УДК 517.977

ТЕОРЕМА БОЛЯ – ПЕРРОНА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ГЛФДСП)

П.М. Симонов
Пермский государственный национальный исследовательский университет

THEOREM OF BOHL – PERRON ON ASYMPTOTIC STABILITY OF HYBRID LINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT (HLFDSA)

P.M. Simonov

Рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Одно уравнение по части переменных функционально-дифференциальное, по другой части переменных – разностное, второе уравнение по части переменных разностное, по другой части переменных – функционально-дифференциальное. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н.В. Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: первое – это система функционально-дифференциальных уравнений, второе – система разностных уравнений. Изучены пространства решений. Получена теорема Боля – Перрона об асимптотической устойчивости для гибридной системы функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: теорема Боля – Перрона об асимптотической устойчивости, гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений, устойчивость, метод модельных уравнений.

The abstract hybrid system of functional differential equations is given. One part of the equation for variable functional differential, according to another of the variables is the difference one, the second part of the equation for variable differential, according to another of the variables is functional differential one. There is a system of two equations with two unknowns. Apply W-method N.V. Azbelev's to two equations. Two model equations were studied: one is a system of functional differential equations, and the second is a system of differential equations. We studied the solutions spaces. Received Bohl – Perron theorem's for the asymptotic exponential stability of the hybrid system of functional differential equations.

Keywords: theorem of Bohl – Perron on asymptotic stability, hybrid linear system of functional differential equations, stability, model equations' method.

1. Введение

Исследованию по устойчивости решений ГЛФДСП к настоящему времени посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных ГЛФДСП. Для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$
$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h),$$

$x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^k$, $x_2(\tau) = \psi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0)$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\psi : [-h, 0) \to \mathbb{R}^{n-k}$ – кусочно-непрерывная вектор-функция, получены необходимые и достаточное условия экспоненциальной устойчивости [1].

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в работах [2–4]. Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [5–8] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе, свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГЛФДСП, а именно гибридных линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГЛФДУП), формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости, в частности теорема Боля – Перрона.

2. Схема W-метода

Обозначим через

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$$

бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots$ размерами n, а через $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), ..., g(N), \ldots$ размерами n.

Каждой бесконечной матрице

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$$

можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + \\ + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \ldots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

Аналогично каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... \\ + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$.

Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом ℓ. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geq 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0,1)$.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt$ для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T > 0$.

Пусть пространство ℓ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ с полунормами $\|g\|_{\ell_T} = \sum_{i=0}^{T} \|g_i\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq 0$. Пространство ℓ_0 бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ с полунормами $\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum_{i=-1}^{T} \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq -1$.

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными, непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы $\mathrm{col}\{x, y\} : [0, \infty) \times [-1, \infty) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ образуют банахово пространство $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \cong (\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbf{M} \times \mathbb{R}^n)$ (пространство $\mathbf{D} \subset D$, пространство $\mathbf{M}_0 \subset \ell_0$, пространство $\mathbf{B} \subset L$, пространство $\mathbf{M} \subset \ell$, $\mathbf{B}, \mathbf{M}$ – банаховы пространства), обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{k=-1,0,1,\ldots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$, и для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}$ однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами.

Пусть модельное уравнений [5–8] $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство $\mathbf{B}$ с элементами из пространства L ($\mathbf{B} \subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть его решение при любом $z \in \mathbf{B}$ записывается в виде формулы Коши $x(t) = U_{11}(t)x(0) + (W_{11}z)(t)$.

Для банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})} = \|\mathcal{L}_{11}x\|_{\mathbf{B}} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}$ и оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{B}$. Это условие эквивалентно тому [5, 8], что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0, \infty)$ с нормой $\|x\|_{W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0,\infty)} = \|\dot{x}\|_{\mathbf{B}} + \|x\|_{\mathbf{B}}$. Дальше будем это пространство обозначать как $W_{\mathbf{B}}$, при этом $W_{\mathbf{B}} \subset D$ и это вложение непрерывно.

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to \mathbf{B}$ $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчиво, если для каждой правой части $z \in \mathbf{B}$ каждое решение $x \in D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ [5]. $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ – область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11}$: $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$, удовлетворяющим условию выше, $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно $\mathbf{B}$-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно $\mathbf{B}$-устойчиво, если для любого $z \in \mathbf{B}$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in \mathbf{B}$ и $\dot{x} \in \mathbf{B}$ [5, гл. IV, § 4.6; 8].

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \to \ell$ рассматриваются как приведение на пары $(\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{B})$, $(\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}, \mathbf{M})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$. Эти операторы предполагаются линейными, вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \mathbf{M}$ принадлежит пространству $\mathbf{M}_0$ и представляется формулой Коши

$$y[t] = (Y_{11}y(-1))[t] + (C_{22}g)[t] =$$

$$Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]g[s].$$

Для $1 \le p < +\infty$ обозначим пространства:

$$\ell_{p0} = \left\{ y \in \ell_0 : \| y \|_{\ell_{p0}} = \left(\sum_{k=-1}^{+\infty} \| y(k) \|_{\mathbb{R}^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$$\ell_p = \left\{ g \in \ell : \| g \|_{\ell_p} : \| g \|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \| g(k) \|_{\mathbb{R}^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Для $p = \infty$ обозначим пространства:

$$\ell_{\infty 0} = \{ y \in \ell_0 : \| y \|_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} \| y(k) \|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \},$$

$$\ell_{\infty} = \{ g \in \ell : \| g \|_{\ell_\infty} = \sup_{k=0,1,\cdots} \| g(k) \|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \}.$$

Банаховы пространства ℓ_{p0} и ℓ_p – это примеры пространств типа $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}$.

Обозначим $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$. Тогда (1) записывается в виде $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$.

Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы $\dot{x} = F_{11}^0 x + F_{12}^0 z + z$, $\Delta y = F_{21}^0 z + F_{22}^0 y + u$, где операторы $F_{11}^0 : D \to L$, $F_{12}^0 : \ell_0 \to L$, $F_{12}^0 : \ell_0 \to L$, $F_{21}^0 : D \to \ell$, $F_{22}^0 : \ell_0 \to \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так: $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \mathrm{col}\{z, u\}$. Пусть её решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{W} : L \times \ell \to D \times \ell_0$ – непрерывный вольтерров оператор Коши для системы, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$, $U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to D \times \ell_0$ – фундаментальная матрица для системы, $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$.

3. Теоремы Боля – Перрона

Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [9, 10] отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}_1)$-устойчивость, где $\mathbf{B}_1$ – некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$.

Следуя традиции Пермского семинара [5–8], соответствующие утверждения будем называть теоремами Боля – Перрона. В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства $\mathbf{B} \subset L$, вытекающие из их порядковой структуры, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем частичную упорядоченность: $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \ge 0$, если $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$; $\alpha \ge \beta$, если, $\alpha - \beta \ge 0$. Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha| = \mathrm{col}\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством монотонности: $\| \alpha \|_{\mathbb{R}^n} \le \| \beta \|_{\mathbb{R}^n}$, если $|\alpha| \le |\beta|$. В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем отношение порядка в пространстве L, а именно $y \ge 0$, если $y(t) \ge 0$ почти всюду на $[0, \infty)$; $y \ge z$, если $y - z \ge 0$. Через $|y|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0, \infty)$ определяемую равенством $|y|(t) = |y(t)|$. Относительно банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве $\mathbf{B}$ согласована с порядком через условие идеальности: если $z \in L$, $y \in \mathbf{B}$ и $|z| \le |y|$, то $z \in \mathbf{B}$ и $\| z \|_{\mathbf{B}} \le \| y \|_{\mathbf{B}}$.

Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (банаховых идеальных пространств [11]), отметим следующие: 1) норма в таком пространстве $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонности; 2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства $\mathbf{B}$ имеет точные грани ($\mathbf{B}$ – K–пространство); 3) в пространстве $\mathbf{B}$ определены «срезки» – операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \subset [0,\infty)$; 4) вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно.

4. Асимптотическая устойчивость

Введем подмножество $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$ всех таких функций $z \in \mathbf{B}$, что для каждой функции z выполняется равенство $\lim\limits_{s\to\infty} \| \chi_{[s,\infty)} z \|_{\mathbf{B}} = 0$. Здесь и ниже χ_M – характеристическая функция множества M. Иначе говоря, пространство $\mathbf{B}_0$ состоит из всех функций $z \in \mathbf{B}$, стремящихся при $t \to \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{B}$, причем нетрудно показать, что $\mathbf{B}_0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{B}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$ линейного многообразия всех финитных функций $z \in \mathbf{B}$. Пусть далее C_0 – подпространство пространства C, состоящее из всех таких $x \in C$, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, $\| x \|_{C_0} = \| x \|_C$.

Будем предполагать, что для пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ выполнены условия:

а) оператор Коши W_{11} действует из пространства $\mathbf{B}_0$ в пространство C_0 и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ принадлежат пространству C_0.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0) \subset C_0$ и асимптотическая устойчивость модельного уравнения.

Лемма 1. Имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \subset C$.

Таким образом, в указанных предположениях относительно пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения, $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}_{11} x = z$ гарантирует устойчивость по Ляпунову, а $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$-устойчивость – асимптотическую устойчивость.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ [5, 8].

Теорема 1. Пусть уравнение $\mathcal{L}_{11} x = z$ $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$-устойчиво и оператор $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to L$ действует из пространства $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$ в пространство $\mathbf{B}_0$. Тогда это уравнение $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$-устойчиво.

Обозначим $Q_{11} = \mathcal{L}_{11} W_{11}$. Справедливы леммы.

Лемма 2. Для линейного ограниченного вольтеррова оператора $Q_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ справедливо включение $Q_{11}^* \mathbf{B}_0^* \subset \mathbf{B}_0^*$.

Лемма 3. Пусть линейный ограниченный оператор $Q_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ вольтерров и $Q_{11} \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0$. Тогда если этот оператор имеет обратный оператор $Q_{11}^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, то $Q_{11}^{-1} \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0$.

Введем банахово пространство всех таких функций $z \in \ell_\infty^0 \subset \ell_\infty$ ($z \in \ell_{\infty 0}^0 \subset \ell_{\infty 0}$), что для каждой функции z выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \| \chi_{[n,\infty)} z \|_{\ell_\infty} = 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \| \chi_{[n,\infty)} z \|_{\ell_{\infty 0}} = 0$).

Будем предполагать, что для пространства ℓ_∞ ($\ell_{\infty 0}$) и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ выполнены условия:

а) оператор Коши W_{22} действует из пространства ℓ_∞^0 в пространство $\ell_{\infty 0}^0$ и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = g$ принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^0$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{22}^0, \ell_\infty^0) \subset \ell_{\infty 0}^0$ и асимптотическая устойчивость модельного уравнения.

Сформулируем распространение теоремы Боля – Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема 2. Операторы $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to L$, $\mathcal{L}_{12} : D(\mathcal{L}_{12}) \to L$, $\mathcal{L}_{21} : D(\mathcal{L}_{21}) \to \ell$, $\mathcal{L}_{22} : D(\mathcal{L}_{22}) \to \ell$ непрерывно действует из пространств $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$ и $D(\mathcal{L}_{22}^0, \ell_\infty^0)$ в пространства $\mathbf{B}_0$ и ℓ_∞^0. Пусть, уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$-устойчиво и уравнение $\mathcal{L}_{22} y = g$ $D(\mathcal{L}_{22}^0, \ell_\infty)$-устойчиво. Пусть, далее, уравнение $\mathcal{L}_1 x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12} C_{22} \mathcal{L}_{21}) x = f_1$ $D(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$-устойчиво и оператор $\mathcal{L}_1 W_{11} : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_0$ ограничен. Тогда уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ будет $D(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}_0 \times \ell_\infty^0)$-устойчивым.

Работа выполнена при поддержке АО «ПРОГНОЗ».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.** Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 5. – С. 728–740.
2. **Ларионов А.С., Симонов П.М.** Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 34–37.
3. **Ларионов А.С., Симонов П.М**. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 14, № 5. – С. 38-45.
4. **Ларионов А.С., Симонов П.М**. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). III // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 15, № 3. – С. 63-69.
5. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 2001. – 230 с.
6. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 4. – С. 555–562.
7. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1659– 1668.
8. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 196– 204.
9. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
10. **Массера Х.Л., Шеффер Х.Х**. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П**. Функциональный анализ. – 4-е изд., испр. – СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. – 816 с.

Симонов Пётр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике Пермского государственного национального исследовательского университета
614083, г. Пермь, а/я 7345
тел. 8(342)2396849, 8(342)2403028; e-mail: simpm@mail.ru