

УДК 517.95

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ

И.Ю. Клочкова

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

MATHEMATICAL MODEL OF PLANE MOVEMENT OF THE HEAVY POINT

I.U. Klochkova

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая первый этап движения парашютиста с момента отделения от самолета. На данном этапе парашютист представляет собой тяжелую точку. Система дифференциальных уравнений исследуется качественно на наличие возможных состояний равновесия. Приведен конкретный пример.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, описывающие свободное падение, состояние равновесия.

Процесс построения математической модели движений парашютиста включает решение двух задач: определение баллистико-временных характеристик движения центра масс парашютиста и описание движений во время прыжка для изменения аэродинамических характеристик с целью управления парашютной системой.

При решении первой задачи приходится выбирать упрощенную математическую модель, вполне доступную для аналитического исследования и в то же время сохраняющую наиболее характерные черты исходного объекта. Для этого проводится анализ, определение, систематизация постоянных и временных параметров. Регулярных и достаточно обоснованных методов построения нелинейных математических моделей в настоящее время не существует. В большинстве случаев для этой цели применяют какие-либо эвристические процессы или используют метод проб и ошибок.

Процесс прыжка можно разбить на следующие основные этапы: первый этап – падение после отделения от самолета; второй этап – снижение на стабилизирующем парашюте; третий этап – наполнение купола основного парашюта; четвертый этап – снижение на раскрытом парашюте. Для каждого этапа составляются системы дифференциальных уравнений, описывающие движение парашютиста при соответствующих допущениях.

Рассмотрим математическую модель, в которой парашютист представляет собой тяжелую точку [1]. Отнесём движение тяжелой точки к прямоугольной системе Ox осей координат, причём ось

We consider a system of differential equations describing the motion of the first stage of the parachutist after separation from the aircraft. At this stage, the parachutist is heavy point. The system of differential equations is investigated qualitatively for possible states of equilibrium. The concrete example is given.

Keywords: differential equations that describe the free fall, the state of equilibrium.

Ox направим горизонтально в сторону движения точки, ось Oy направим вертикально вниз, а начало O координат поместим в начальное положение движущейся тяжелой точки (рис. 1).

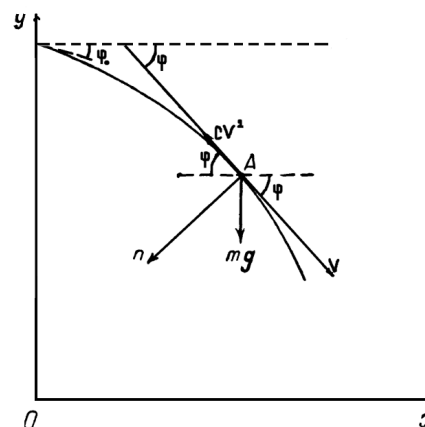


Рис. 1. Схема сил, действующих на падающее тело

Пусть $x(t)$, $y(t)$ – координаты движения точки в момент времени t , тогда производные функций $x(t)$, $y(t)$ определяют скорости $V_x = \dot{x}(t)$, $V_y = \dot{y}(t)$, отсюда получим $V^2 = V_x^2 + V_y^2 \Rightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

Сила сопротивления имеет выражение cV^2 . Обозначим через φ угол, образованный касательной к траектории тяжелой точки с осью Ox , построенной для какого-нибудь положения A этой точки,

и получим, что $\dot{x}(t) = V \cos \varphi$, $\dot{y}(t) = -V \sin \varphi$. Учтывая, что радиус кривизны ρ определяется соотношением $\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\varphi}{dS} \right|$, воспользуемся дифференциальными уравнениями движения

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{mV^2}{2} \right) = F_T, \quad mV^2 \left| \frac{d\varphi}{dS} \right| = F_N, \quad (1)$$

где F_T – проекция силы F , действующей на движущуюся тяжелую точку, на ось Ox , F_N – проекция силы F , действующей на движущуюся тяжелую точку, на ось Oy , S – пройденный путь, $\dot{S} = V$, m – масса точки. Так как проекции F_T и F_N имеют выражения

$$F_T = mg \sin \varphi - cV^2, \quad F_N = mg \cdot \cos \varphi, \quad (2)$$

и угол $d\varphi$, как это следует из рисунка 1, есть угол смежности, то система дифференциальных уравнений, описывающих движение тяжелой точки, будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{dV^2}{dS} = 2g \cdot \sin \varphi - 2aV^2, \\ V^2 \frac{d(\sin \varphi)}{dS} = g \cdot (1 - \sin^2 \varphi), \end{cases} \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения, a – коэффициент сопротивления, деленный на массу тяжелой точки [2].

Предположим, что в первом уравнении существует линейное добавление скорости, умноженной на некоторый коэффициент сопротивления b , деленный на массу тяжелой точки, тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dV^2}{dS} = 2g \cdot \sin \varphi - 2bV - 2aV^2, \\ V^2 \frac{d(\sin \varphi)}{dS} = g \cdot (1 - \sin^2 \varphi). \end{cases} \quad (4)$$

Для системы дифференциальных уравнений (4) ставится задача определения координат плоского движения груза $x(t)$, $y(t)$ в заданный момент времени t , нахождения зависимостей $S(t)$, $V(t)$, $\varphi(t)$.

Так как $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, то очевидно, что $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Отсюда

$$\dot{V} = \frac{1}{V} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \Rightarrow \dot{V}V = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}. \quad (5)$$

Из условий следует, что

$$\sin \varphi = -\frac{\dot{y}}{V}. \quad (6)$$

Подставим в систему (4) выражение (6) и воспользуемся условием задачи $ds = Vdt$. Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dV^2}{dt} = -2g \cdot \dot{y} - 2bV^2 - 2aV^3, \\ \frac{d(\sin \varphi)}{dt} = \frac{g}{V} - \frac{g \cdot \dot{y}^2}{V^3}. \end{cases} \quad (7)$$

Так как $\frac{d \sin \varphi}{dt} = \left(-\frac{\dot{y}}{V} \right)' = -\frac{\ddot{y}V - \dot{y}\dot{V}}{V^2}$, то получим

$$\begin{cases} \dot{V}V = -g \cdot \dot{y} - bV^2 - aV^3, \\ -\ddot{y}V^2 + \dot{y}\dot{V} = gV^2 - g \cdot \dot{y}^2. \end{cases} \quad (8)$$

Применяя формулу (5), получим, что первое уравнение системы (8) примет вид

$$\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -g\dot{y} - bV^2 - aV^3. \quad (9)$$

При условии, что $|\dot{y}| \neq 0$, выразим \ddot{y}

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{1}{\dot{y}} (-\ddot{x} - g \cdot \dot{y} - bV^2 - aV^3) = \\ &= \frac{1}{\dot{y}} (-\ddot{x} - g \cdot \dot{y} - b(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично, применяя формулу (5) во втором уравнении системы (8), выразим \ddot{x}

$$\begin{aligned} -\ddot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{y}(\ddot{x} + \ddot{y}) &= g(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - g\dot{y}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{x}\dot{y} &= g\dot{x}^2 + \ddot{y}\dot{y}^2 \quad |\dot{x} \neq 0| \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{x} &= \frac{1}{\dot{y}} (g\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}). \end{aligned} \quad (11)$$

Получили систему вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{\dot{y}} (g\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}), \\ \ddot{y} = \frac{1}{\dot{y}} (-\ddot{x} - g \cdot \dot{y} - b(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}). \end{cases} \quad (12)$$

Упростим систему (12), оставив производные второго порядка только в левых частях уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = -b\dot{x} - a\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}, \\ \ddot{y} = -\dot{y}(b + a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}) - g. \end{cases} \quad (13)$$

Заменой переменных $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$ приведем систему (13) к виду

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -bV_x - aV_x(V_x^2 + V_y^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = -V_y(b + a(V_x^2 + V_y^2)^{1/2}) - g. \end{cases} \quad (14)$$

Качественно исследуем систему (8). Для этого найдем ее состояние равновесия. Рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{V}_x = P(V_x, V_y), \\ \dot{V}_y = Q(V_x, V_y). \end{cases} \quad (15)$$

Приравняем левые части уравнений к нулю, получим

$$\begin{cases} -V_x(b + a(V_x^2 + V_y^2)^{1/2}) = 0, \\ -bV_y - aV_y(V_x^2 + V_y^2)^{1/2} - g = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Рассмотрим два возможных случая решения системы (16)

$$\begin{cases} V_x = 0, \\ bV_y + aV_y|V_y| + g = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из рисунка 1 следует, что скорость по оси Oy может принимать только отрицательные значения, поэтому система (17) примет вид

$$\begin{cases} V_x = 0, \\ -aV_y^2 + bV_y + g = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_x = 0, \\ aV_y^2 - bV_y - g = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Решим второе уравнение системы (18), получим два корня $V_{y1} = \frac{1}{2a}(b - \sqrt{D})$, $V_{y2} = \frac{1}{2a}(b + \sqrt{D})$, $D = b^2 + 4ag$. Предполагаем, что исходя из условий задачи, мы коэффициенты a и b не могут принимать отрицательные значения, поэтому только корень V_{y1} может быть меньше нуля. Основываясь на этом предположении, мы получим состояние равновесия $A_1(0, V_{y1})$ для системы (14).

Теперь определим вид состояния равновесия. Найдем частные производные функций $P(V_x, V_y)$ и $Q(V_x, V_y)$:

$$\begin{aligned} P'_{V_x} &= -b - a \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2} + \frac{V_x^2}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \right), \\ P'_{V_y} &= -\frac{aV_xV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}, \\ Q'_{V_x} &= -\frac{aV_xV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}, \\ Q'_{V_y} &= -b - a \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2} + \frac{V_y^2}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Используя равенства (19), определим значения производных в точке A_1 :

$$\begin{aligned} P'_{V_x}(A_1) &= -\frac{1}{2}(b + \sqrt{D}), \quad P'_{V_y}(A_1) = 0, \\ Q'_{V_x}(A_1) &= 0, \quad Q'_{V_y}(A_1) = -\sqrt{D}. \end{aligned} \quad (20)$$

Составим определитель Δ_1 , в углах которого будут находиться частные производные (20):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} P'_{V_x} & P'_{V_y} \\ Q'_{V_x} & Q'_{V_y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(b + \sqrt{D}) & 0 \\ 0 & -\sqrt{D} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В случае, когда на побочной диагонали определителя находятся нулевые элементы, характери-

стические корни состояния равновесия есть элементы, находящиеся на главной диагонали, и таким образом $\lambda_1 = -\frac{1}{2}(b + \sqrt{D})$, $\lambda_2 = -\sqrt{D}$.

Получили, что $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. В этом случае состояние равновесия является устойчивым узлом.

На основании полученного результата можем сделать вывод, что при падении тяжелой точки вниз в плоскости ее скорость по оси Ox стремится к нулю, а скорость по оси Oy стремится к константе.

Рассмотрим второй возможный случай решения системы (16):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} b + a(V_x^2 + V_y^2)^{1/2} = 0, \\ -bV_y - aV_y(V_x^2 + V_y^2)^{1/2} - g = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} = -\frac{b}{a}, \\ -bV_y - aV_y(V_x^2 + V_y^2)^{1/2} - g = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |V_x| = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - V_y^2}, \\ bV_y - aV_y \frac{b}{a} + g = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |V_x| = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - V_y^2}, \\ g = 0. \end{cases} \quad (21) \end{aligned}$$

Получили, что система (21) решений несовместна, а значит у системы (14) в этом случае нет состояния равновесия.

Теорема. Пусть для системы дифференциальных уравнений (14) выполнены следующие условия: $a > 0, b \geq 0$. Тогда система (14) имеет состояние равновесия $A_1(0, V_{y1})$, которое является устойчивым узлом.

Преобразуем систему (4) и запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dV^2}{dt} &= 2g \sin \varphi - 2bV^2 - 2aV^3, \\ V \frac{d(\sin \varphi)}{dt} &= g(1 - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

Полагая $\sin \varphi = w$, получим:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{V} = gw - bV - aV^2, \\ V\dot{w} = g(1 - w^2), \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{S} = gw - bS - aS^2, \\ \dot{S}w = g(1 - w^2), \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p} = gw - bp - ap^2, \\ \dot{S} = p(t), \\ \dot{w} = \frac{1}{p}g(1 - w^2). \end{cases} \quad (23) \end{aligned}$$

Система (23) не имеет состояния равновесия, ее возможно решить численным методом. При этом получим, что решение $S(t), p(t), w(t)$ опре-

деляет функции $S(t), V(t), \varphi(t)$ с помощью следующей системы равенств:

$$\begin{cases} S(t) = S(t), \\ p(t) = \dot{S} = V(t), \\ w(t) = \sin \varphi(t). \end{cases}$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пример. Груз весом 981 кг сброшен с горизонтально летящего самолета при скорости полета 200 м/сек на высоте 70 м. Характеристика груза $\sum c_{sp} f_{sp} = 2,8 м^2$ [3]. Требуется найти функциональные зависимости $x(t), y(t), S(t), V(t), \varphi(t)$ для заданных начальных условий. Построить траекторию падения груза в течение 2 сек в декартовых координатах, а также построить зависимости $S(t), V(t), \varphi(t)$.

За 2 сек падения груз достигнет высоты ~ 60 м, поэтому при расчете примем плотность воздуха $\rho_h = 0,12425 \text{ кг/м}^3$ [3]. Значение постоянной величины a вычислим по формуле

$$a = \frac{\rho_h g \sum c_{sp} f_{sp}}{m}. \text{ Отсюда } a = 0,00174. \text{ Коэффициент } b \text{ примем равным нулю.}$$

Подставим полученные коэффициенты в систему (14) с учетом равенств $V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}$ и получим

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -0,00174 \cdot V_x (V_x^2 + V_y^2)^{1/2}, \\ \dot{x} = V_x, \\ \dot{V}_y = -V_y \cdot 0,00174 (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} - 9,81, \\ \dot{y} = V_y. \end{cases} \quad (24)$$

Далее с помощью численных методов, реализуемых в пакетах прикладных программ системы символьной математики Maple, находим решение системы (24), удовлетворяющее начальным условиям задачи $V_x(0) = 200, x(0) = 0, V_y(0) = 0, y(0) = 70$, и строим его интегральную кривую, которая является траекторией падения груза (рисунок 2).

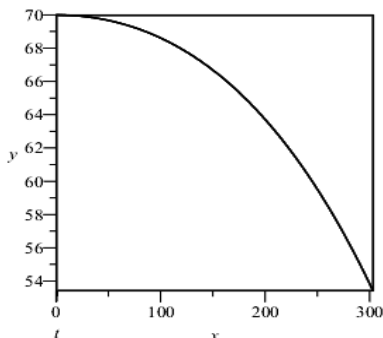


Рис. 2. Координаты $x(t), y(t)$ падения груза

Также мы можем найти решения, меняя

начальные условия высоты $y(0) = 62, y(0) = 65, y(0) = 72, y(0) = 75, y(0) = 77$ (рисунок 3).

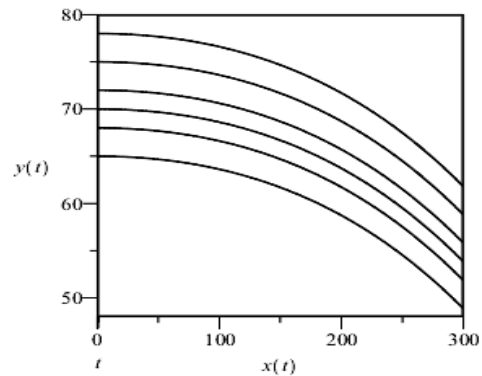


Рис. 3. Интегральные кривые системы (24)

За 2 сек падающее тело проходит одинаковый путь, достигая при этом различной высоты, в зависимости то того, на какой высоте оно было сброшено с горизонтально летящего самолета.

Исследуем качественно систему (24), так как даже с помощью программного обеспечения решения в явном виде мы получить не смогли. Для этого воспользуемся теоремой о существовании состояния равновесия системы (14).

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ -0,00174 \cdot V_y^2 + 9,81 = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Для того чтобы система (25) имела состояние равновесия, необходимо, чтобы $a > 0, b \geq 0$. Нетрудно заметить, что эти условия выполнены. Найдём корни уравнения

$$-0,00174 \cdot V_y^2 + 9,81 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_y^2 = \frac{9,81}{0,00174} \Rightarrow \begin{cases} V_{y1} = -75 \\ V_{y2} = 75. \end{cases}$$

Таким образом, система (25) имеет состояние равновесия $A_1(0, -75)$, которое является устойчивым узлом.

На рисунке 4 изображено состояние равновесия системы (24).

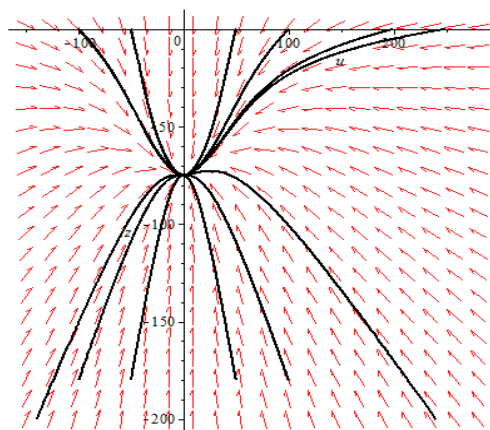


Рис. 4. Состояние равновесия A_1 системы (24)

Качественный анализ состояния равновесия позволили сделать выводы о том, что при падении тела в плоскости с начальной скоростью по оси Oy $V_0 = 0$ м/сек и по оси Ox $V_0 = 200$ м/сек скорость по оси Oy будет стремиться к -75 м/сек, а по оси Ox – к 0 м/сек.

Для нахождения зависимостей $S(t)$, $V(t)$, $\varphi(t)$ подставим ранее полученные коэффициенты $a = 0,00174$, $b = 0$ в систему (23), получим

$$\begin{cases} \dot{p} = 9,81w - 0,00174p^2, \\ \dot{S} = p(t), \\ \dot{w} = 9,81p^{-1}(1 - w^2). \end{cases} \quad (25)$$

Опять же с помощью численных методов, реализуемых в пакетах прикладных программ Maple, находим решение системы (25), удовлетворяющее начальным условиям задачи $p(0) = 200$, $w(0) = 0$, $S(0) = 0$.

В явном виде решение системы (25) найти не удается. Поэтому графически покажем кривые, заданные функциями $S(t) = S(t)$, $V(t) = p(t)$ (рисунки 5, 6).

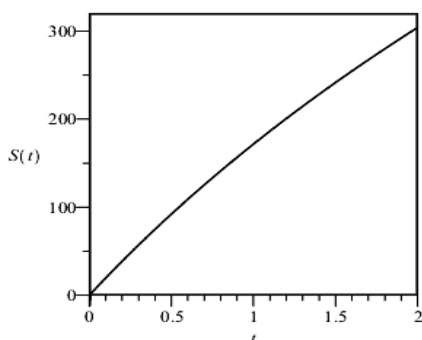


Рис. 5. Кривая, заданная функцией $S(t)$

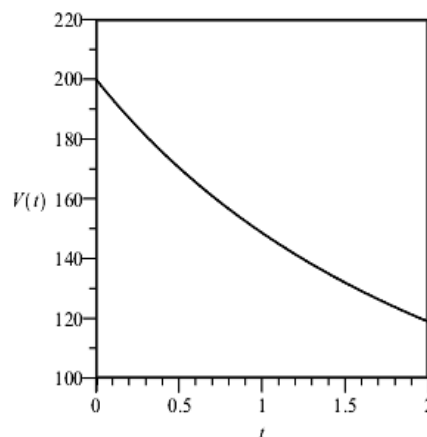


Рис. 6. Кривая, заданная функцией $V(t)$

Системы (14) и (23) в дальнейших исследованиях позволят на основании экспериментальных данных построить траекторию прыжка парашютиста в плоскости с помощью пакетов прикладных программ Maple, изучить управление, которое необходимо прикладывать для приземления в заданном участке местности, а также составить математическую модель прыжка парашютиста в трехмерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Усачев Ю.В., Курашин В.Н.** Математическая модель движения парашютиста // Вестник Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина. – 2010 – № 1 (26). – С. 108–115.
2. **Некрасов А.И.** Курс теоретической механики. – Т. II: Динамика. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1958. – 501 с.
3. **Лобанов Н.А.** Основы расчета и конструирования парашютов. – М.: Машиностроение, 1965. – 365 с.

Ключкова Ирина Юрьевна, аспирант кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46
преподаватель кафедры математических и естественнонаучных дисциплин РИВДВ
390031, Россия, г. Рязань, площадь генерала армии В.Ф. Маргелова, д.1
тел.: +79065485935; e-mail: i-usacheva@mail.ru