УДК 517.9:330.4

ПОСТРОЕНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОДНОСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ РЕГИОНА, УЧИТЫВАЮЩЕЙ КОНЕЧНОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ И КОНКУРЕНЦИЮ ЗА ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕСУРСЫ

И.А. Лазарева, Е.Ю. Лискина
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

CONSTRUCTION AND IDENTIFICATION OF THE ONE-SECTOR MODEL OF REGION ECONOMY, TAKING INTO ACCONT FINAL CONSUMPTION AND COMPETITION FOR LIMITED RESOURCES

I.A. Lazareva, E.Y. Liskina

Построена модификация модели Р. Солоу, в которой динамика численности населения определяется уравнением П. Ферхюльста, численность населения и конечное потребление зависят от среднегодовой численности занятых в экономике. Методами регрессионного анализа по данным Федеральной службы государственной статистики определены значения параметров модели для Рязанской области.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, модель Солоу, регрессионный анализ, идентификация параметров модели.

We develop a modification of the Solow model, in which population dynamics are determined by the equation P. Verhulst, population and final consumption depend on the average annual number of employees. We applied regression analysis methods to calculate the model parameters for Ryazan region, based on the data of the Federal State Statistics Service.

Keywords: system differential equations, Solow model, regression analysis, identification of model parameters.

1. Постановка задачи и построение модели. В [1] была построена модификация модели Р. Солоу, учитывающая конечное потребление и конкуренцию среди занятых в экономике за ограниченный ресурс рабочих мест. Идентификация предложенной модели была выполнена на основе данных за достаточно короткий промежуток времени (1999–2007 годы), однако интервальный прогноз значений валового регионального продукта (ВРП) на 2008–2009 годы, сделанный с ее помощью, показал адекватность построенной модели. Поэтому по прошествии времени стали актуальными следующие задачи:

1) выполнить идентификацию параметров модели за более длинный промежуток времени (1999–2013 годы – для экономических параметров; 1995–2014 годы – для численности населения);

2) дополнительно рассмотреть модификацию модели, учитывающую выбытие основных фондов;

3) учесть структурные изменения, происходившие в регионе за указанный промежуток времени.

Промежуток с 1999 по 2013 или по 2014 год для экономических параметров выбран по следующим причинам:

1) на рубеже 1998–1999 годов произошло сразу несколько структурных изменений в экономике страны: деноминация и дефолт в 1998 году и изменение налоговой системы в 1999 году (с 01.01.1999 года вступила в силу первая часть действующего Налогового кодекса Российской Федерации [2]);

2) выбор 2013 или 2014 года обусловлен наличием данных на сайте Федеральной службы государственной статистики в момент обращения.

Напомним основные положения модели. Будем предполагать следующее:

1. ВРП X распределяется между капиталовложениями I и общим потреблением S в соответствии с балансовым уравнением

$$X = I + S. \qquad (1)$$

2. Объем ВРП X определяется производственной функцией $X = F(K, L)$, где K – стоимость основных фондов экономики, L – среднегодовая численность населения, занятого в экономике.

3. Капиталовложения расходуются на увеличение основных фондов экономики K с нулевым лагом. Рассматриваются 2 случая: а) когда выбытие основных фондов отсутствует

$$\dot{K} = I, \qquad (2.1)$$

б) когда выбытие основных фондов учитывается (μ – норма амортизации)

$$\dot{K} = I - \mu K . \tag{2.2}$$

4. Аналогично [1] пусть общее потребление S делится на производственное потребление $aF(K,L)$ и конечное потребление $S_1 = S_1(N)$, где $a \in [0;1)$ – склонность к потреблению, N – численность населения, проживающего в регионе:

$$S = aF(K,L) + S_1(N). \tag{3}$$

Подставляя (1) и (3) в (2.1) или (2.2), получим возможные уравнения динамики основных фондов ($(1-a)$ – коэффициент накопления основного капитала):

$$\dot{K} = (1-a)F(K,L) - S_1(N); \tag{4.1}$$

$$\dot{K} = -\mu K + (1-a)F(K,L) - S_1(N). \tag{4.2}$$

5. Пусть среднегодовая численность населения, занятого в экономике L, связана с численностью населения N, проживающего на данной территории, и описывается функцией вида

$$N = N(L). \tag{5}$$

Так как $S_1 = S_1(N)$ и $N = N(L)$, то будем рассматривать зависимость конечного потребления от среднегодовой численности населения, занятого в экономике: $\overline{S} = \overline{S}(L)$.

6. Пусть динамика численности населения описывается уравнением П.Ф. Ферхюльста [3]

$$\dot{N} = rN\left(\frac{M-N}{M}\right), \tag{6}$$

где M – максимально допустимая численность населения на данной территории, r – коэффициент прироста населения. Подставим (5) в (6), получим дифференциальное уравнение

$$\dot{L} = \frac{rN(L)}{N'_L}\left(\frac{M-N(L)}{M}\right), \tag{7}$$

Объединяя уравнения (4.1) и (7), (4.2) и (7), получим два варианта динамической модели экономического развития региона (без выбытия основных средств и с выбытием основных средств):

$$\begin{cases} \dot{K} = (1-a)F(K,L) - \overline{S}(L), \\ \dot{L} = \dfrac{rN(L)}{N'_L}\left(\dfrac{M-N(L)}{M}\right); \end{cases} \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)F(K,L) - \overline{S}(L), \\ \dot{L} = \dfrac{rN(L)}{N'_L}\left(\dfrac{M-N(L)}{M}\right). \end{cases} \tag{8.2}$$

Решения $(K(t), L(t))$ любой из систем (8.1) или (8.2) позволяют строить прогноз динамики стоимости основных фондов, среднегодовой численности населения, занятого в экономике, и ВРП $X(t) = F(K(t), L(t))$. Важным условием при этом является определенность параметров $(1-a)$, M, r, μ и функций $F(K,L)$, $\overline{S}(L)$ и $N(L)$ для конкретного региона.

2. Идентификация параметров и функций. В данной работе методами регрессионного анализа [3] значения параметров $(1-a)$, r, μ и вид функций $F(K,L)$, $\overline{S}(L)$ и $N(L)$ были определены на основе опубликованных статистических данных [4, 5, 6] для Рязанской области. В расчетах использовался уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ и обозначения: n – объем выборки, $t_н$ и $t_{кр}$ – наблюдаемое и критическое значения t-критерия Стьюдента, $F_н$ и $F_{кр}$ – наблюдаемое и критическое значения F-критерия Фишера, A – средняя ошибка аппроксимации, s_y – стандартная ошибка, R^2 – коэффициент корреляции линейного уравнения, $\overline{R}^2$ – коэффициент детерминации для регрессий, нелинейных по зависимой переменной.

Темп роста населения r был определен из решения уравнения Ферхюльста (6) $N = \dfrac{M}{1+e^{-(c+rt)}}$. Значение $M = 641718$ тыс. человек было вычислено как произведение самой высокой плотности населения на Земле (Монако, 16 205 чел. на кв. км [7]) и площади Рязанской области (39,6 тыс. кв. км [8]). Затем была выполнена замена переменной $y = -\ln\left(\frac{M}{N} - 1\right)$, линеаризация данных и определение значений коэффициентов c и r с помощью модели линейной регрессии $y = c + rt$. В результате решение уравнения Ферхюльста приняло вид $N = \dfrac{641718}{1+e^{-(11{,}0094-0{,}0086t)}}$, $r = -0{,}0086$. Статистические характеристики модели: $n = 20$, $R^2 = 0{,}9518$, $\overline{R}^2 = 0{,}9304$, $A = 0{,}0101$, $s_y = 0{,}0118$, $t_{кр} = 2{,}1009$, $t_{нг} = 18{,}8476$, $t_{нс} = -12{,}0058$, $F_н = 355{,}2303$, $F_{кр} = 4{,}4139$. Уравнение и его коэффициенты значимы на уровне $\alpha = 0{,}05$. Наблюдаемые значения численности населения и значения, вычисленные с помощью решения уравнения Ферхюльста представлены на рисунке 1.

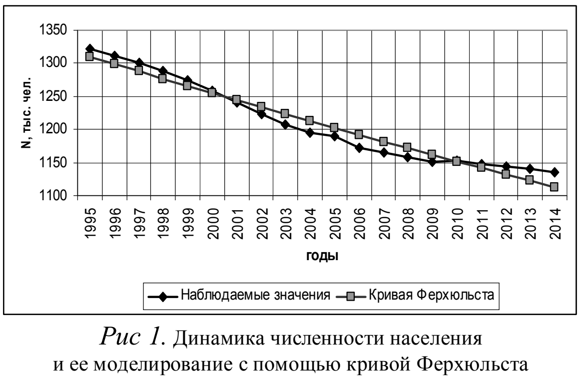

Рис 1. Динамика численности населения
и ее моделирование с помощью кривой Ферхюльста

Так как функции $F(K,L)$, $\overline{S}(L)$ и $N(L)$

содержат объясняющую переменную L, динамика наблюдаемых значений которой представлена на рисунке 2, то анализ значений L на наличие аномалий был выполнен по методу Ирвина [9, с. 405]. Последний показал, что аномальным является значение $L =$ 528,2 тыс. человек при t =1997 г., что обусловлено объективным сокращением зарегистрированного числа занятых в экономике в связи с экономическими реформами 1990-х годов. Визуально наблюдаемые «выбросы» значений L при t = 2002 г. и t = 2009 г. аномальными по критерию Ирвина не являются. Также в работе [10] авторами было обнаружено структурное изменение динамики L при t =1999 г.

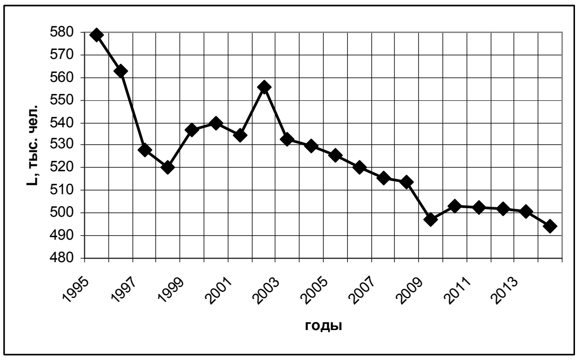

Рис. 2. Динамика наблюдаемых значений среднегодовой численности занятых в экономике в 1995–2014 годах

Наилучшая по статистическим характеристикам зависимость объёма конечного потребления домохозяйств на душу населения $\overline{S}$ (руб.) от среднегодовой численности занятых в экономике приняла вид $\overline{S} = e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}}$ или $\overline{S} = e^{-13,5741 + \frac{12767,1341}{L}}$ (рис. 3). Статистические характеристики: $n = 15$, $R^2 = 0,8173$, $\overline{R}^2 = 0,8854$, $A = 0,3058$, $s_y = 25725,9628$, $t_{кр} = 2,1604$, $t_{нL} = 7,6258$, $t_{н0} = -4,2143$, $F_н = 58,1522$, $F_{кр} = 4,6672$.

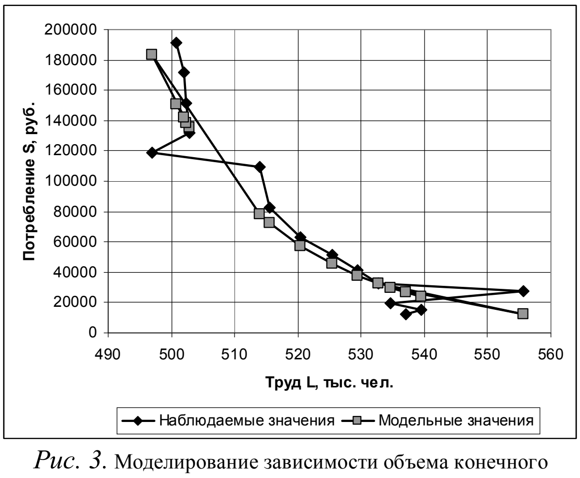

Рис. 3. Моделирование зависимости объема конечного потребления на душу населения от среднегодовой численности занятых в экономике

Моделирование производственной функции показало следующие результаты:

1) оценки коэффициентов a_0 и a_2 мультипликативной производственной функции $X = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ статистически незначимы на уровне $\alpha = 0,05$;

2) линейная однородная производственная функция $X = a_1 K + a_2 L$ имеет вид $X = 0,3886K - 48,9198L$ и статистические характеристики: $n = 15$, $R^2 = 0,9812$, $A = 0,1304$, $s_y = 21177,4126$, $t_{кр} = 2,1604$, $t_{нK} = 14,7272$, $t_{нL} = -2,2846$, $F_н = 340,0699$, $F_{кр} = 3,8056$; уравнение и его коэффициенты значимы на уровне значимости $\alpha = 0,05$;

3) корреляционный анализ факторов X, K, L показал, что факторы K и L зависимы между собой (коэффициент корреляции $r_{KL} = -0,9689$ и статистически значим на принятом уровне значимости); при этом $r_{XK} = 0,9689$, $r_{XL} = -0,8795$; так как $|r_{XK}| > |r_{XL}|$, то дополнительно для исследования необходимо выбрать однофакторную производственную функцию $X = f(K)$;

4) были построены два однофакторных уравнения регрессии $X = \varphi_1 K$ и $X = a_0 K^{a_1}$, вид и статистические характеристики которых представлены в таблице 1.

Таблица 1

Однофакторные производственные функции

Вид функции	$X = \varphi_1 K$	$X = a_0 K^{a_1}$
	$X = 0,3360K$	$X = 0,0131K^{1,2451}$
n	15	15
R^2	0,9737	0,9862
$\overline{R}^2$	0,9737	0,8669
A	0,2208	0,0230
s_y	24158,7764	20231,9740
$t_{кр}$	2,1148	2,1604
$t_{нK}$	22,7732	30,4372
$t_{н0}$	–	–8,3600
$F_н$	518,6192	926,4214
$F_{кр}$	4,6001	4,6672

Оба уравнения оказались значимы на принятом уровне значимости, но статистические характеристики уравнения $X = a_0 K^{a_1}$ лучше.

Таким образом, для дальнейшего исследования систем (8.1) и (8.2) можно использовать производственные функции вида $X = a_1 K + a_2 L$, $X = \varphi_1 K$ и $X = a_0 K^{a_1}$.

Коэффициент валового накопления основного капитала $(1-a)$ был определен из уравнения парной линейной регрессии между объемом валового накопления основного капитала Y (млн руб.) и ВРП X (млн руб.). Анализ диаграммы рассеяния (рис. 4) и проверка теста Гуйарати показали, что регрессия имеет структурный сдвиг на постоянную величину при переходе от $t = 2008$ г. к $t = 2009$ г. при неизменном значении коэффициента $(1-a)$. Структурное изменение статистически значимо на уровне $\alpha = 0{,}05$ ($F_н$ = 12,9732; $F_{кр}$ = = 4,7472). Поэтому в качестве коэффициента валового накопления основного капитала будет принято его значение из уравнения с переменной структурой $(1-a) = 0{,}3356$. Статистические характеристики коэффициента: $n = 15$, $R^2 = 0{,}9889$, A = = 0,1315, s_y =2627,7459, $t_н$ = 20,9338, $t_{кр}$ = 2,1788.

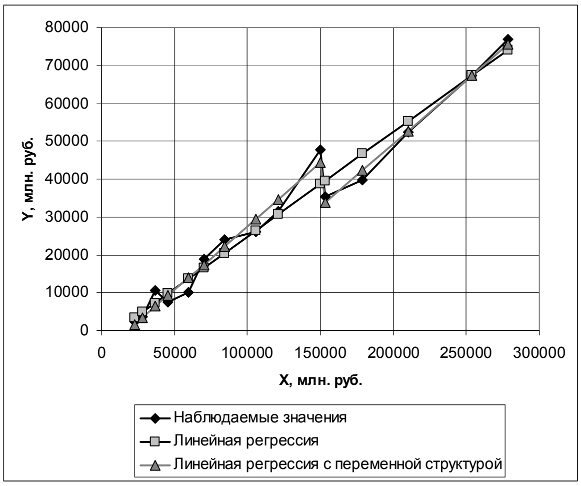

Рис. 4. Моделирование зависимости объема валового накопления основного капитала от объема ВРП

Норма выбытия основных фондов μ была определена из уравнения парной линейной регрессии $Z = \mu K$, где Z – объем выбытия основных фондов (млн руб.), K – объем основных фондов (млн руб.). Анализ диаграммы рассеяния (рис. 5) и тест Гуйарати показали, что имеется статистически значимое на уровне $\alpha = 0{,}05$ структурное изменение зависимости, обусловленное экономическим кризисом 2008 года ($F_н$ = 84,4123; $F_{кр}$ = 3,9823). Тест Гуйарати показал, что лучшим является уравнение линейной регрессии с переменной структурой, различие между уравнениями статистически значимо на уровне значимости 5 % ($F_н$ = 85,8759; $F_{кр}$ = 3,6337). Поэтому в дальнейшем для использования будет принято значение μ из уравнения линейной регрессии с переменной структурой:

$$\mu = \begin{cases} 0{,}0089 & \text{при} \quad K \le 525645 \quad (t \le 2009 \text{ г.}), \\ 0{,}0075 & \text{при} \quad K > 525645 \quad (t > 2009 \text{ г.}). \end{cases}$$

Статистические характеристики коэффициента μ : $n = 15$, $R^2 = 0{,}9971$, $A = 0{,}0536$, s_y =223,5688, $t_н$ = 42,5007, $t_{кр}$ = 2,1788.

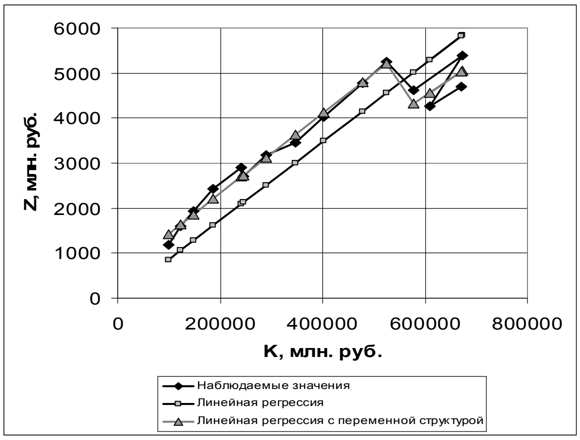

Рис. 5. Моделирование зависимости объема выбытия основного капитала от стоимости основных фондов

При моделировании регрессии численности населения от среднегодовой численности занятых в экономике (рис. 6.) так же, как и в [1], получилась линейная зависимость вида $N = \gamma L$, в которой $\gamma = 2{,}2829$; статистические характеристики уравнения: $n = 16$, $R^2 = 0{,}9998$, $A = 0{,}0129$, s_y = 21,4213, $t_{кр}$ = 2,1604, $t_н$ = 221,3535, $F_н$ = 48997,3716, $F_{кр}$ = 4,5431; уравнение и его коэффициенты значимы на уровне $\alpha = 0{,}05$.

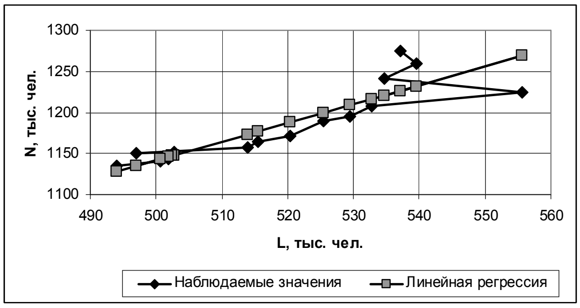

Рис. 6. Моделирование зависимости численности населения от среднегодовой численности занятых в экономике

3. Модели развития региона. Подставляя в системы (8.1) и (8.2) найденные зависимости между переменными, получим следующие односекторные модели развития региона:

$$\begin{cases} \dot{K} = (1-a)F(K,L) - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}}, \\ \dot{L} = rL\left(\dfrac{M - \gamma L}{M}\right); \end{cases} \tag{9.1}$$

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)F(K,L) - e^{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{L}}, \\ \dot{L} = rL\left(\dfrac{M - \gamma L}{M}\right); \end{cases} \tag{9.2}$$

или с числовыми значениями коэффициентов:

$$\begin{cases} \dot{K} = 0{,}3356F(K,L) - e^{-13{,}5741+\frac{12767{,}1341}{L}}, \\ \dot{L} = -0{,}0086L\left(\dfrac{641718 - 2{,}2829L}{641718}\right); \end{cases} \quad (10.1)$$

$$\begin{cases} \dot{K} = -0{,}0075K + 0{,}3356F(K,L) - \\ \qquad - e^{-13{,}5741+\frac{12767{,}1341}{L}}, \\ \dot{L} = -0{,}0086L\left(\dfrac{641718 - 2{,}2829L}{641718}\right). \end{cases} \quad (10.2)$$

Так как идентифицировано три типа производственных функций ($X = a_1K + a_2L$, $X = \varphi_1 K$ и $X = a_0 K^{a_1}$), то каждая из систем (9.1) и (9.2) дает по три варианта модели исследования экономики региона.

Сравнение с моделью работы [1] показало следующее:

1) темп роста населения по-прежнему отрицательный, хотя и стал меньше по абсолютному значению ($r = -0{,}0086$ в настоящей работе и $r = -0{,}014$ в работе [1]);

2) производственная функция работы [1] имеет вид $X = 0{,}02 \cdot K^{1{,}34} \cdot L^{-0{,}25}$ (все коэффициенты значимы на уровне $\alpha = 0{,}05$), значение $a_2 = -0{,}025$ нарушает одно из ограничений, накладываемых на мультипликативную производственную функцию, хотя может говорить и о наличии скрытой занятости; в настоящей работе коэффициент a_2 мультипликативной производственной функции оказался статистически незначим, что подтверждает факт скрытой занятости в регионе;

3) увеличение длины выборки, использованной в данной работе, показало более сложную структуру зависимости конечного потребления на душу населения от среднегодовой численности занятых в экономике, чем в работе [1], в которой упомянутая зависимость линейна.

Следующий этап данного исследования – проверка адекватности полученных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов М.С.** Построение прогноза доходной части бюджета Рязанской области на основе анализа односекторной макроэкономической модели региона // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2009. – № 14. – С. 132–141.
2. **Назаров В.С.** Налоговая система России в 1991–2008 годах // История новой России. – Режим доступа: http://www.ru-90.ru/node/1170 (дата обращения: 25.10.2015 г.)
3. **Базыкин А.Д.** Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – М.;Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. – 2003. – 368 с.
4. **Елисеева, И.И.** Эконометрика. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 576 с.
5. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник / Федеральная служба государственной статистики. Режим доступа: http://www.gks.ru/wps/wcm/conect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156 (дата обращения: 15.02.2016 г.).
6. Коэффициенты обновления и выбытия основных фондов в Российской Федерации / Федеральная служба государственной статистики. Режим доступа: http://www.gks.ru/wps/wcm/conect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/enterprise/fund/# (дата обращения: 25.10.2015 г.).
7. Countries of the World / Population of All Countries of the World. All National Population Largest to Smallest – Mode of access: http://www.worldatlas.com/aatlas/populations/ctypopls.htm (date of access: 10.01.2016 г.).
8. Рязанская область / Федеральная служба государственной статистики. Регионы России. Основные характеристики субъектов Российской Федерации. – 2013 г. – Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/B13_14s/IssWWW.exe/Stg/centr/ryazan.htm (дата обращения: 10.01.2016 г.).
9. **Красс М.С., Чупрынов Б.П.** Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2005. – 454 с.
10. **Лискина Е.Ю., Лазарева И.А.** Идентификация односекторной динамической модели экономики региона по данным Федеральной службы государственной статистики // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования, 26–28 апреля 2016 г.: материалы конф. – Рязань: Изд-во РГУ имени С.А. Есенина, 2016. – С. 100–104.

Лазарева Ирина Андреевна, магистрант кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46
тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail: ira-laz@bk.ru