8), необходимым для направления ветвления, при заданном μ_0 удовлетворяют только два значения:

$$a_0 = c_0(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)^T, \tag{10}$$

$$-a_0 = c_0(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)^T.$$

Итак, установлено следующее утверждение.

Теорема 2. Система (4) не имеет малых периодических решений при $\beta \neq 2$. Если при $\beta = 2$ параметры изменяются согласованно $\mu_s^2 = \alpha^2\mu_{0s}^2 + o(\alpha^2)$, где $\mu_{0s} \neq 0$ – любые числа, $s = 1, 2$, то система (4) имеет два малых асимптотически устойчивых 2π-периодических решения с начальными значениями $a = \alpha a_0 + o(\alpha)$, где a_0 определяется из равенства (10).

Если $\beta = 2$, то по теореме 2 для маятника с моделью (1) при малых согласованных отклонениях значений коэффициента вязкого трения и длины маятника от нуля наблюдается мягкое возбуждение двух устойчивых 2π-периодических колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Морозов А.Д.** К задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59. – Вып. 4. – С. 590–598.
2. **Абрамов В.В.** Устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 3–5.
3. **Абрамов В.В.** Ветвление периодического решения неавтономной системы с малым параметром // Вестник РАЕН. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 3–7.
4. **Абрамов В.В.** Ветвление периодического решения уравнения Рэлея // Математика: фундаментальные и приклад-ные исследования и вопросы образования, 26–28 апреля 2016 г.: материалы конф. – Рязань: Изд-во РГУ имени С.А. Есенина, 2016. – С. 45–50.

Абрамов Владимир Викторович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46
тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru