**УДК 517.95**

# ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ТИХОНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**А.Н. Конёнков**
*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

# GREEN'S FUNCTION OF THE TIKHONOV PROBLEM ESTIMATES FOR THE HEAT EQUATION

**A.N. Konenkov**

Для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной рассматривается задача Тихонова. Дифференциальный оператор в граничном условии имеет порядок не ниже второго. Построена функция Грина этой задачи и получены оценки ее производных произвольного порядка.

*Ключевые слова*: уравнение теплопроводности, задача Тихонова, функция Грина.

The Tikhonov problem for the heat equation with one space variable is considered. The differential operator in the boundary condition has order no less than two. Green's function of this problem is constructed and estimates for its derivatives are established.

*Keywords*: heat equation, Tikhonov problem, Green's function.

А.Н. Тихонов [1] для уравнения теплопроводности рассмотрел краевые задачи, в которых максимальный порядок производной в граничном условии не меньше двух. При правой части уравнения и начальной функции, равных нулю, им были установлены результаты о разрешимости и единственности, а также получены условия на граничный оператор, при которых решение стабилизируется при $t \to +\infty$. В монографии [2] рассматривается задача Тихонова для параболических уравнений высокого порядка и систем. В работе [3] для уравнения теплопроводности была построена функция Грина задачи Тихонова с граничным условием второго порядка и для нее установлена оценка такого же вида, что и для функции Грина первой краевой задачи [4, гл. 4]. В настоящей работе рассматривается задача Тихонова с краевым условием произвольного порядка для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной. Устанавливаются оценки как для самой функции Грина указанной задачи, так и для ее производных.

Обозначим $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $L = \partial_t - \partial_x^2$ – оператор теплопроводности, $B = \partial_x^m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k \partial_x^k$ – граничный оператор порядка $m \ge 2$ с постоянными коэффициентами.

В половине полосы $D_+ = (0,\infty)\times(0,T)$, $T > 0$, рассматриваем задачу Тихонова

$$\begin{cases} Lu &= f \text{ в } D_+, \\ Bu|_{x=0} &= 0, \\ u|_{t=0} &= \psi. \end{cases} \tag{1}$$

Под функцией Грина задачи (1) будем понимать функцию $G(x,\xi,t)$, которая для фиксированного $\xi > 0$ удовлетворяет при $x > 0$ уравнению $LG(x,\xi,t) = \delta(x-\xi,t)$, граничному условию $BG|_{x=0} = 0$ и равна нулю при $t < 0$. С помощью этой функции решение задачи (1) можно представить (при определенных предположениях относительно $u$) в виде

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^\infty G(x-y,t-\tau) f(y,\tau)\,dy\,d\tau + \\ + \int_0^\infty G(x-y,t)\psi(y)\,dy.$$

Обозначим через $Z(x,t)$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной.

**Теорема 1.** Существует функция Грина $G(x,\xi,t)$ задачи (1) и справедливо неравенство

$$(\exists\, C_{k,s}, c_{k,s} > 0\ \forall x,\xi,t > 0)$$

$$|\partial_x^k \partial_t^s G(x,\xi,t)| \le C_{k,s} t^{-(k+2s+1)/2} e^{-\frac{c_{k,s}(x-\xi)^2}{t}}. \tag{2}$$

**Доказательство**. Для фундаментального решения [4, гл. 4] нам понадобятся оценки

$$|\partial_x^k \partial_t^s Z(x,t)| \lesssim_{k,s} t^{-(k+2s+1)/2} e^{-\frac{c_{k,s}x^2}{t}}, \tag{3}$$

а также следующие неравенства:

$$\int_0^t Z(x,\tau),\partial\tau = \int_0^t (4\pi\tau)^{-1/2} e^{-x^2/(4\tau)}\,d\tau \le$$

$$\le e^{-x^2/(4t)} \int_0^t (4\pi\tau)^{-1/2}\,d\tau = Ce^{-x^2/(4t)}, \qquad (4)$$

$$\int_0^t |\partial_x Z(x,\tau)|\,d\tau =$$

$$= (16\pi)^{-1/2} \int_0^t x\tau^{-3/2} e^{-x^2/(4\tau)}\,d\tau \le$$

$$\le (16\pi)^{-1/2} \int_0^\infty x\tau^{-3/2} e^{-x^2/(4\tau)}\,d\tau = C. \qquad (5)$$

**Лемма.** Для $\mu > 0$, $c > 0$, $m > 0$ существует константа $C > 0$ такая, что при $x \ge 0,\ 0 < t \le T$

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{c(x-y)^2}{t} - \mu y} |y|^{m-1} dy \le Ct^{m/2} e^{-\frac{cx^2}{t}}. \quad (6)$$

**Доказательство**. С учетом того, что $x \ge 0$ и $y \le 0$, имеем $(x-y)^2 \ge x^2 + y^2$ и

$$J = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{c(x-y)^2}{t} - \mu y} |y|^{m-1} dy \le$$

$$\le e^{-\frac{cx^2}{t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{cy^2}{t} - \mu y} |y|^{m-1} dy.$$

Для $M = \mu^2 T/c$ многочлен $-\dfrac{cy^2}{T} - \mu y - M$ принимает только отрицательные значения, откуда

$$J \le e^M e^{-\frac{cx^2}{t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{cy^2}{2t}} e^{-\frac{cy^2}{2t} - \mu y - M} |y|^{m-1} dy \le$$

$$\le e^M e^{-\frac{cx^2}{t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{cy^2}{2t}} e^{-\frac{cy^2}{2t} - \mu y - M} |y|^{m-1} dy \le$$

$$\le e^M e^{-\frac{cx^2}{t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{cy^2}{2T}} |y|^{m-1} dy = Ce^{-\frac{cx^2}{t}}.$$

Лемма доказана.

Функцию Грина будем искать в виде $G(x,\xi,t) = Z(x-\xi,t) - g(x,\xi,t)$, где для фиксированного $\xi > 0$ функция $g$ является решением задачи Тихонова

$$\begin{cases} Lg &= 0 \text{ в } D_+, \\ Bg|_{x=0} &= BZ(x-\xi,t)|_{x=0}, \\ g|_{t=0} &= 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Покажем, что

$$(\exists\, C_{k,s}, c_{k,s} > 0)$$

$$|g(x,\xi,t)| \le C_{k,s} t^{-(k+2s+1)/2} e^{-\frac{c_{k,s}(x^2+\xi^2)}{t}}. \quad (8)$$

Утверждение теоремы вытекает из неравенства (4) и этой оценки. Поскольку производные по $t$ выражаются (из уравнения теплопроводности) через производ-ные по $x$, достаточно доказать (8) для $s = 0$.

В работе [5] получено представление решения задачи Тихонова с неоднородным граничным условием, которое для производных (7) принимает вид

$$\partial_x^k g(x,\xi,t) =$$

$$= -2\int_0^t \int_{-\infty}^0 \partial_x^{k+1} Z(x-y,t-\tau) w(y) BZ(-\xi,\tau)\,dy\,d\tau,$$

где $w$ – решение задачи Коши $Bw = 0$, $w(0) = w'(0) = \ldots = w^{m-2}(0) = 0$, $w^{(m-1)}(0) = 1$.

Рассмотрим интегралы

$$\left(\int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t\right) \int_{-\infty}^0 \partial_x^i Z(x-y,t-\tau) \times$$

$$\times w(y) \partial_x^j Z(-\xi,\tau)\,dy\,d\tau = I_{ij}^1 + I_{ij}^2.$$

Производные $\partial_x^k g$ являются линейными комбинациями слагаемых вида $I_{k+1\,j}^l$, $l = 1,2$, $j = 0,\ldots,m$. Оценка (8) следует из неравенства

$$|I_{ij}^l| \le C_{ij} t^{-(i+j-m)/2} e^{-c_{ij}(x^2+\xi^2)/t}. \qquad (9)$$

Докажем неравенство (9) для $l = 1$. Доказательство для $l = 2$ аналогично. Рассмотрим предварительно интегралы

$$J_{ij} = \int_{-\infty}^0 \partial_x^i Z(x-y,t/2) w(y) \partial_x^j Z(-\xi,t/2)\,dy.$$

Так как функция $w$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то с учетом начальных условий существует $\mu > 0$ такое, что $|w(y)| \le C|y|^{m-1} e^{\mu|y|}$. Будем опускать индексы у констант. В силу (6)

$$|J_{ij}| \le C\int_{-\infty}^0 t^{-(i+j+2)/2} |y|^{m-1} e^{-\frac{c((x-y)^2+\xi^2)}{t}} dy \le$$

$$\le Ct^{-(i+j+2-m)/2} e^{-\frac{c(x^2+\xi^2)}{t}}.$$

Используя (3)–(5), имеем

$$|I_{i0}^1| \le C\int_0^{t/2} \int_{-\infty}^0 (t-\tau)^{-i+1/2} e^{-\frac{c(x-y)^2}{t-\tau}} \times$$

$$\times |y|^{m-1} Z(\xi,\tau)\,dy\,d\tau \le$$

$$\le Ct^{-(i+1-m)/2} e^{-cx^2/t} \int_0^{t/2} Z(-\xi,\tau)\,d\tau \le$$

$$\le Ct^{-(i-m)/2} e^{-c(x^2+\xi^2)/t},$$

$$|I_{i1}^1| \le C\int_0^{t/2} \int_{-\infty}^0 (t-\tau)^{i+2} e^{-\frac{c(x-y)^2}{t-\tau}} \times$$

$$\times |y|^{m-1} |\partial_x Z(\xi,\tau)|\,dy\,d\tau \le$$

$$\le Ct^{-(i+j+1-m)/2} e^{-cx^2/t} \times$$

$$\times \int_0^{t/2} |\partial_x Z(\xi,\tau)|\,d\tau \le Ct^{-(i+1-m)/2} e^{-c(x^2+\xi^2)/t}.$$

Для четного $j = 2a > 0$ интегрирование по частям по $\tau$ приводит к

$$I_{ij}^1 = \int_0^{t/2}\int_{-\infty}^0 \partial_x^i Z(x-y,t-\tau)w(y)\partial_x^{2a} Z(-\xi,\tau)dyd\tau =$$

$$= \int_0^{t/2}\int_{-\infty}^0 \partial_x^i Z(x-y,t-\tau)w(y)\partial_\tau^a Z(-\xi,\tau)dyd\tau =$$

$$= \sum_{q=0}^{a-1} J_{1+2q,\, j-2(q+1)} + I_{i+j,0},$$

а для нечетных значений $a = 2j+1 \ge 3$ к

$$I_{ij}^1 = \sum_{q=0}^{a-1} J_{1+2q,\, j-2(q+1)} + I_{i+j,1}.$$

Из доказанных выше оценок для $J_{ij}$, $I_{i0}^1$ и $I_{i1}^1$ следует (9).

Теорема доказана.

Используя единственность классического решения задачи Тихонова в классе ограниченных функций и формулу для решения с неоднородным граничным условием [5], получаем представление решения в виде суммы трех потенциалов.

**Теорема 2.** Пусть $C_{x,t}^{m,1}(\overline{D}_+)$ является решением задачи Тихонова

$$\begin{cases} Lu &= f \text{ в } D_+, \\ Bu|_{x=0} &= \varphi, \\ u|_{t=0} &= \psi, \end{cases}$$

ограниченным в $\overline{D}_+$ вместе с производными $\partial_t u$ и $\partial_x^k u$, $k \le m$. Тогда для $(x,t) \in D_+$

$$u(x,t) = -2\int_0^t\int_{-\infty}^0 \partial_x Z(x-y,t-\tau)w(y)\varphi(\tau)dyd\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^\infty G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau +$$

$$+ \int_0^\infty G(x-y,t)\psi(y)dy.$$


ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А.Н.** О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения // Матем. сб. – 1950. – Т. 26, № 1. – С. 35–56.
2. **Eidelman S.D., Zhitarashu N.V.** Parabolic boundary value problems. – Basel: Birkhäuser, 1998.
3. **Конёнков А.Н.** Функция Грина задачи Тихонова для уравнения теплопроводности // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования, 26–28 апреля 2016 г.: материалы конф. – Рязань: Изд-во РГУ имени С.А. Есенина, 2016. – С. 9296.
4. **Ладыженская О.А., Солонников С.Д., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1968.
5. **Конёнков А.Н.** Задача Тихонова для одномерного уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2005. – № 9. – С. 29–35.



Конёнков Андрей Николаевич, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46

тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru