**УДК 517.91**

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ ГОЛОМОРФНОСТИ

**А.З. Пчелова**

*Чувашский государственный педагогический университет имени И.Я. Яковлева*

# APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF CAUCHY PROBLEMS FOR A CLASS OF FIRST-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE REGION HOLOMORPHY

**A.Z. Pchelova**

Рассматривается класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с полиномиальной правой частью не ниже третьей степени, решения которых обладают подвижными особыми точками, в общем случае не интегрируемые в квадратурах. Применяется приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками алгебраического типа, разработанный В.Н. Орловым. Приводится доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для рассматриваемых дифференциальных уравнений в области голоморфности. В доказательстве этой теоремы применяется метод мажорант к решению нелинейных дифференциальных уравнений, а не к правой части дифференциальных уравнений, как это сделано в классической литературе. Предлагается структура приближенного аналитического решения задачи Коши для рассматриваемых уравнений как с точными, так и возмущенными значениями начальных условий; приводятся оценки погрешностей этих приближенных решений. Полученные результаты сопровождаются расчетами. Проводится сравнение результатов расчетов с аналогичными результатами, выполненными другим автором.

*Ключевые слова:* нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, подвижная особая точка, задача Коши, приближенное аналитическое решение, погрешность приближенного решения, возмущение начального условия, область голоморфности.

The article considers a class of first-order nonlinear ordinary differential equations with polynomial right part of not lower than the third degree, whose decisions have movable singular points. These equations are not solvable in quadratures in a common case. We use the approximate method for solving nonlinear differential equations with movable singular points of algebraic type proposed by V.N. Orlov The existence and uniqueness of solution of the Cauchy problem for this class of differential equations in the region of holomorphy are considered. In proof of this theorem the method of majorants is used not to right part of differential equations, as it is done in classic literature, but to the solution of the examined nonlinear differential equations. The approximate analytical solution structure of these equations with exact and perturbed values of the initial conditions, estimates of the errors for approximate solutions are given. The results are accompanied by examples of calculations. We provide a comparison of calculation results with similar results performed by another author.

*Keywords*: nonlinear ordinary differential equation, movable singular point, Cauchy problem, approximate analytical solution, error of the approximate solution, perturbation of the initial condition, region of holomorphy.

## 1. Актуальность и методы исследования

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения представляют достаточно большой интерес для приложений, поскольку многие модели процессов различной физической, экономической и другой природы описываются подобными уравнениями. Так, например, к дифференциальному уравнению Риккати приводят задачи теории оптимального управления, задача построения оптимальных фильтров Кальмана – Бьюси [1, 2]. В последнее время решения экономических задач приводят не только к скалярным, но и к матричным дифференциальным уравнениям Риккати [2, 3]. Ряд задач теории эволюционных процессов сводится к уравнениям Пенлеве [4–6]. Задачи нелинейной оптики при описании сверхизлучательной лавины, теории конечной упругости, нелинейной диффузии, нелинейной волновой теории, нелинейной теплопроводности установившегося режима приводят к уравнениям Абеля [7, 8]. Перечисленные виды нелинейных дифференциальных уравнений относятся к категории не разрешимых в общем случае в квадратурах, так как их решения обладают подвижными особыми точками – простыми, кратными, критическими полюсами [1–8].

Известные приближенные численные и аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений не применимы к нелинейным дифференциальным уравнениям ввиду особенности последних – наличия подвижных особых точек у их интегралов. Вследствие этого задача нахождения приближенных решений указанного выше класса нелинейных дифференциальных уравнений является актуальной.

В данной работе применяется приближенный метод решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками алгебраического типа, основанный на методах аналитической теории дифференциальных уравнений, математического анализа и вычислительной математики. Идея метода представлена в работах [1–8] и состоит в разделении области поиска решения дифференциального уравнения на область голоморфности и окрестность подвижной особой точки, а затем в построении приближенных аналитических решений в этих областях. Этот приближенный метод основан на решении ряда задач.

Следует отметить, что ранее данный метод применялся к скалярному и матричному дифференциальным уравнениям Риккати [1–3], к первому и второму дифференциальным уравнениям Пенлеве [4–6], к дифференциальным уравнениям Абеля первого и второго рода [7,8]. Впоследствии упомянутый метод был апробирован к ряду других нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [9–13].

Целью настоящей работы является построение приближенных аналитических решений задач Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в области голоморфности. Для достижения поставленной цели, согласно вышеупомянутому методу, в области голоморфности необходимо решить следующие задачи: 1) доказать теорему существования и единственности решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с полиномиальной правой частью; 2) построить приближенное решение задачи Коши с точным значением начального условия для рассматриваемых уравнений; 3) исследовать влияние возмущения начального условия на приближенное решение задачи Коши для исходных уравнений.

## 2. Результаты

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в общем случае не разрешимое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками алгебраического типа [14]

$$w'(z) = \sum_{i=0}^{k} f_i\, w^i(z)\,,\ k \ge 3\,, \tag{1}$$

где $f_i\ (i = 0, 1, \ldots, k)$ – голоморфные функции комплексной переменной $z$.

Подстановка $w = y(z)\,u(\xi) - \dfrac{f_{k-1}}{k\, f_k}$ при условиях $\dfrac{f_{k-1}}{k\, f_k} = \dfrac{2f_{k-2}}{(k-1)f_{k-1}} = \dfrac{3f_{k-3}}{(k-2)f_{k-2}} = \ldots$

$\ldots = \dfrac{(k-4)f_4}{5f_5} = \dfrac{(k-3)f_3}{4f_4} = \dfrac{(k-2)f_2}{3f_3}$, в которых

$$y = \exp\left(\int\left(f_1 - \frac{f_2 f_{k-1}}{C_k^{[k/2]} f_k}\right)dz\right), \qquad \xi = \int f_k\, y^{k-1} dz\,,$$

приводит уравнение (1) к нормальной форме $u'(\xi) = u^k(\xi) + I(z)$, при этом $f_k\, y^k I =$

$$= \frac{1}{k}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{f_{k-1}}{f_k}\right) + f_0 - \frac{1}{k}\cdot\frac{f_1 f_{k-1}}{f_k} + \frac{k-1}{k^k}\cdot\frac{f_{k-1}^k}{f_k^{k-1}}\,.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$w'(z) = w^k(z) + r(z),\ \ k \ge 3\,, \tag{2}$$

$$w(z_0) = w_0\,. \tag{3}$$

Докажем существование и единственность аналитического решения этой задачи. Известная теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши, относящаяся к одному подходу доказательства теоремы, не позволяет решить поставленную задачу. В работах [1–8] предложен иной подход в доказательстве теорем, основанный на применении метода мажорант не к правой части дифференциального уравнения, как это представлено в классической литературе, а к решению уравнения. Такой подход позволяет определить область действия теоремы, построить приближенное решение дифференциального уравнения и получить оценки этого приближенного решения.

**Теорема 1.** Предположим, что функция $r(z)$ задачи Коши (2), (3) удовлетворяет следующим условиям:

1) $r(z) \in C^1$ в области

$$|z - z_0| < \rho_1\,, \tag{4}$$

где $\rho_1 = const > 0$;

2) $\exists\, M_1$:

$$\frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!} \le M_1\,, \tag{5}$$

где $M_1 = const,\ \ n = 0, 1, 2\ldots$.

Тогда решение этой задачи Коши является голоморфной функцией

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \tag{6}$$

в области $|z - z_0| < \rho_2$, где

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{k\,(M_2^{k-1} + 1)}\right\},$$

$$M_2 = \max\left\{|w_0|,\ \sup_n \frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!}\right\},\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

**Доказательство.** В силу условия теоремы имеем

$$r(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n. \qquad (7)$$

Подставляя (6) в (2) с учетом (7), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n (z-z_0)^{n-1} =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} B_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n ,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n + A_n)(z-z_0)^n , \qquad (8)$$

где

$$B_n = \sum_{i_{k-1}=0}^{n} C_{n-i_{k-1}} \left( \sum_{i_{k-2}=0}^{i_{k-1}} C_{i_{k-1}-i_{k-2}} \left( \sum_{i_{k-3}=0}^{i_{k-2}} C_{i_{k-2}-i_{k-3}} \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots \left( \ldots \left( \sum_{i_2=0}^{i_3} C_{i_3-i_2} \left( \sum_{i_1=0}^{i_2} C_{i_2-i_1} C_{i_1} \right) \ldots \quad \ldots \right)\right)\right)\right).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $z$, получаем рекуррентное соотношение

$$n\, C_n = B_{n-1} + A_{n-1}, \qquad (9)$$

позволяющее однозначно определить коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ . Таким образом, получаем формальное единственное представление решения задачи Коши (2), (3) в области $|z-z_0|<\rho_1$ в виде степенного ряда (6).

Очевидно, с учетом соотношения (9) для коэффициентов структуры решения (6) будем иметь

$$C_n = P_{n(k-1)+1}(C_0, A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}), \quad n \ge 1,$$

где $P_{n(k-1)+1}$ – полином степени $n(k-1)+1$ от аргументов $C_0, A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ с положительными рациональными коэффициентами.

Докажем сходимость ряда (6) в области $|z-z_0|<\rho_2$ .

Введем обозначение

$$M_2 = \max\left\{ |w_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!} \right\}, \; n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

что возможно в силу (5).

С учетом выражений для первых коэффициентов $C_n$ ряда (6), полученных с помощью программного обеспечения, приходим к следующей гипотезе оценок:

$$|C_n| \le \frac{1}{n}\, k^{n-1} M_2 (M_2^{k-1}+1)^n , \; n \ge 1. \qquad (10)$$

Доказательство оценок (10) проводится методом математической индукции на основании рекуррентного соотношения (9).

Составим ряд

$$M_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, k^{n-1} M_2 (M_2^{k-1}+1)^n (z-z_0)^n ,$$

мажорирующий ряд (6). По признаку Даламбера получаем сходимость мажорантного ряда в круге $|z-z_0| < \dfrac{1}{k(M_2^{k-1}+1)}$. Следовательно, эта область является областью сходимости и для ряда (6).

Полагая $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \dfrac{1}{k(M_2^{k-1}+1)}\right\}$, получаем сходимость ряда (6) в области $|z-z_0|<\rho_2$, что и завершает доказательство теоремы.

Оценки для коэффициентов $C_n$ ряда (6), полученные при доказательстве теоремы 1, позволяют построить приближенное решение задачи Коши (2), (3) в виде

$$w_N(z) = \sum_{n=0}^{N} C_n (z-z_0)^n . \qquad (11)$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1. Тогда для приближенного аналитического решения (11) задачи Коши (2), (3) в области $|z-z_0|<\rho_2$ справедлива оценка погрешности

$$\Delta\, w_N(z) \le \frac{k^N}{N+1} \frac{M_2 (M_2^{k-1}+1)^{N+1} |z-z_0|^{N+1}}{1-k(M_2^{k-1}+1)|z-z_0|},$$

где $\rho_2$ и $M_2$ – из теоремы 1.

**Доказательство.** Учитывая оценки (10) для коэффициентов $C_n$, получаем

$$\Delta w_N(z) = |w(z)-w_N(z)| =$$

$$= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \right| \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| \cdot |z-z_0|^n \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot k^{n-1} \cdot M_2 (M_2^{k-1}+1)^n \cdot |z-z_0|^n \le$$

$$\le \frac{k^N}{N+1} \frac{M_2 (M_2^{k-1}+1)^{N+1} |z-z_0|^{N+1}}{1-k(M_2^{k-1}+1)|z-z_0|},$$

при этом $k(M_2^{k-1}+1)|z-z_0|<1$ . Таким образом, теорема доказана.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу Коши (2), (3), где $k=5$, $r(z)\equiv 0$, $w(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{4}i$. Эта задача имеет точное решение $w(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{-z-2+2\sqrt{3}\,i}}$.

Вычислим радиус области голоморфности $\rho_2 = 0{,}188235294$ с учетом начального условия задачи Коши. Выберем значение $z_1 = -0{,}09 +$ $+0{,}07\,i$, принадлежащее области $|z-z_0|<\rho_2$ . Заметим, что $|z_1 - z_0| = 0{,}114017543$.

В таблицах 1 и 2 приведем результаты расчетов для одного из четырех значений корня.

Таблица 1

| $z_1$ | $w(z_1)$ | $w_3(z_1)$ |
|---|---|---|
| $-0{,}09+0{,}07i$ | $0{,}436604781-$ $-0{,}250471723i$ | $0{,}436604764-$ $-0{,}250471751i$ |

**Примечание.** $w(z_1)$ – значение точного решения данного уравнения; $w_3(z_1)$ – значение приближенного решения данного уравнения.

Таблица 2

| $\Delta$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ |
|---|---|---|
| $3{,}2\cdot 10^{-8}$ | 0,00853524 | $10^{-6}$ |

**Примечание**. $\Delta$ – абсолютная погрешность; $\Delta_1$ – априорная погрешность, найденная по теореме 2; $\Delta_2$ – апостериорная погрешность приближенного решения, определенная путем решения обратной задачи теории погрешности.

Для $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ получаем $N = 18$. При $N = 4, 5, 6, \ldots, 18$ получаем уточнения приближенного решения $w_3(z_1)$, которые в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon_1$. Следовательно, получаем апостериорную погрешность $\Delta_2$ для приближенного решения $w_3(z_1)$, равную значению $\varepsilon_1 = 10^{-6}$.

Выше рассматривался случай точного начального условия для задачи Коши (2), (3) и было построено приближенное решение (11). При осуществлении аналитического продолжения вместо точного начального условия имеем приближенные начальные условия. В этой связи возникает задача влияния возмущения начального условия на приближенное решение. Возмущенное начальное условие

$$\tilde{w}(z_0) = \tilde{w}_0 \tag{12}$$

оказывает влияние на структуру приближенного аналитического решения (11), которое принимает следующий вид

$$\tilde{w}_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (z - z_0)^n, \tag{13}$$

где $\tilde{C}_n$ – возмущенные значения коэффициентов.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия 1, 2 теоремы 1 и известна абсолютная величина возмущения начального условия

$$|\,\tilde{w}_0 - w_0\,| = \Delta\,\tilde{w}_0 .$$

Тогда для приближенного аналитического решения (13) задачи Коши (2), (12) справедлива оценка погрешности

$$\Delta\,\tilde{w}_N(z) \le \frac{k^N}{N+1}\,\frac{M_3 (M_3^{k-1}+1)^{N+1}\,|\,z-z_0\,|^{N+1}}{1 - k\,(M_3^{k-1}+1)\,|\,z-z_0\,|} +$$

$$+\Delta M\left(1 + \frac{k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)\,|\,z-z_0\,|}{1-k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)\,|\,z-z_0\,|}\right) \tag{14}$$

в области $|\,z - z_0\,| < \rho_5$, где $\Delta M = \Delta\,\tilde{w}_0$, $M_3 =$

$$= \max\left\{|\,\tilde{w}_0\,|, \sup_n \frac{|\,r^{(n)}(z_0)\,|}{n!}\right\},\ n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$\rho_5 = \min\{\rho_3, \rho_4\}, \tag{15}$$

$$\rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{k\,(M_3^{k-1}+1)}\right\},$$

$$\rho_4 = \frac{1}{k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)} .$$

**Доказательство.** В соответствии с классическим подходом к оценке погрешности, имеем

$$\Delta\,\tilde{w}_N(z) = |\,w(z) - \tilde{w}_N(z)\,| \le$$

$$\le |\,w(z) - \tilde{w}(z)\,| + |\,\tilde{w}(z) - \tilde{w}_N(z)\,| =$$

$$= |\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z-z_0)^n - \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (z-z_0)^n\,| +$$

$$+ |\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n (z-z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n\,| =$$

$$= |\sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde{C}_n (z-z_0)^n\,| + |\sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{C}_n - C_n)(z-z_0)^n\,| \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} |\,\tilde{C}_n\,|\cdot|\,z-z_0\,|^n + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n\ |\,z-z_0\,|^n = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)},$$

где $|\,\tilde{C}_n - C_n\,| = \Delta\tilde{C}_n$.

Введем обозначение

$$M_3 = \max\left\{|\,\tilde{w}_0\,|, \sup_n \frac{|\,r^{(n)}(z_0)\,|}{n!}\right\},\ n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

что возможно в силу (5). Тогда для $\Delta^{(1)}$, принимая во внимание (10), по теореме 2 имеем оценку

$$\Delta^{(1)} \le \frac{k^N}{N+1}\,\frac{M_3 (M_3^{k-1}+1)^{N+1}\,|\,z-z_0\,|^{N+1}}{1 - k\,(M_3^{k-1}+1)\,|\,z-z_0\,|}, \tag{16}$$

справедливую в области $|\,z - z_0\,| < \rho_3$, где

$$\rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{k\,(M_3^{k-1}+1)}\right\}.$$

Предполагая оценку

$$\Delta\tilde{C}_n \le k^n\,\Delta M\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

где $\Delta M = \Delta\,\tilde{y}_0$, методом математической индукции доказываем ее справедливость.

Следовательно, для $\Delta^{(2)}$ получаем оценку

$$\Delta^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n\,|\,z-z_0\,|^n = \Delta\tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n\,|\,z-z_0\,|^n \le$$

$$\le \Delta M + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \, \Delta M \, ((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)^n \; |z-z_0|^n \le$$

$$\le \Delta M \left(1+\frac{k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)\,|z-z_0|}{1-k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)\,|z-z_0|}\right),$$

то есть

$$\Delta^{(2)} \le \Delta M \Bigg(1+ + \frac{k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)\,|z-z_0|}{1-k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)\,|z-z_0|}\Bigg) \qquad (17)$$

при условии $|z-z_0| < \rho_4 = \dfrac{1}{k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)}$.

Окончательно для выражения $\Delta\widetilde{w}_N(z)$ с учетом (16) и (17) получаем оценку (14), справедливую в области $|z-z_0|<\rho_5$, где

$$\rho_5 = \min\{\rho_3,\, \rho_4\}, \qquad \rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{k\,(M_3^{k-1}+1)}\right\},$$

$$\rho_4 = \frac{1}{k\,((M_3+\Delta M)^{k-1}+1)}.$$

Таким образом, доказательство теоремы завершено.

**Пример 2.** Построим первое аналитическое продолжение для приближенного решения задачи Коши, рассмотренной в примере 1.

Начальное условие задачи Коши (2), (12): $\widetilde{w}_0(-0{,}09+0{,}07\,i) = 0{,}436604764 - 0{,}250471751i$.

Величина возмущения $\Delta M$ не превышает абсолютной погрешности $\Delta = 3{,}2\cdot 10^{-8}$. Вычислим $\rho_5 = 0{,}187936150$. Выберем значение $z_2 = -0{,}18+0{,}14i$, принадлежащее области голоморфности $|z-z_0|<\rho_5$. Заметим, что $|z_2 - z_0| = 0{,}114017543$.

В таблицах 3 и 4 приведем результаты расчетов для одного из четырех значений корня.

Таблица 3

| $z_2$ | $w(z_2)$ | $\widetilde{w}_3(z_2)$ |
|---|---|---|
| $-0{,}18+0{,}14i$ | 0,440326696– –0,250906969$i$ | 0,440326662– –0,250907029$i$ |

**Примечание**. $w(z_2)$ – значение точного решения; $\widetilde{w}_3(z_2)$ – значение приближенного решения исходного уравнения.

Таблица 4

| $\Delta'$ | $\Delta'_1$ | $\Delta'_2$ |
|---|---|---|
| $7\cdot 10^{-8}$ | 0,008668518 | $10^{-7}$ |

**Примечание**. $\Delta'$ – абсолютная погрешность; $\Delta'_1$ – априорная погрешность, найденная по теореме 3; $\Delta'_2$ – апостериорная погрешность приближенного решения, определенная путем решения обратной задачи теории погрешности.

Как и в примере 1, определяем значение $N$ по заданной точности $\varepsilon_2$ приближенного решения (13). В случае $\varepsilon_2 = 10^{-7}$ получаем $N = 26$. Для $N = 4, 5, 6, \ldots, 26$ получаем уточнения приближенного аналитического решения, которые в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon_2$. Таким образом, получаем апостериорную погрешность $\Delta'_2$ для приближенного решения $\widetilde{w}_3(z_2)$, равную значению $\varepsilon_2 = 10^{-7}$.

### 3. Обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными

Полученные результаты позволяют построить приближенное решение задачи Коши для уравнения (2) в области голоморфности с любой заданной точностью. Для оптимизации структуры приближенного аналитического решения используется апостериорная погрешность.

Следует отметить, что ранее в работах [6, 11] были получены и изучены приближенные решения для уравнений $w'(z) = w^3(z) + r(z)$ и $w'(z) = = w^4(z) + r(z)$ в области голоморфности, представляющих собой частные случаи уравнения (2). Анализ результатов этих работ и результатов данной работы позволяет сделать следующие выводы. Оценки для коэффициентов $C_n$, найденные по формуле (10) для случаев $k = 3$ и $k = 4$, являются улучшенными по сравнению с оценками этих коэффициентов, полученными в вышеуказанных работах. Кроме того, области сходимости соответствующих регулярных рядов существенно увеличены по сравнению с результатами работ [6, 11]. Проиллюстрируем это на следующем примере.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу Коши из [11]:

$$w'(z) = w^4(z),\; w(0{,}25+0{,}25i) = -0{,}5-0{,}5i.$$

Эта задача имеет точное решение $w(z) = = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2{,}75(1+i)-3z}}$. Радиус голоморфности с учетом начального условия равен $\rho_2 = 0{,}184699031$. Выберем значение $z_1 = 0{,}27+0{,}28i$, принадлежащее области $|z-z_0|<\rho_2$. Заметим, что $|z_1 - z_0| = 0{,}036055513$. Приведем результаты расчетов для одного из трех значений корня:

$$w(z_1) = -0{,}505088810 - 0{,}507719433i,$$

$$w_3(z_1) = -0{,}505088813 - 0{,}507719208i,$$

$\Delta = 2{,}3\cdot 10^{-7}$ – абсолютная погрешность приближенного решения $w_3(z_1)$. Будем обозначать значения величин, найденные по формулам из работы [11], звездочкой сверху.

В таблицах 5 и 6 приведем результаты расчетов.

Таблица 5

| $\rho_2$ | $\rho_2^*$ |
|---|---|
| 0,184699031 | 0,050252532 |

Таблица 6

| $\Delta_1$ | $\Delta_1^*$ |
|---|---|
| 0,000079747 | 0,082910726 |

**Примечание**. $\Delta_1$ – априорная погрешность приближенного решения $w_3(z_1)$, найденная по теореме 2.

Построим аналитическое продолжение для приближенного решения рассматриваемой задачи Коши. Начальные данные: $z_0 = 0{,}27 + 0{,}28i$; $\tilde{w}_0 = -0{,}505088813 - 0{,}507719208i$.

По формуле (15) находим $\rho_5 = 0{,}182839804$. Выберем значение $z_2 = 0{,}29 + 0{,}32i$, принадлежащее области $|z - z_0| < \rho_5$; заметим, что $|z_2 - z_0| = 0{,}044721360$. Имеем

$$w(z_2) = -0{,}510284742 - 0{,}518694518i;$$

$$\tilde{w}_3(z_2) = -0{,}510285082 - 0{,}518693738i;$$

$\Delta' = 8{,}5 \cdot 10^{-7}$ – абсолютная погрешность приближенного решения $\tilde{w}_3(z_2)$. Результаты расчетов приведем в таблицах 7 и 8.

Таблица 7

| $\rho_5$ | $\rho_5^*$ |
|---|---|
| 0,182839804 | 0,049460908 |

Таблица 8

| $\Delta_2$ | $\Delta_2^*$ |
|---|---|
| 0,000212373 | 0,624394426 |

**Примечание**. $\Delta_2$ – априорная погрешность приближенного решения $\tilde{w}_3(z_2)$, найденная по теореме 3.

В результате проведенных расчетов имеем значения априорных погрешностей значительно меньшие, чем соответствующие значения, найденные по формулам из [11].

## 4. Выводы

Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности, для которого построено приближенное аналитическое решение и исследовано влияние возмущения начального условия на приближенное решение. Получены оценки приближенных решений. Теоретические результаты подтверждены расчетами.

ЛИТЕРАТУРА


1. **Орлов В.Н.** Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политехн. ун-та. – 2008. – № 63. – С. 102–108.
2. **Орлов В.Н.** Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. – Чебоксары: Перфектум, 2012. – 112 с.
3. **Орлов В.Н.** Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник Московского авиац. ин-та. – 2008. – Т. 15, № 5. – С. 128–135.
4. **Лукашевич Н.А., Орлов В.Н.** Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 1829–1832.
5. **Орлов В.Н.** О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник Казанского гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.
6. **Орлов В.Н.** Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. – М.: МПГУ, 2013. – 174 с.
7. **Орлов В.Н.** Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 5, № 10. – С. 192–195.
8. **Редкозубов С.А., Орлов В.Н.** Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Известия Института инженерной физики. – 2010. – Т. 4, № 18. – С. 2–6.
9. **Орлов В.Н., Леонтьева Т.Ю.** Построение приближенного решения одного нелинейного

дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 26–37.

10. **Орлов В.Н., Иванов С.А.** Приближенное решение в области аналитичности одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 204–214.
11. **Орлов В.Н., Гузь М.П.** Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2012. – № 2 (12). – С. 75–81.
12. **Пчелова А.З.** Границы области применения приближенного решения в окрестности возмущенной подвижной особой точки одного дифференциального уравнения в комплексной области // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 170–179.
13. **Пчелова А.З.** Об одном варианте оценок приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Вестник Российской Академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 14, № 5. – С. 64–69.
14. **Голубев В.В.** Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.

Пчелова Алевтина Зиноновна, старший преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38
тел: +7(8352)62-30-84; e-mail: apchelova@mail.ru