

УДК 517.925

# КАЧЕСТВЕННОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ РЕГИОНА

Е.Ю. Лискина, С.А. Нелюхин

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина  
Рязанский государственный радиотехнический университет

## QUALITATIVE AND NUMERICAL RESEARCH OF THE ONE-SECTOR MODEL OF REGION ECONOMY

E.Y. Liskina, S.A. Nelukhin

Исследованы три модификации модели Р. Солоу. В обеих моделях конечное потребление зависит от среднегодовой численности занятых в экономике. Производственная функция первой модели является линейной однородной функцией среднегодовой численности занятых в экономике и стоимости основных фондов, второй модели – степенной функцией стоимости основных фондов, третьей – мультипликативной. Получены решения задачи Коши и фазовые портреты для всех моделей.

*Ключевые слова:* система дифференциальных уравнений, модель Солоу, решение задачи Коши.

**1. Введение.** В работе [1] была предложена следующая модификация модели Р. Солоу:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)F(K, L) - \bar{S}(L), \\ \dot{L} = rL, \end{cases} \quad (1)$$

в которой  $K$  – стоимость основных фондов экономики (капитал),  $L$  – официальная среднегодовая численность населения, занятого в экономике (труд),  $\mu$  – норма выбытия основных фондов,  $F(K, L)$  – производственная функция,  $a \in [0; 1)$  – склонность к потреблению,  $(1-a)$  – коэффициент валового накопления основного капитала,  $\bar{S}(L)$  – зависимость конечного потребления от среднегодовой численности населения, занятого в экономике,  $r$  – темп прироста среднегодовой численности населения, занятого в экономике.

В работе [1] методами регрессионного анализа [2] на основе опубликованных статистических данных [3, 4] были определены также значения параметров  $(1-a)$ ,  $r$ ,  $\mu$  и вид функций  $F(K, L)$ ,  $\bar{S}(L)$  для Рязанской области. В расчетах использовался уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

**2. Анализ производственных функций модели (1).** В работе [1] при идентификации модели (1) было получено несколько производственных функций:

We research two modifications of the Solow model. In both models final consumption depends on average annual number of employees. The production function of the first model is a linear homogeneous function of average annual number of employees and of fixed capital. The production function of the second model is a power function of fixed capital. The production function of the third model is a multiplicative function of average annual number of employees and of fixed capital. We obtain solutions of Cauchy problem and phase portraits for all models.

*Keywords:* system differential equations, Solow model, solution of Cauchy problem.

2.1. Линейно-однородная функция первого порядка  $X = a_1K + a_2L$  или с учетом числовых коэффициентов  $X = 0,3810K - 41,9924L$  (рис. 1). Статистические характеристики:  $n = 19$ ,  $R^2 = 0,9797$ ,  $A = 0,2337$ ,  $s_y = 19294,3168$ ,  $t_{кр} = 2,1098$ ,  $t_{нК} = 19,0343$ ,  $t_{нL} = -2,9232$ ,  $F_n = 409,9211$ ,  $F_{кр} = 4,4513$ . Уравнение и его коэффициенты статистически значимы на уровне  $\alpha = 0,05$ .

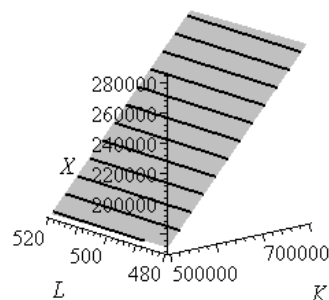


Рис. 1. Линейно-однородная производственная функция

В соответствии с [5, с. 322], данная функция характеризует экономическую систему, в которой выпуск продукции является результатом одновременного функционирования множества различных технологий. Однако полученная функция имеет следующие особенности:

1) предельная норма замены фактора  $K$  фактором  $L$  равна  $s_{KL} = \frac{a_2}{a_1} = -110,2163$ ; это означает, что увеличение официально зарегистрированного среднегодового числа занятых в экономике приведет к уменьшению ВРП;

2) область допустимых значений факторов  $K$  и  $L$  определяется неравенством  $K \geq -s_{KL}L$  или  $K \geq 110,2163L$ ;

3) коэффициент предельной эластичности по ресурсу  $L$  имеет вид  $\varepsilon_L = \frac{a_2 L}{a_1 K + a_2 L}$ , значение которого при данных значениях коэффициентов и всех  $K$  и  $L$  из области допустимых значений отрицательно.

Следовательно, данная производственная функция характеризует экономику со скрытой занятостью, некоторые причины которой проанализированы в [6].

Так как область допустимых значений факторов  $K$  и  $L$  производственной функции  $X = 0,3810K - 41,9924L$  не совпадает с положительным квадрантом  $(K, L, X)$ , а содержится в нем (область допустимых значений должна удовлетворять неравенству  $K \geq -\frac{a_2}{a_1}L$  или  $K \geq 110,2163L$ ), то возникла необходимость поиска другой производственной функции системы (1).

2.2. При построении регрессионной модели мультипликативной производственной функции  $X = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$  получили уравнение регрессии  $X = 2,8 \cdot 10^{-13} K^{1,4364} L^{3,5315}$  (рис. 2) со следующими статистическими характеристиками:  $n = 19$ ,  $R^2 = 0,9534$ ,  $\bar{R}^2 = 0,8158$ ,  $A = 0,1683$ ,  $s_y = 19859,4816$ ,  $t_{нK} = 9,8868$ ,  $t_{нL} = 1,2262$ ,  $t_{н0} = -1,4714$ ,  $t_{кр} = 2,1199$ ,  $F_n = 163,8101$ ,  $F_{кр} = 3,6337$ .

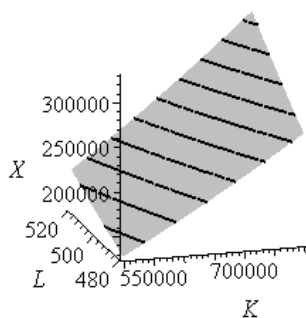


Рис. 2. Мультипликативная производственная функция

Статистические характеристики  $A$  и  $s_y$  уравнения  $X = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$  лучше, чем у уравнения  $X = a_1 K + a_2 L$ . Уравнение  $X = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$  статистически значимо в целом на уровне  $\alpha = 0,05$ , но его коэффициенты  $a_1$  и  $a_0$  статистически не значимы на уровне  $\alpha = 0,05$ . Но так как именно

мультипликативная производственная функция отражает сбалансированное производство, то теоретический интерес представляет исследование модели (1) с полученной мультипликативной производственной функцией.

2.3. Корреляционный анализ факторов  $X$ ,  $K$ ,  $L$  показал, что факторы  $K$  и  $L$  зависимы между собой (коэффициент корреляции  $r_{KL} = -0,8379$  и статистически значим на принятом уровне значимости). При этом  $r_{XK} = 0,9759$ ,  $r_{XL} = -0,7910$ . Так как  $|r_{XK}| > |r_{XL}|$ , то дополнительно для исследования необходимо выбрать однофакторную производственную функцию  $X = f(K)$ . Заметим, что в работе [7, с. 230–234] производственная функция, построенная по данным 1991–1999 годов также является однофакторной относительно  $K$ , что объяснялось незначительным ростом основных производственных фондов и существенным падением промышленного производства в анализируемый период.

2.4. Были построены два однофакторных уравнения регрессии  $X = \varphi_1 K$  и  $X = a_0 K^{a_1}$ . Уравнение  $X = \varphi_1 K$  и его коэффициенты оказались статистически значимыми на уровне  $\alpha = 0,05$ , но неудовлетворительными по статистическим характеристикам  $A$  и  $s_y$  ( $A = 0,4230$ ,  $s_y = 22985,1789$ ). Уравнение  $X = a_0 K^{a_1}$  приняло вид  $X = 0,0079 K^{0,0720}$  (рис. 3), а его статистические характеристики – значения:  $n = 19$ ,  $R^2 = 0,9491$ ,  $\bar{R}^2 = 0,8427$ ,  $A = 0,1753$ ,  $s_y = 18725,3522$ ,  $t_{кр} = 2,1098$ ,  $t_{нK} = 17,7971$ ,  $t_{н0} = -5,4195$ ,  $F_n = 316,7355$ ,  $F_{кр} = 4,4513$ . Уравнение и его коэффициенты статистически значимы на уровне  $\alpha = 0,05$ . Величины  $s_y$  и  $A$  уравнения  $X = a_0 K^{a_1}$  лучше, чем уравнения  $X = a_1 K + a_2 L$ .

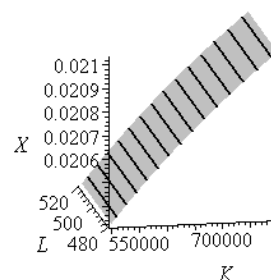


Рис. 3. Однофакторная степенная производственная функция

Производственная функция  $X = a_0 K^{a_1}$  удовлетворяет ограничениям производственных функций [5, с. 310], но не допускает взаимозаменяемости факторов. Выпуск определяется только стоимостью основных фондов, следовательно, увеличение числа рабочих мест не окажет никакого влияния на рост ВРП.

**3. Исследование модели (1) с линейно однородной производственной функцией.** Подставим производственную функцию  $X = a_1K + a_2L$  в систему (1), получим

$$\begin{cases} \dot{K} = ((1-a)a_1 - \mu)K + (1-a)a_2L - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}}, & (2) \\ \dot{L} = rL, & t > 2009 \text{ г.} \end{cases}$$

С числовыми значениями коэффициентов получим

$$\begin{cases} \dot{K} = 0,0914K - 10,8970L - e^{-13,5741 + \frac{12767,1341}{L}}, & (3) \\ \dot{L} = -0,0068L, & t > 2009 \text{ г.} \end{cases}$$

Непосредственно путем вычислений получены приведенные ниже результаты.

3.1. Системы (2), (3) не имеют конечного состояния равновесия в области положительных значений  $K, L$ . Фазовый портрет системы (3) и фазовая траектория решения, проходящего через точку  $(K(2013) = 671471; L(2013) = 500,7)$  на плоскости  $OLK$ , представлены на рисунке 4.

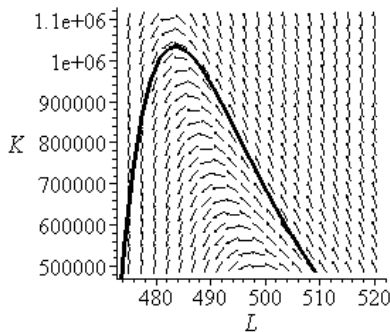


Рис. 4. Фазовый портрет системы (3) и проекция решения задачи Коши на плоскость  $OLK$

3.2. Решение задачи Коши  $(K(t_0) = K_0; L(t_0) = L_0)$  системы (2) имеет вид

$$\begin{cases} K(t) = \frac{(1-a)a_2L_0}{r - ((1-a)a_1 - \mu)} e^{r(t-t_0)} + \\ + \left( K_0 - \frac{(1-a)a_2L_0}{r - ((1-a)a_1 - \mu)} \right) e^{((1-a)a_1 - \mu)(t-t_0)} - \\ - e^{((1-a)a_1 - \mu)t} \int_{t_0}^t e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0} e^{-r(\tau-t_0)} - ((1-a)a_1 - \mu)\tau} d\tau, & (5) \\ L(t) = L_0 e^{r(t-t_0)}, & t > 2009 \text{ г.} \end{cases}$$

Для точки  $(K(2013) = 671471; L(2013) = 500,7)$  система (5) приняла вид (рис. 5):

$$\begin{cases} K(t) = 55578,6461e^{-0,0068(t-2013)} + \\ + 615892,3539e^{0,0914(t-2013)} - e^{0,0914t} \times \\ \times \int_{2013}^t e^{-13,5741 + 25,4986e^{0,0068(\tau-2013)} - 0,0914\tau} d\tau, & (6) \\ L(t) = 500,7e^{-0,0068(t-2013)}, & t > 2009 \text{ г.} \end{cases}$$

Согласно (5) официальная среднегодовая численность занятых в экономике убывает с постоянным темпом  $r = -0,0068$  и при отсутствии управляющих воздействий эта тенденция сохранится.

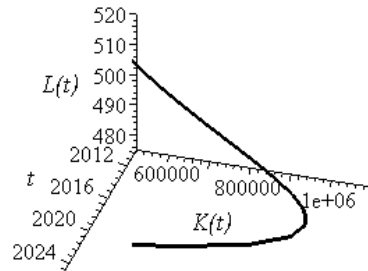


Рис. 5. Траектория решений (6) системы (3)

3.3. Из первого уравнения системы (2) следует, что для любого  $L > 0$  существует значение

$$\bar{K} = \frac{e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}} - (1-a)a_2L}{(1-a)a_1 - \mu}, \text{ при котором } \dot{K} = 0. \text{ Для}$$

системы (3) множество точек  $(L, \bar{K})$  задано равенством  $\bar{K} = 119,2630L + 10,9446e^{-13,5741 + \frac{12767,1341}{L}}$  и в проекции на плоскости  $OLK$  образует кривую, изображенную на рисунке 6.

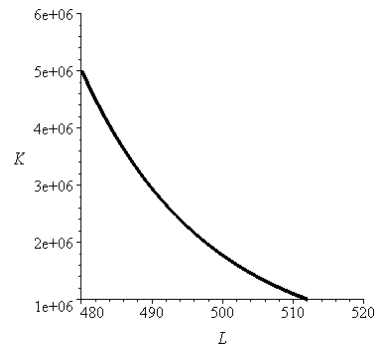


Рис. 6. Проекция множества точек  $(L, \bar{K})$  на плоскость  $OLK$

3.4. Анализ траекторий решения (5) систем (2), (3) показывает, что на траектории (5) существует точка  $(\bar{t}, \bar{L}, \bar{K})$ , в которой  $\dot{K} = 0$ . Введем обозначения  $b = ((1-a)a_1 - \mu)$ ,  $B_1 = \frac{(1-a)a_2L_0}{r - ((1-a)a_1 - \mu)}$ ,

$B_2 = \left( K_0 - \frac{(1-a)a_2L_0}{r - ((1-a)a_1 - \mu)} \right)$ , с учетом которых условие  $\dot{K} = 0$  приняло вид

$$\begin{aligned} B_1 r e^{r(t-t_0)} + B_2 b e^{b(t-t_0)} - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0} e^{-r(\tau-t_0)} - b\tau} - \\ - b e^{bt} \int_{t_0}^t e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0} e^{-r(\tau-t_0)} - b\tau} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Численный эксперимент показал, что равенство (7) выполняется при  $\bar{t} \in (2008; 2009)$ , которое не принадлежит области определения системы (3).

3.5. Производная  $\dot{K}$  состоит из трех слагаемых, обладающих свойствами:

а)  $B_1 r e^{r(t-t_0)} + B_2 b e^{b(t-t_0)} > 0$  при всех  $t > t_1$  и убывает;  $t_1 = t_0 + \frac{1}{b-r} \ln \frac{B_1(-r)}{B_2 b} < t_0$  при сущест-

вующих значениях коэффициентов системы (3) (например, для решения задачи Коши  $(K(2013) = 671471; L(2013) = 500,7)$  значение  $t_1 = 1962,03$ ); следовательно,  $B_1 r e^{r(t-t_0)} + B_2 b e^{b(t-t_0)} > 0$  при всех  $t \geq t_0$  и убывает;

$$б) \left( -e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0}} e^{-r(\tau-t_0)} \right) < 0 \text{ при всех } t \geq t_0$$

и убывает;

$$в) \left( -b e^{bt} \int_{t_0}^t e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0}} e^{-r(\tau-t_0)} - b\tau d\tau \right) < 0 \text{ при всех}$$

$t > t_0$  и возрастает.

Следовательно, для определения знака  $\dot{K}$  на промежутке  $[t_0; +\infty)$  достаточно вычислить  $\dot{K}(t_0)$ . Тогда  $\dot{K}(t_0) = B_1 r + B_2 b - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0}}$ . При  $L(2013) = 500,7$   $\dot{K}(2013) = -95018,8802 < 0$ . Тогда при всех  $t \geq t_0$   $\dot{K}(t) < 0$ , а стоимость основных фондов  $K(t)$  является убывающей функцией времени.

По построению система (1) является моделью закрытой экономики, то есть не имеющей чистого экспорта и внешних инвестиций. Тот факт, что при всех  $t \geq t_0 > 2009 > \bar{t}$  производная  $\dot{K}(t) < 0$ , показывает, что экономическая система региона не может продуктивно функционировать без внешних дотаций и инвестиций. Построенная модель (3) подтверждает дотационный характер экономики Рязанской области.

**4. Исследование модели (1) с однофакторной степенной производственной функцией.**

После подстановки функции  $X = a_0 K^{a_1}$  в систему (1) получим систему

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)a_0 K^{a_1} - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}}, \\ \dot{L} = rL, \quad t > 2009 \text{ \AA}. \end{cases} \quad (8)$$

С числовыми значениями коэффициентов получим

$$\begin{cases} \dot{K} = -0,0075K + 0,0021K^{0,0079} - e^{-13,5741 + \frac{12767,1341}{L}}, \\ \dot{L} = -0,0068L, \quad t > 2009 \text{ \AA}. \end{cases} \quad (9)$$

Непосредственно с помощью вычислений получены следующие результаты:

4.1. Системы (8), (9) не имеют конечного состояния равновесия в области положительных значений  $K, L$ . Фазовый портрет системы (9) и фазовая траектория решения, проходящего через точку  $(K(2013) = 671471; L(2013) = 500,7)$  на плоскости  $OLK$ , представлены на рисунке 7.

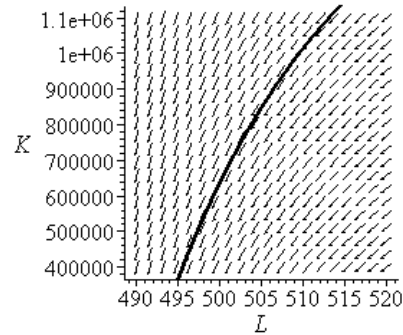


Рис. 7. Фазовый портрет системы (9) и проекция решения задачи Коши на плоскость  $OLK$

4.2. Решение задачи Коши  $(K(t_0) = K_0; L(t_0) = L_0)$  системы (8) в окрестности точки  $K(t_0) = K_0$  имеет вид

$$\begin{cases} K(t) = K_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{K^{(m)}(t_0)}{m!} (t-t_0)^m, \\ L(t) = L_0 e^{r(t-t_0)}, \quad t > 2009 \text{ г}. \end{cases} \quad (10)$$

Траектория решения, удовлетворяющего начальному условию  $(K(2013) = 671471; L(2013) = 500,7)$ , представлена на рисунке 8.

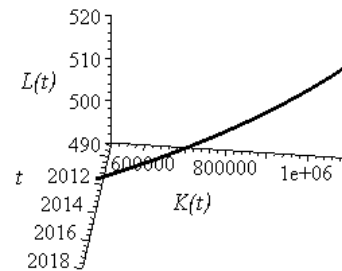


Рис. 8. Траектория решения системы (9)

Подставляя в систему (10) начальные условия  $(K(2013) = 671471; L(2013) = 500,7)$  и ограничивая ряд Тейлора четырьмя слагаемыми, получим приближенное решение задачи Коши системы (9) для  $t_0 = 2013$  г.:

$$\begin{cases} K(t) \approx 671471 - 145878,6870(t-2013) - 13630,6178(t-2013)^2 - 819,9207(t-2013)^3 + o((t-2013)^3), \\ L(t) = 500,7 e^{-0,0068(t-2013)}, \quad t > 2009 \text{ г}. \end{cases} \quad (11)$$

Траектория  $K(t)$  представлена на рисунке 9.

4.3. Из первого уравнения системы (8) следует, что для всех  $K \in \left[ 0; \left( \frac{(1-a)a_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{1-a_1}} \right] \setminus \{K_1\}$ ,

где  $K_1$  – решение уравнения

$$\ln\left( (1-a)a_0 K^{a_1} - \mu K \right) - \sigma_1 = 0,$$

существует  $\bar{L} = \frac{\sigma_2}{\ln\left( (1-a)a_0 K^{a_1} - \mu K \right) - \sigma_1}$ , при

котором  $\dot{K} = 0$ . Численный эксперимент показал, что для системы (9) множество точек  $(K, \bar{L})$  задано равенством

$$\bar{L} = \frac{12767,1341}{\ln(0,0020K^{0,0720} - 0,0075K) + 13,5741}$$

и в проекции на плоскости  $OLK$  образует кривую, изображенную на рисунке 10. Область определения функции  $\bar{L}(K)$   $K \in [0; 0,2472] \setminus \{0,246989\}$ . Следовательно, в диапазоне рассматриваемых начальных условий  $t_0 \in [2010; 2014]$ ,  $L_0 \in [494,1; 502,8]$ ,  $K_0 \in [577233; 748636]$  первое уравнение системы (9) не имеет состояний равновесия.

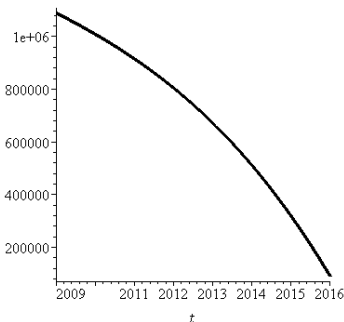


Рис. 9. Траектория  $K(t)$  системы (11)

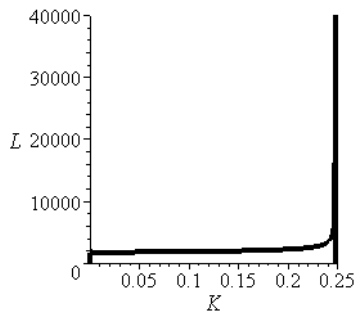


Рис. 10. Проекция множества точек  $(K, \bar{L})$  на плоскость  $OKL$

4.4. Покажем, что при существующих значениях коэффициентов систем (8), (9) при всех  $K_0 \in [577233; 748636]$  и всех  $t \geq t_0$   $\dot{K}(t) < 0$ . Действительно, производная  $\dot{K}$  состоит из двух слагаемых:  $g_1(K) = (1-a)a_0K^{a_1} - \mu K$  и  $g_2(t) = -e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0}} e^{-r(t-t_0)}$ . Решая неравенство  $g_1(K) > 0$ , получаем, что оно справедливо при  $K \in \left[0; \left(\frac{(1-a)a_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-a_1}}\right]$  с учетом числовых значений коэффициентов при  $K \in [0; 0,2472]$ . Исследуя функцию  $g_1(K)$  на возрастание и убывание, получаем, что  $g_1(K)$  убывает при всех

$$K > \left(\frac{(1-a)a_0a_1}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-a_1}} \quad (K > 0,0145, \text{ рисунок 11}).$$

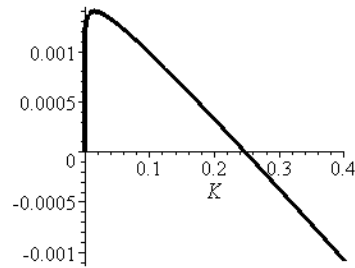


Рис. 11. Функция  $g_1(K)$

Слагаемое  $g_2(t) = -e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0}} e^{-r(t-t_0)}$  является отрицательной и убывающей величиной при всех  $t \geq t_0$  (рис. 12).

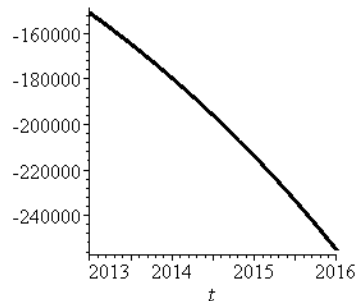


Рис. 12. Функция  $g_2(t)$

Таким образом,  $\dot{K}(t) < 0$  при всех  $t \geq t_0$  и всех  $K_0 \in [577233; 748636]$ , а решение  $K(t)$  системы (8), удовлетворяющее начальному условию  $K(2013) = 671471$ , является строго убывающей функцией. Следовательно, системы (8), (9) моделируют экономику, которая:

- а) характеризуется спадом производства в анализируемом периоде;
- б) не может автономно функционировать без дотаций и инвестиций извне;
- в) характеризуется снижением официальной среднегодовой численности занятых в экономике.

**5. Исследование модели (1) с мультипликативной производственной функцией.** При  $X = a_0K^{a_1}L^{a_2}$  система (1) приняла вид

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)a_0K^{a_1}L^{a_2} - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}}, \\ \dot{L} = rL, \quad t > 2009 \text{ г.} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \dot{K} = -0,0075K - 7,266 \cdot 10^{-14} K^{1,4364} L^{3,5315} - \\ - e^{-13,5741 + \frac{12767,1341}{L}}, \\ \dot{L} = -0,0068L, \quad t > 2009 \text{ г.} \end{cases} \quad (13)$$

Непосредственно путем вычислений получены следующие результаты:

5.1. Системы (12), (13) не имеют конечного состояния равновесия в области положительных значений  $K, L$ . Фазовый портрет системы (13) и фазовые траектории решений, проходящих через точки  $(K(2010)=577233; L(2010)=502,8)$  и  $(K(2013)=671471; L(2013)=500,7)$  на плоскости  $OLK$ , представлены на рисунке 13.

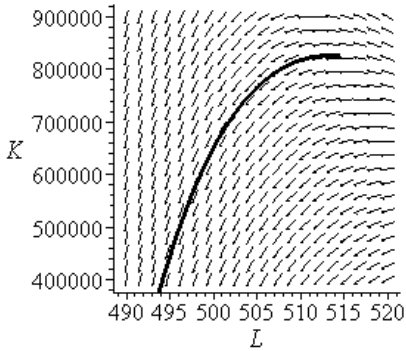


Рис. 13. Фазовый портрет системы (13) и проекция решения задачи Коши на плоскость  $OLK$

5.2. Решение задачи Коши  $(K(t_0)=K_0; L(t_0)=L_0)$  системы (12) в окрестности точки  $K(t_0)=K_0$  имеет вид (10). Траектория решения, удовлетворяющего начальному условию  $(K(2013)=671471; L(2013)=500,7)$ , представлена на рисунке 14.

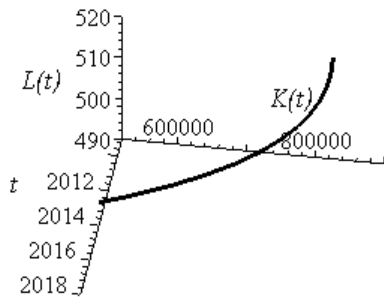


Рис. 14. Траектория решения системы (13)

Подставляя в систему (10) начальные условия  $(K(2013)=671471; L(2013)=500,7)$  и ограничивая ряд Тейлора четырьмя слагаемыми, получим приближенное решение задачи Коши системы (13) для  $t_0 = 2013$  г.:

$$\begin{cases} K(t) \approx 671471 - 87695,7557(t - 2013) - \\ - 19568,5223(t - 2013)^2 - \\ - 1449,9779(t - 2013)^3 + o((t - 2013)^3), \\ L(t) = 500,7e^{-0,0068(t-2013)}, \quad t > 2009 \text{ г.} \end{cases} \quad (14)$$

Траектория  $K(t)$  представлена на рисунке 15.

5.3. Состояние равновесия первого уравнения системы (12) определяется условием  $(1-a)a_0K^{a_1}L^{a_2} - \mu K - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}} = 0$ . Численный эксперимент показал, что это условие справедливо

при  $t \approx 2009,0341$ . При всех  $t > 2009,0341$  выполняется неравенство  $\dot{K} < 0$ , а решение  $K(t)$  системы (13), удовлетворяющее начальному условию  $K(2013)=671471$ , является строго убывающей функцией при  $t > 2009,0341$ . Следовательно, системы (12), (13) также моделируют экономику, которая характеризуется спадом производства в анализируемом периоде и не может автономно функционировать без дотаций и инвестиций извне.

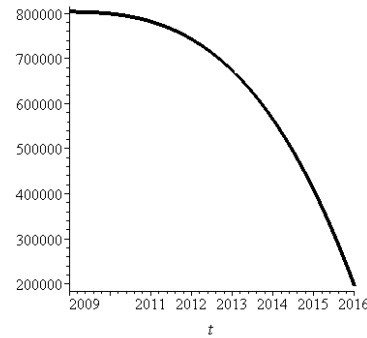


Рис. 15. Траектория  $K(t)$  системы (14)

**6. Проверка адекватности моделей (2), (3); (8), (9) и (12), (13).** Для проверки адекватности моделей были вычислены значения  $K$  и  $L$  при  $t_1 = 2014$  г. по формулам (6), (11) и (14) и выполнено сравнение с наблюдаемым значением, известным из [3]. Результаты вычислений представлены в таблице и на рисунке 16.

Таблица  
Наблюдаемое и модельные значения  $K$  и  $L$

Год	Наблюдаемое значение	Модель (3)	Модель (8)	Модель (13)
$K$ , млн. руб.				
2013	671471	671471	671471	671471
2014	748636	557660	5111415	562756
$L$ , тыс. чел.				
2013	500,7	500,7	500,7	500,7
2014	494,1	497,3	497,3	497,3

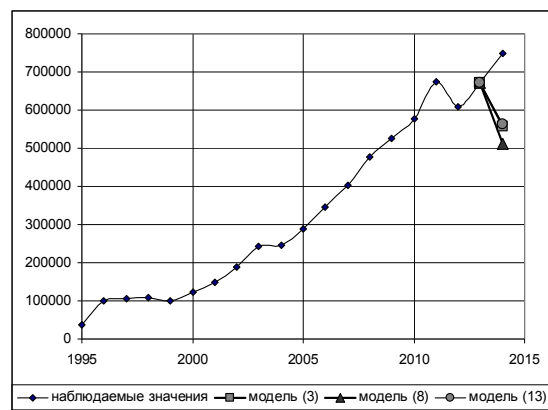


Рис. 16. Сравнение наблюдаемого и модельных значений  $K$

Из таблицы и рисунка 16 следует, что наблюдаемые значения принадлежат возрастающей тенденции, модельные значения – убывающей. Следовательно, все рассмотренные варианты модели (1) не являются адекватными для использования в прогнозировании. Можно предположить, что при их построении не учтены некоторые существенные факторы, такие, как дотации из федерального бюджета.

**6. Выводы.** Анализ всех рассмотренных моделей показал:

1) экономика региона является дотационной и без дотаций извне существовать не может;

2) официальная среднегодовая численность занятых в экономике снижается с темпом  $|r| = 0,0068$ , что может быть связано с ростом скрытой занятости;

3) увеличение числа рабочих мест либо приведет к снижению ВРП (модель (3)), либо не окажет на ВРП никакого влияния (модель (9)); модель

(13) лишена этого недостатка, но не может использоваться в прогнозировании в силу статистической незначимости коэффициентов производственной функции;

4) доминирующее влияние на знак производной  $\dot{K}$  имеет величина конечного потребления, определяемого функцией  $\bar{S}(L(t)) = -e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L_0} e^{-r(t-t_0)}}$ ;

5) построенные модели требуют корректировки, так как не учитывают некоторых существенных факторов, определяющих структуру экономики региона.

Дальнейшее исследование предполагает определение влияния инфляции на стоимость основных фондов и величину конечного потребления и дотаций из федерального бюджета на структуру экономики региона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лискина Е.Ю., Лазарева И.А. Идентификация односекторной динамической модели экономики региона по данным Федеральной службы государственной статистики // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования, 26–28 апреля 2016 г.: материалы конф. – Рязань: Изд-во РГУ имени С.А. Есенина, 2016. – С. 100–104.
2. Елисеева, И.И. Эконометрика. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 576 с.
3. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник / Федеральная служба государственной статистики. – Режим доступа: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc\\_1138623506156](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156) (дата обращения: 15.02.2016 г.).
4. Коэффициенты обновления и выбытия основных фондов в Российской Федерации / Федеральная служба государственной статистики. – Режим доступа: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/enterprise/fund/#](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/enterprise/fund/#) (дата обращения: 25.10.2015 г.).
5. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.
6. Лискина Е.Ю. Некоторые математические модели налогов и сборов в России // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – 2014. – № 2/43. – С. 168–182.
7. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое и компьютерное моделирование экономики. – М.: НВТ-Дизайн, 2002. – 256 с.

Лискина Екатерина Юрьевна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46  
тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail: e.liskina@rsu.edu.ru