

БИФУРКАЦИИ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

И.В. Ионова

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина

BIFURCATIONS OF CYCLES OF THE SECOND KIND
PHASE SYSTEMS

I.V. Ionova

Рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Предложен численный подход нахождения предельных циклов второго рода и анализа их устойчивости. Показано что вращение векторного поля может быть использовано для анализа бифуркаций циклов второго рода.

Ключевые слова: предельный цикл второго рода, вращение векторного поля, бифуркация.

Введение. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений [1–13]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x, \quad (1)$$

где $x, b, c \in R^n$, $\varphi(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой и Δ -периодической функцией. Система (1) является математической моделью системы фазовой автоподстройки частоты ФАП [1–4]. Система вида (1) изучалась в работах [5–13], где качественно-численными методами получены условия устойчивости, соответствующие режимам синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и числа предельных циклов второго рода. В последнее десятилетие возрос интерес к асинхронным режимам. Это связано с использованием хаотических колебаний, генерируемых системой ФАП [5–7], с нахождением неустойчивых циклов, определяющих области притяжения состояний равновесия [12]. Трудности изучения сценариев бифуркаций циклов определяются тем, что в системе дифференциальных уравнений, наряду с устойчивыми циклами, появляются неустойчивые циклы [12, 14, 15].

Цель работы: разработать численный подход для обнаружения бифуркаций предельных циклов второго рода с использованием вращения векторного поля.

Практические исследования. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1), для которой $x \in R^2$, $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $b = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $\Gamma > 0$, $\nu > 0$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma_0$, $\alpha_1 = 1$, $\nu = 2$, $\gamma_0 = 0.5$. Исполь-

We consider the system of differential equations with a cylindrical phase space. We propose a numerical approach of finding the limit cycles of the second kind and their analysis of the us-of tasciotti. It is shown that the use of rotation of a vector field, can be used for the analysis of bifurcations of cycles of the second kind.

Keywords: limit cycles of the second kind, the rotation of vector fields.

зование результатов работы [12] позволяет численно доказать, что система (1) при $\beta_1 = 0.8854$ имеет цикл второго рода $z_{1,2\pi}^+(t)$ с начальными условиями $x_1(0) = -5.001$, $x_2(0) = 6.403$, $\sigma(0) = 0$. На рисунке 1 изображена проекция цикла второго рода $z_{1,2\pi}^+(t)$ системы (1) на плоскость (x_1, x_2) , начальные условия которого определяют точку $N(-5.100; 6.403; 0)$.

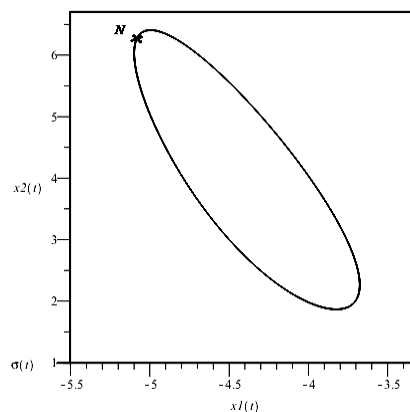


Рис. 1

Дальнейшее увеличение β_1 приводит к бифуркации цикла второго рода. При изучении бифуркаций циклов системы (1) возникают трудности, связанные с появлением неустойчивых циклов. Для определения начальных условий неустойчивых циклов используется вращение векторного поля. В плоскости $(x_1, x_2, 0)$ определяется окружность $\omega(N, r)$ с центром в точке N радиуса r , ограничивающая множество Ω . Для оператора

$U_{\Delta} = P_{\Delta} \circ U_1$, где U_1 – оператор сдвига по траекториям системы (1), P_{Δ} – отображение сдвига фазового пространства, $P_{\Delta}(z) = \text{colon}(x, \sigma - \Delta)$, $z = \text{colon}(x, \sigma)$, численными методами определяется множество $U_{\Delta}(\omega) = L_{\Delta}$. Если вращение векторного поля $Q_{\Delta}(x) = x - U_{\Delta}(x)$ на границе ω множества Ω отлично от нуля $\gamma(Q_{\Delta}, \omega) \neq 0$, то в силу теоремы 5.15 [16], оператор U_{Δ} на множестве Ω имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку $x^* \in \Omega$, $U_{\Delta}x^* = x^*$, определяющую начальные условия цикла второго рода. Нахождение неподвижной точки оператора U_{Δ} производится делением множества Ω до тех пор, пока площадь частей будет превосходить заданную точность. Выбирается часть Ω_{ε} множества Ω для которой вращение на границе $\partial\Omega_{\varepsilon}$ отлично от нуля. Полученное множество содержит начальные условия циклов второго рода. В работе будем полагать: если вращение векторного поля на границе ω множества Ω равно $\gamma(Q_{\Delta}, \omega) = 1$, то множество содержит начальные условия устойчивого цикла второго рода, если $\gamma(Q_{\Delta}, \omega) = -1$, то – неустойчивого цикла второго рода.

При $\beta_1 = 0.995$ численная реализация предложенных действий приводит к тому, что устойчивый цикл $z_{1,2\pi}^+(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл второго рода $z_{1,2\pi}^g$ с начальными условиями, определяемыми координатами точки $A_{1,2\pi}^g(-5.0792; 6.3066)$. Для точки $A_{1,2\pi}^g$ строится такая окружность $\omega_{1,2\pi}^g(A_{1,2\pi}^g, 0.04)$, что $\gamma(Q_{4\pi}, \omega_{1,2\pi}^g) = -1$.

При этом от устойчивого цикла второго рода $z_{1,2\pi}^+$ системы (1) отделяются два устойчивых цикла второго рода $z_{1,4\pi}^+, z_{2,4\pi}^+$, начальные условия которых определяются неподвижными точками оператора $U_{4\pi} = P_{4\pi} \circ U_1$.

Численными методами для окружности $\omega_{1,2\pi}^g(A_{1,2\pi}^g; r = 0.04)$ находится линия $L_{1,4\pi} = U_{4\pi}(\omega_{1,2\pi}^g)$, изображенная на рисунке 2. Множество $L_{1,4\pi}$ покрывается окружностями и определяются точки $A_{1,4\pi}^+, A_{2,4\pi}^+$, являющиеся центрами окружностей $\omega_{1,4\pi}^+(A_{1,4\pi}^+; 0.01)$, $\omega_{2,4\pi}^+(A_{2,4\pi}^+; 0.01)$, таких, что $\gamma(Q_{4\pi}, \omega_{1,4\pi}^+) = 1$, $\gamma(Q_{4\pi}, \omega_{2,4\pi}^+) = 1$.

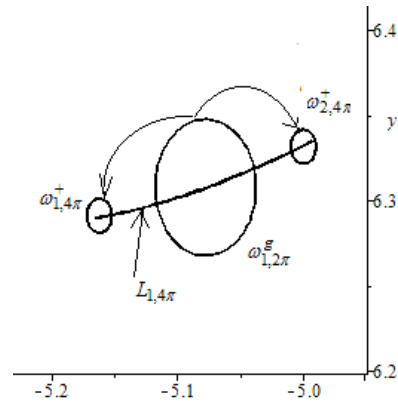


Рис. 2

На рисунке 3 представлены линии $W_{1,2\pi}, W_{1,4\pi}, W_{2,4\pi}$, описываемые векторами $Q_{4\pi}(x), Q_{2\pi}(x)$ при прохождении x соответственно окружностей $\omega_{1,2\pi}^g, \omega_{1,4\pi}^+, \omega_{2,4\pi}^+$.

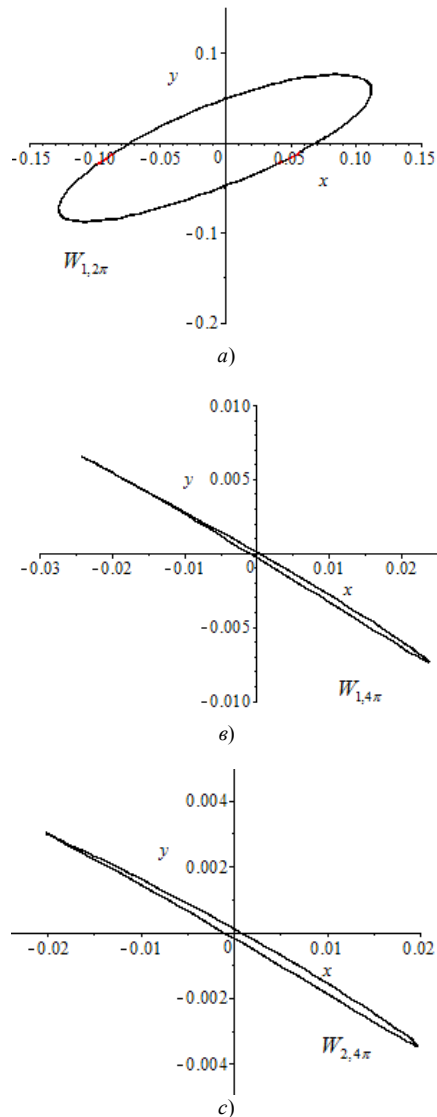


Рис. 3

Численно определяются неподвижные точки $A_{1,4\pi}^+(-5.1705, 6.2893)$, $A_{2,4\pi}^+(-4.9997, 6.3312)$ оператора $U_{4\pi}$ на множествах $\Omega_{1,4\pi}^+$, $\Omega_{2,4\pi}^+$, ограниченных окружностями $\omega_{1,4\pi}^+$, $\omega_{2,4\pi}^+$.

На рисунке 4а изображены проекции трех циклов второго рода $z_{1,2\pi}^g(t)$, $z_{1,4\pi}^+(t)$, $z_{2,4\pi}^+(t)$ системы (1) на плоскость (x_1, x_2) с начальными условиями в точках $A_{1,2\pi}^g$, $A_{1,4\pi}^+$, $A_{2,4\pi}^+$.

Проекция циклов $z_{1,4\pi}^+(t)$, $z_{2,4\pi}^+(t)$ на плоскость (x_1, x_2) совпадают. На рисунке 4в изображены траектории циклов второго рода $z_{1,4\pi}^+(t)$, $z_{2,4\pi}^+(t)$ системы (1) в пространстве (x_1, x_2, σ) .

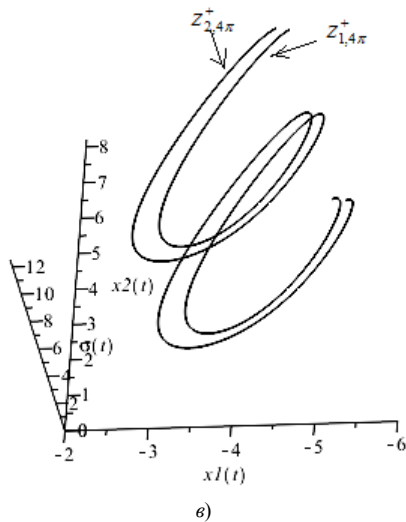
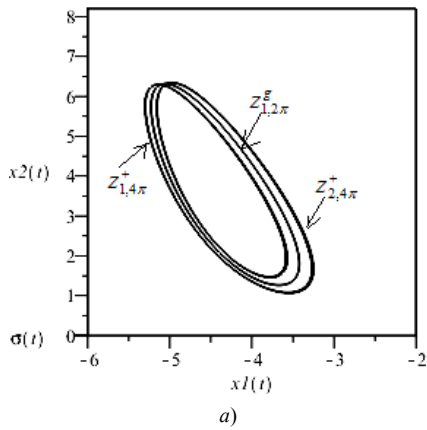


Рис. 4

Таким образом, в системе (1) при увеличении β_1 от 0.8854 до 0.995 наблюдается сценарий бифуркации устойчивого цикла на три цикла, среди которых один является неустойчивым с периодом 2π по переменной σ , а два – устойчивыми с периодом 4π по переменной σ .

Дальнейшее увеличение β_1 от 0.995 до 1.018 приводит к тому, что неустойчивый цикл $z_{1,2\pi}^g(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $\bar{z}_{1,2\pi}^g(t)$. От устойчивого цикла $z_{1,4\pi}^+(t)$ отделяются два устойчивых цикла $z_{1,8\pi}^+(t)$, $z_{2,8\pi}^+(t)$ с периодом 8π по переменной σ , при этом цикл $z_{2,4\pi}^+(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $z_{2,4\pi}^g(t)$. От устойчивого цикла $z_{2,4\pi}^+(t)$ отделяются два устойчивых цикла $z_{3,8\pi}^+(t)$, $z_{4,8\pi}^+(t)$ с периодом 8π по переменной σ . Цикл $z_{2,4\pi}^+(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $z_{3,4\pi}^g(t)$. Система (1) имеет семь циклов второго рода, из которых четыре устойчивые, а три неустойчивые. На рисунке 5 изображены окрестности $\bar{\Omega}_{1,2\pi}^g$, $\Omega_{1,4\pi}^g$, $\Omega_{2,4\pi}^g$, $\Omega_{1,8\pi}^+$, $\Omega_{2,8\pi}^+$, $\Omega_{3,8\pi}^+$, $\Omega_{4,8\pi}^+$, центры которых определяются начальными условиями циклов системы (1).

Численными методами для границы $\bar{\omega}_{1,2\pi}^g$ окрестности $\bar{\Omega}_{1,2\pi}^g$ находится линия $L_{1,8\pi} = U_{8\pi}(\bar{\omega}_{1,2\pi}^g)$, изображенная на рисунке 5. Окрестности начальных условий циклов системы (1) пересекаются с множеством $L_{1,8\pi}$.

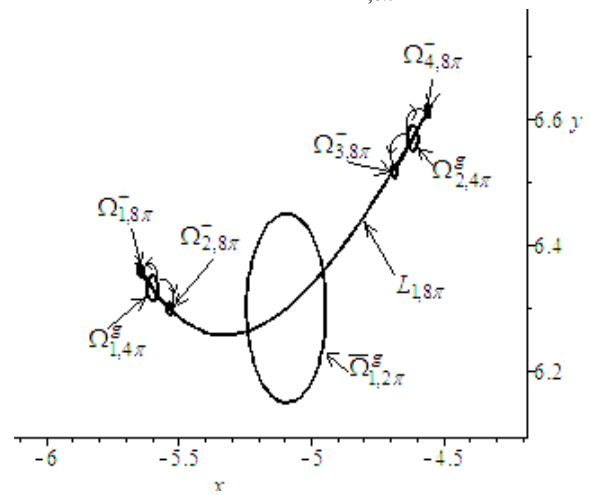


Рис. 5

На рисунке 6а изображены проекции четырех циклов второго рода $z_{1,8\pi}^+(t)$, $z_{2,8\pi}^+(t)$, $z_{3,8\pi}^+(t)$, $z_{4,8\pi}^+(t)$ системы (1) с начальными условиями в точках $A_{1,8\pi}^+(-5.6412, 6.3588)$, $A_{2,8\pi}^+(-5.5307, 6.2979)$, $A_{3,8\pi}^+(-4.6847, 6.5161)$, $A_{4,8\pi}^+(-4.5578, 6.6116)$ соответственно на плоскость (x_1, x_2) , при этом проек-

ции циклов совпадают. На рисунке 6в эти циклы изображены в пространстве (x_1, x_2, σ) .

На рисунке 6с представлена линия $W_{1,8\pi}$, описываемая вектором $Q_{8\pi}(x)$ при прохождении x окружности $\omega_{1,8\pi}^+$, т.е. $\gamma(Q_{8\pi}, \omega_{1,8\pi}^+) = 1$. Следовательно, $z_{1,8\pi}^+(t)$ является устойчивым циклом второго рода с периодом 8π по переменной σ .

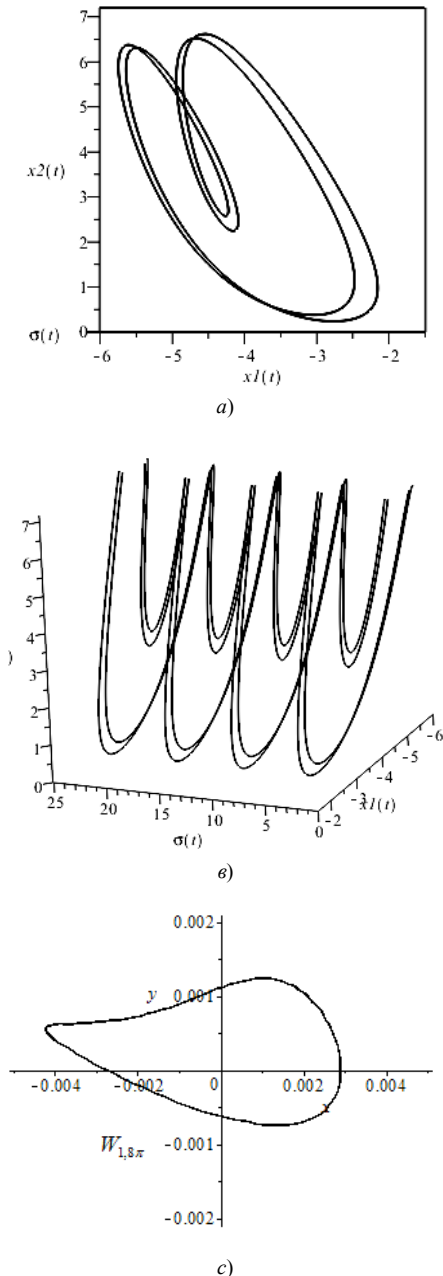


Рис. 6

Аналогично можно показать, что циклы второго рода $z_{2,8\pi}^+(t)$, $z_{3,8\pi}^+(t)$, $z_{4,8\pi}^+(t)$ являются устойчивыми.

На рисунке 7а изображены проекции трех циклов второго рода $\bar{z}_{1,2\pi}^g(t)$, $z_{1,4\pi}^g(t)$, $z_{2,4\pi}^g(t)$ сис-

темы (1) с начальными условиями в таких точках $\bar{A}_{1,2\pi}^g(-5.09108, 6.29895)$, $A_{1,4\pi}^g(-5.59687, 6.33045)$, $A_{2,4\pi}^g(-4.61381, 6.56869)$ соответственно на плоскость (x_1, x_2) , что $\gamma(Q_{8\pi}, \bar{\omega}_{1,2\pi}^g) = -1$, $\gamma(Q_{8\pi}, \omega_{1,4\pi}^g) = -1$, $\gamma(Q_{8\pi}, \omega_{2,4\pi}^g) = -1$. Проекции циклов $z_{1,4\pi}^g(t)$, $z_{2,4\pi}^g(t)$ на плоскость (x_1, x_2) совпадают. На рисунке 7в изображены проекции этих циклов на плоскость (σ, x_2) .

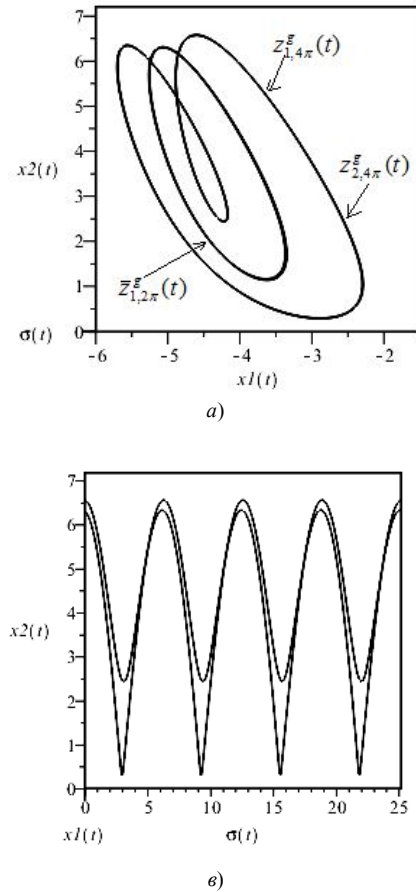


Рис. 7

На рисунке 8 изображены проекции семи циклов на плоскость (x_1, x_2) .

Таким образом, в системе (1) при увеличении β_1 от 0.995 до 1.018 наблюдается сценарий бифуркации двух циклов с периодом 4π на четыре устойчивых цикла второго рода с периодом 8π по переменной σ , трансформацией неустойчивого $z_{1,2\pi}^g(t)$ цикла с периодом 2π по переменной σ и двух устойчивых циклов $z_{1,4\pi}^+(t)$, $z_{2,4\pi}^+(t)$ в неустойчивые циклы $z_{1,4\pi}^g(t)$, $z_{2,4\pi}^g(t)$ с периодом 4π по переменной σ .

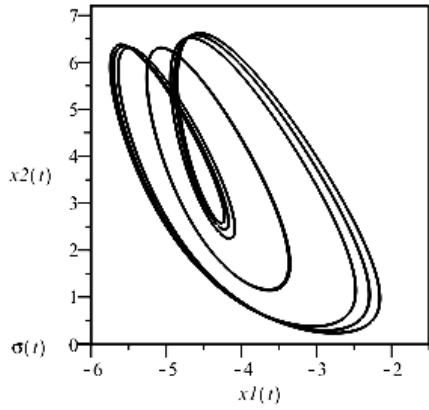


Рис. 8

Дальнейшее увеличение β_1 от 1.018 до 1.02 приводит к тому, что неустойчивые циклы $\bar{z}_{1,2\pi}^g(t)$, $z_{1,4\pi}^g(t)$, $z_{2,4\pi}^g(t)$ трансформируются соответственно в неустойчивые циклы $\tilde{z}_{1,2\pi}^g(t)$, $\bar{z}_{1,4\pi}^g(t)$, $\bar{z}_{2,4\pi}^g(t)$. От устойчивого цикла $z_{1,8\pi}^+(t)$ отделяются два устойчивых цикла $z_{1,16\pi}^+(t)$, $z_{2,16\pi}^+(t)$ с периодом 16π по переменной σ , при этом цикл $z_{1,8\pi}^+(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $z_{1,8\pi}^g(t)$. То же самое происходит и с устойчивыми циклами $z_{2,8\pi}^+(t)$, $z_{3,8\pi}^+(t)$, $z_{4,8\pi}^+(t)$: от них отделяются устойчивые циклы $z_{3,16\pi}^+(t)$, $z_{4,16\pi}^+(t)$, $z_{5,16\pi}^+(t)$, $z_{6,16\pi}^+(t)$, $z_{7,16\pi}^+(t)$, $z_{8,16\pi}^+(t)$ с периодом 16π по переменной σ , при этом циклы $z_{2,8\pi}^+(t)$, $z_{3,8\pi}^+(t)$, $z_{4,8\pi}^+(t)$ трансформируются в неустойчивые циклы $z_{2,8\pi}^g(t)$, $z_{3,8\pi}^g(t)$, $z_{4,8\pi}^g(t)$. Система (1) имеет пятнадцать циклов второго рода, восемь из которых устойчивые, а семь неустойчивые. На рисунках 9а, в, с изображены окрестности $\tilde{\Omega}_{1,2\pi}^g$, $\bar{\Omega}_{1,4\pi}^g, \bar{\Omega}_{2,4\pi}^g, \Omega_{1,8\pi}^g, \Omega_{2,8\pi}^g, \Omega_{3,8\pi}^g, \Omega_{4,8\pi}^g, \Omega_{1,16\pi}^+, \Omega_{2,16\pi}^+, \Omega_{3,16\pi}^+, \Omega_{4,16\pi}^+, \Omega_{5,16\pi}^+, \Omega_{6,16\pi}^+, \Omega_{7,16\pi}^+, \Omega_{8,16\pi}^+$, центры которых определяются начальными условиями циклов системы (1).

Численными методами для границы $\tilde{\omega}_{1,2\pi}^g$ окрестности $\tilde{\Omega}_{1,2\pi}^g$ находится линия $L_{1,16\pi} = U_{16\pi}(\tilde{\omega}_{1,2\pi}^g)$, изображенная на рисунке 9а. Окрестности начальных условий циклов системы (1) пересекаются с множеством $L_{1,16\pi}$.

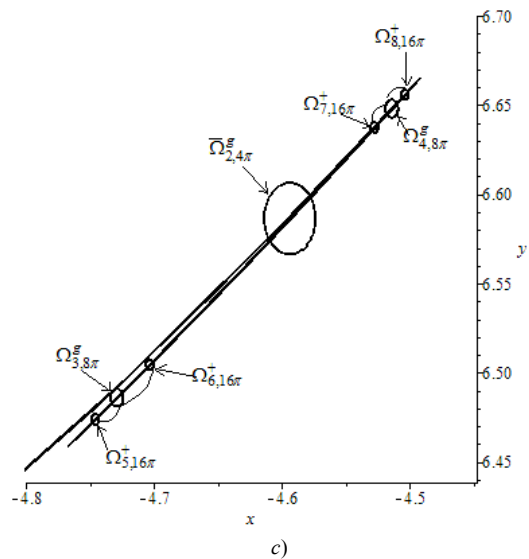
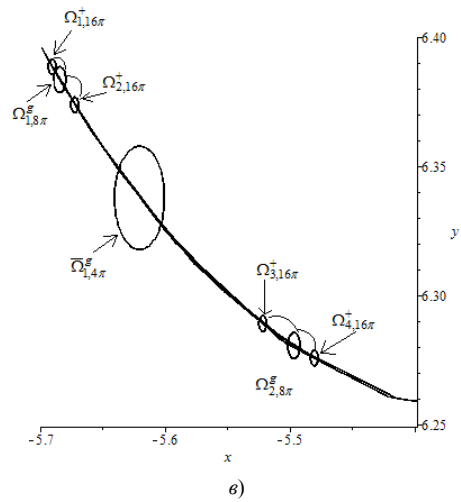
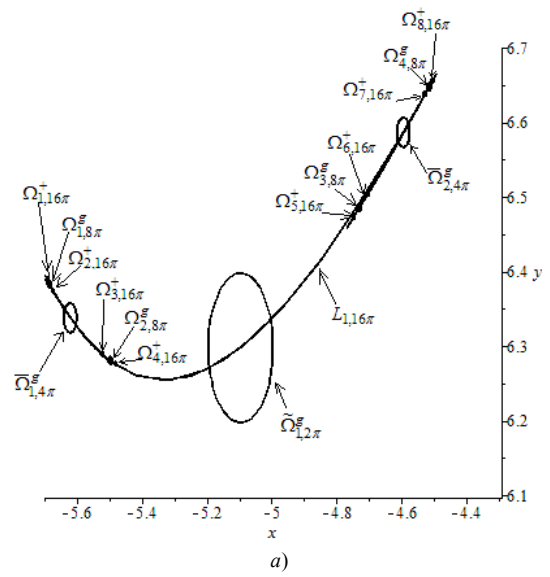


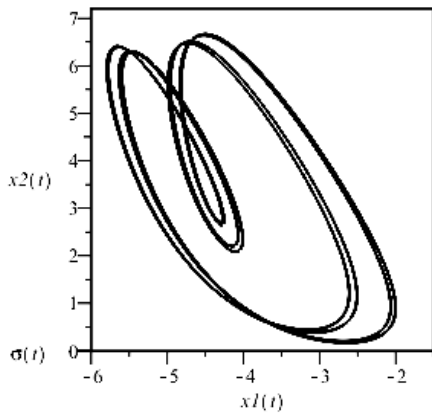
Рис. 9

На рисунке 10а изображены совпадающие проекции восьми циклов второго рода $z_{1,16\pi}^+(t)$, $z_{2,16\pi}^+(t)$, $z_{3,16\pi}^+(t)$, $z_{4,16\pi}^+(t)$, $z_{5,16\pi}^+(t)$, $z_{6,16\pi}^+(t)$, $z_{7,16\pi}^+(t)$, $z_{8,16\pi}^+(t)$ системы (1) с начальными условиями в точках

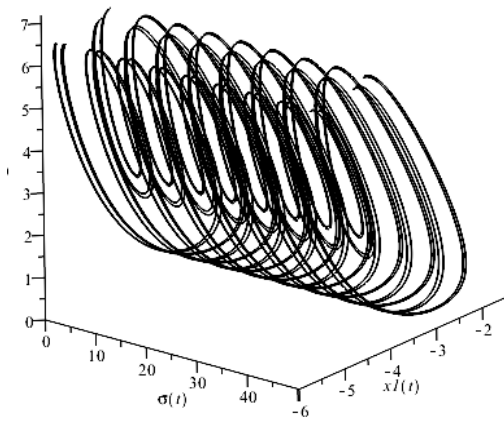
$$\begin{aligned} &A_{1,16\pi}^+(-5.6904; 6.3884), A_{2,16\pi}^+(-5.6723; 6.3737), \\ &A_{3,16\pi}^+(-5.5216; 6.2890), A_{4,16\pi}^+(-5.4803; 6.2756), \\ &A_{5,16\pi}^+(-4.7456; 6.4738), A_{6,16\pi}^+(-4.7032; 6.5043), \\ &A_{7,16\pi}^+(-4.5276; 6.6374), A_{8,16\pi}^+(-4.5037; 6.6558) \end{aligned}$$

соответственно на плоскость (x_1, x_2) . На рисунке 10в они изображены в пространстве (x_1, x_2, σ) .

На рисунке 10с представлена линия $W_{1,16\pi}$, описываемая вектором $Q_{16\pi}(x)$ при прохождении x окружности $\omega_{1,16\pi}^+$, то есть $\gamma(Q_{16\pi}, \omega_{1,16\pi}^+) = 1$. Следовательно, $z_{1,16\pi}^+(t)$ является устойчивым циклом второго рода с периодом 16π по переменной σ . Аналогично можно доказать, что циклы второго рода $z_{2,16\pi}^+(t)$, $z_{3,16\pi}^+(t)$, $z_{4,16\pi}^+(t)$, $z_{5,16\pi}^+(t)$, $z_{6,16\pi}^+(t)$, $z_{7,16\pi}^+(t)$, $z_{8,16\pi}^+(t)$ так же являются устойчивыми.



а)



б)

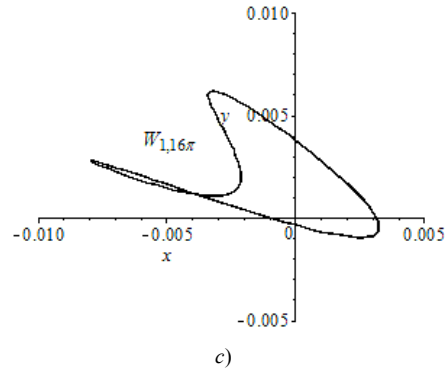


Рис. 10

На рисунке 11а изображены проекции трех циклов второго рода $\tilde{z}_{1,2\pi}^g(t)$, $\tilde{z}_{1,4\pi}^g(t)$, $\tilde{z}_{2,4\pi}^g(t)$ системы (1) с начальными условиями в таких точках

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_{1,2\pi}^g(-5.095304305; 6.2973578760), \\ &\tilde{A}_{1,4\pi}^g(-5.620310707; 6.3376797684), \\ &\tilde{A}_{2,4\pi}^g(-4.593601633; 6.5863405437) \end{aligned}$$

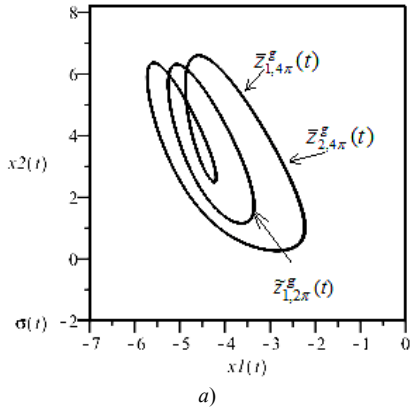
на плоскость (x_1, x_2) , что $\gamma(Q_{16\pi}, \tilde{\omega}_{1,2\pi}^g) = -1$, $\gamma(Q_{16\pi}, \tilde{\omega}_{1,4\pi}^g) = -1$, $\gamma(Q_{16\pi}, \tilde{\omega}_{2,4\pi}^g) = -1$. Проек-

ции циклов $z_{1,4\pi}^g(t)$, $z_{2,4\pi}^g(t)$ на плоскость (x_1, x_2) совпадают. На рисунке 11в изображены проекции этих циклов на плоскость (σ, x_2) . На рисунке 11с изображены совпадающие проекции четырех циклов второго рода $z_{1,8\pi}^g(t)$, $z_{2,8\pi}^g(t)$, $z_{3,8\pi}^g(t)$, $z_{4,8\pi}^g(t)$ системы (1) с начальными условиями в таких точках

$$\begin{aligned} &A_{1,8\pi}^g(-5.684364229; 6.3834139867), \\ &A_{2,8\pi}^g(-5.496674209; 6.280485388), \\ &A_{2,8\pi}^g(-5.496674209; 6.280485388), \\ &A_{3,8\pi}^g(-4.728630329; 6.485961837), \\ &A_{4,8\pi}^g(-4.513988889; 6.647869796) \end{aligned}$$

на плоскость (x_1, x_2) , что $\gamma(Q_{16\pi}, \omega_{1,8\pi}^g) = -1$, где $i = \overline{1,4}$. На рисунке 11д изображены проекции этих циклов в пространстве (x_1, x_2, σ) .

На рисунке 12 изображены проекции пятнадцати циклов на плоскость (x_1, x_2) .



a)

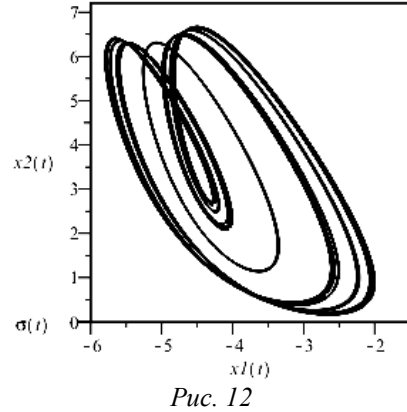
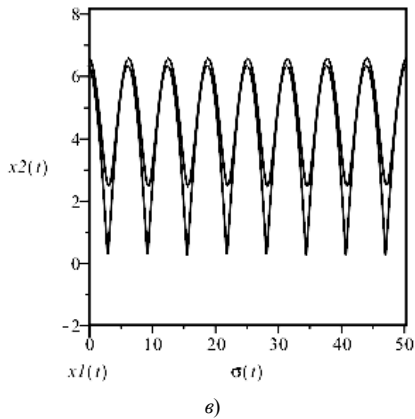
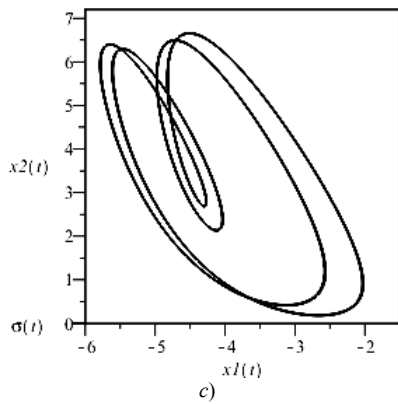


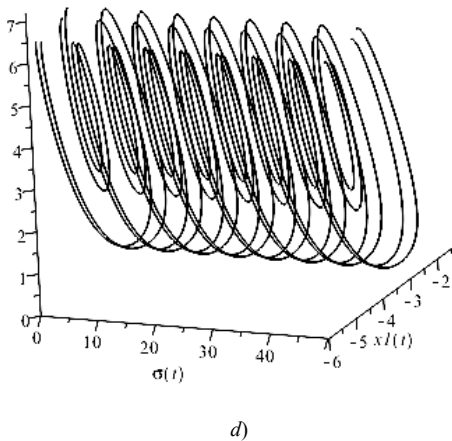
Рис. 12



б)



в)



д)

Рис. 11

Таким образом, в системе (1) при увеличении β_1 от 1.018 до 1.02 наблюдается сценарий бифуркации двух циклов с периодом 8π на четыре устойчивых цикла второго рода с периодом 16π по переменной σ , трансформацией неустойчивых циклов $\bar{z}_{1,2\pi}^g(t)$, $z_{1,4\pi}^g(t)$, $z_{2,4\pi}^g(t)$ с периодами 2π , 4π по переменной σ и четырех устойчивых циклов $z_{1,8\pi}^+(t)$, $z_{2,8\pi}^+(t)$, $z_{3,8\pi}^+(t)$, $z_{4,8\pi}^+(t)$ в неустойчивые циклы $z_{1,8\pi}^g(t)$, $z_{2,8\pi}^g(t)$, $z_{3,8\pi}^g(t)$, $z_{4,8\pi}^g(t)$ с периодом 8π по переменной σ .

Дальнейшее увеличение параметра β_1 до значения 1.025 приводит к появлению у системы (1) странного аттрактора, образованного набором устойчивых и неустойчивых циклов второго рода. На рисунке 13 изображена проекция траектории системы (1) с начальными условиями в точке $\hat{A}(-5.4; 6.29; 0)$ на плоскость $(x_1, x_2, 0)$.

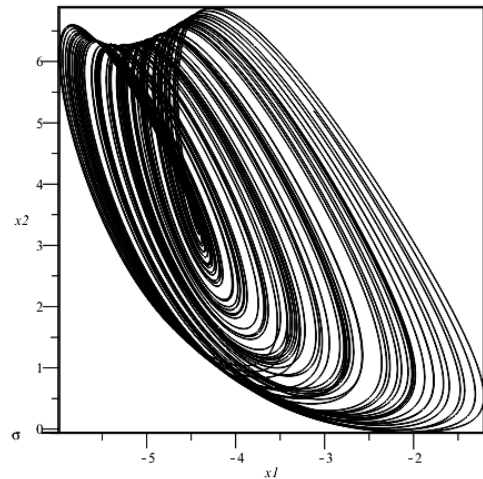


Рис. 13

Заключение. В работе предложен численный подход анализа сценариев бифуркации предельных циклов второго рода: численно находится вращение векторного поля, определяющее условия существования циклов второго рода и их устойчи-

ности. Использование вращения векторного поля для определения неподвижных точек оператора позволяет определить начальные условия неустойчивых циклов. Прикладное значение полученных результатов заключается в том, что они позволяют

использовать систему (1) как математическую модель генератора, модулирующего нелинейные колебания. Последовательные бифуркации циклов второго рода системы (1) приводят к появлению скрытых аттракторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Витерби Э.Д.** Принципы когерентной связи. – М.: Сов. Радио, 1970. – 392 с.
2. **Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.** Системы фазовой автоподстройки частоты. – М.: Связь, 1972. – 448 с.
3. **Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.** Теория колебаний в радиотехнике. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. **Шахтарин Б.И.** Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. – М.: Машиностроение, 1991. – 192 с.
5. **Матросов В.В.** Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. – 2006. – Т. 49, № 3. – С. 267–278.
6. **Матросов В.В., Шалфеев В.Д.** Динамический хаос в фазовых системах. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007. – 258 с.
7. **Шалфеев В.Д., Матросов В.В.** Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. – 366 с.
8. **Леонов Г.А., Смирнова В.Б.** Математические проблемы теории фазовой синхронизации. – СПб.: Наука, 2000. – 400 с.
9. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. – СПб., 1992. – 368 с.
10. **Мамонов С.С.** Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений II // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 8. – С. 1075–1084.
11. **Мамонов С.С.** Динамика астатической поисковой системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного университета. – 2010. – № 2/32. – С. 48–55.
12. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Исследование биений поисковой системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник РГРТУ. – Рязань: РГРТУ, 2014. – № 2. – С. 52–59.
13. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Применение векторного поля для определения циклов второго рода // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 14, № 5. – С. 46–54.
14. **Магницкий Н.А., Сидоров С.В.** Новые методы хаотической динамики. – М.: Эдиториал, УРСС, 2004. – 318 с.
15. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Анализ бифуркаций циклов второго рода. Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 14. – № 3. – С. 92–96.
16. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

Ионова Ирина Викторовна, аспирант кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46
тел.: +7 (4912) 28-05-74; e-mail: i.ionova@rsu.edu.ru