**УДК 517.929**

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ НЕПРЕРЫВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

**А.И. Зубов, В.И. Зубов, А.Ф. Зубова**
*Санкт-Петербургский государственный университет*

# THE INVESTIGATION OF PROBLEM CONTINUOUS STABILIZATION

**A.I. Zubov, V.I. Zubov, A.F. Zubova**

В статье разрабатываются математические методы исследования нелинейных динамических систем: построение решений динамических систем, удовлетворяющих различным краевым условиям; исследование решений динамических систем с последействием; построение программных управлений и движений, удовлетворяющих краевым и начальным условиям; синтез этих управлений; решение проблем стабилизации программного движения в случае прямого и непрямого регулирования.

*Ключевые слова:* множество, условие, проблема, стабилизация, матрица, положительная определенность, скаляр.

The giving article is supposes of foundation mathematical methods of investigation no linear dynamics systems: the building of solutions dynamical systems, satisfying various extreme conditions, the investigation of solutions dynamics systems with after action; the building program controls and motions, satisfying extreme and initial conditions, the solution of problems stabilization program motion in case direct and no direct regulation.

*Keywords*: multitudes, condition, problem, stabilization, matrix, positive definition, scalar.

**Введение**

В настоящее время в промышленно развитых странах разработка современных средств производства и транспорта, в первую очередь, характеризуется созданием все более сложных технических систем и технологических процессов. При эксплуатации этих технических систем и технологических процессов из-за возрастания числа составляющих их элементов и усложнения взаимосвязей между ними растет интенсивность отказов, что приводит к увеличению числа крупных технических и техногенных катастроф. В последнее время это практически подтверждается увеличением числа различных аварий и катастроф (отказы на АЭС, массовое отключение электричества, аварии на транспорте и т.д.). В связи с этим возникает задача обеспечения безопасности динамики функционирования технических систем и технологических процессов, зависящих от многих параметров и имеющих нелинейные связи.

**Условия положительной определенности матрицы динамической системы**

В дальнейшем при исследовании проблемы непрерывной стабилизации нам потребуется найти условия, при которых матрица

$$A(t,+\infty,\lambda)=\int\limits_t^{+\infty} B^*(\tau)B(\tau)\exp(-\lambda\tau)d\tau \quad \lambda>0, \quad (1)$$

является положительно определенной.

Рассмотрим вначале множество вещественных скалярных функций $b_i(t),\quad (i=1,\dots,n)$, определенных при $t\ge 0$ и удовлетворяющих условию

$$b_i(t)<h\exp(\mu t),\quad t\ge 0,\quad h>0,\quad \mu>0. \quad (2)$$

Будем использовать прежние обозначения $B(t)=(b_1(t),\dots,b_n(t))^*$.

**Теорема 1.** Для того чтобы непрерывные функции $b_i(t),\quad (i=1,\dots,n)$, удовлетворяющие условиям (2), были линейно независимы на интервале $[t,+\infty),\quad t\ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A(t,+\infty,\lambda)$ при $\lambda>2\mu$ была положительно определённой.

**Доказательство**. Необходимость. Пусть функции $b_i(t)\quad (i=1,\dots,n)$, удовлетворяющие условиям (2), линейно независимы на некотором интервале $[t,+\infty),\quad t\ge 0$. Тогда для любого вещественного вектора $C\ne 0$ выполняется неравенство $B^*(\bar t)C\ne 0$ хотя бы для одного значения $\bar t\in[t,+\infty)$. Из непрерывности функции $B^*(t)C$ вытекает, что в некоторой окрестности данной точки это неравенство также имеет место, то есть функция сохраняет знак. Кроме того, в силу неравенства (2) справедливо соотношение

$$(B^*(t)C)^2<\|C\|^2\, h^2\exp(2\mu t),\quad t>0.$$

Отсюда следует, что имеет место неравенство

$$C^*A(\mathrm{t},+\infty)\mathrm{C}=\int\limits_{\mathrm{t}}^{+\infty} \mathrm{C}^*B(\tau)B^*(\tau)C\exp(-\lambda\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_t^{+\infty}(B^*C)^2\exp(-\lambda\tau)d\tau>0.$$

Несобственный интеграл, стоящий слева в этом неравенстве, является сходящимся, так как мажорируется несобственным интегралом

$$\| C \|^2 \, h^2 \int_t^{+\infty} \exp((2\mu - \lambda)\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\| C \|^2 \, h^2 \exp((2\mu - \lambda)t)}{\lambda - 2\mu} \le \frac{\| C \|^2 \, h^2}{\lambda - 2\mu}.$$

В силу произвола выбора вещественного вектора $C \ne 0$ из этого неравенства следует, что матрица $A(t,+\infty,\lambda)$ – положительно определенная. Заметим, что положительная определенность матрицы $A(t,+\infty,\lambda)$ эквивалентна положительной определенности матрицы $A(0,+\infty,\lambda)$.

Достаточность. Пусть матрица $A(t,+\infty,\lambda)$ – положительно определённая. Предположим, что функции $b_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$, удовлетворяющие условиям (2), линейно зависимы на интервале $[t,+\infty)$, $t \ge 0$, тогда существует такой вещественный вектор $C \ne 0$, что $B^*(\tau)C = 0$ для всех $\tau \in [t,+\infty)$. Следовательно, справедливо равенство

$$C^* A(t,+\infty)C = \int_t^{+\infty} C^* B(\tau) B^*(\tau) C \exp(-\lambda\tau) d\tau =$$

$$= \int_t^{+\infty} (B^* C)^2 \exp(-\lambda\tau) d\tau = 0.$$

Полученное равенство противоречит положительной определённости матрицы $A(t,+\infty,\lambda)$. Таким образом, мы показали, что функции $b_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$ линейно независимы на интервале $[t,+\infty)$, $t \ge 0$ [2]. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Для того чтобы функции $b_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$ были линейно независимы на интервале $[t,+\infty), t \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие точки $\tau_1,\dots,\tau_ї \in [t_1,t_2]$, чтобы постоянные векторы $B(\tau_j)$, $j = 1,\dots,n$, были линейно независимы, то есть являлись базисом в $E^n$.

Доказательство этой теоремы можно провести по полной аналогии с доказательством теоремы 1.

Рассмотрим теперь вещественные векторные функции $B_1(\mathrm{t}),\dots,B_n(t)$, заданные на интервале $[t,+\infty)$, $t \ge 0$, $B_i(t) = (b_{1i}(t),\dots,b_n(t))^*$, $(i = 1,\dots,n)$ и имеющие размерность $r$. Будем считать, что компоненты этих функций $b_{ij}(t)$ удовлетворяют условиям (2).

Введем в рассмотрение матрицу $B(t) = (B_1(t),\dots,B_n(t))$, столбцами которой являются векторные функции $B_i(t)$, и матрицу $A(t,+\infty,\lambda) = \int_t^{+\infty} B^*(\tau) B(\tau) \exp(-\lambda\tau) d\tau$.

**Теорема 3.** Для того чтобы непрерывные векторные функции $B_i(t) = (b_{1i}(t),\dots,b_{ri}(t))^*$, $i = 1,\dots,n$, компоненты которых $b_{ij}(t)$ удовлетворяют условиям (2), были линейно независимы на интервале $[t,+\infty)$, $t \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A(t,+\infty,\lambda)$ была положительно определённой.

Доказательство теоремы 3 можно провести по аналогии с доказательством теоремы 2 с заменой скалярной величины $\sum_{i=1}^{n} c_i b_i(t)$ на вектор $B(t)C$.

**Теорема 4.** Для того чтобы векторные функции $B_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, компоненты которых $b_{ij}(t)$ удовлетворяют условиям (2), были линейно независимы на интервале $[t,+\infty)$, $t \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие точки $\tau_1,\dots,\tau_ї \in [t,+\infty)$, что среди строк (столбцов) матриц $B(\tau_j)(B^*(\tau_j))$ было $n$ линейно независимых.

Доказательство этой теоремы можно провести по аналогии с доказательством теоремы 3.

**Некоторые способы представления допустимых управлений**

Пусть $B_1(t),\dots,B_n(t)$ – вещественные векторные функции размерности $r$, заданные на промежутке $[0,T]$, и такие, что $B_i(t) \in L^2[0,T]$, то есть эти векторные функции суммируемы с квадратом $\int_0^T B_i^*(t) B_i(t) dt < \infty$.

Будем рассматривать интересующие нас управления $U = U(t)$ как функции, принадлежащие этому же пространству, то есть $U(t) \in L^2[0,T]$.

Справедлива теорема [3].

**Теорема 5.** Если векторные функции $B_1(t),\dots,B_n(t)$ – непрерывны и линейно независимы на промежутке $[0,T]$, то для любой функции $U(t) \in L^2[0,T]$ справедливо единственное представление

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_i(t) + V(t), \tag{3}$$

где $c_1,\dots,c_n$ – постоянные величины, а $V(t) \in L^2[0,T]$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T B_i^*(t) V(t) dt = 0, \quad (i = 1,\dots,n). \tag{4}$$

**Доказательство**. Так как векторные функции $B_1(t),\dots,B_n(t)$ линейно независимы, то по теореме 3 матрица $A(0,T)$ является положительно определенной и тем самым невырожденной. Очевидно, что равенства (3), (4) можно записать в векторной форме, если ввести вектор $C=(c_1,\ldots,c_n)^*$ и матрицу $B(t)$, определенную выше

$$U(t)=B(t)C+V(t), \tag{5}$$

где

$$\int_0^T B^*(t)V(t)dt=0. \tag{6}$$

Если умножить обе части равенства (5) слева на $B^*(t)$ и проинтегрировать в пределах от 0 до $T$, то получим

$$\int_0^T B^*(t)U(t)dt=\int_0^T B^*(t)B(t)Cdt+ \\ +\int_0^T B^*(t)V(t)dt=A(0,T)C. \tag{7}$$

Откуда вытекает равенство

$$C=A^{-1}(0,T)\int_0^T B^*(t)U(t)dt. \tag{8}$$

Подставляя выражение (8) в разложение (5), получим, что

$$U(t)=B(t)A^{-1}(0,T)\int_0^T B^*(t)U(t)dt+V(t). \tag{9}$$

Докажем, что получено единственное представление векторной функции $U=U(t)$ в виде (5). Предположим противное, то есть существование двух различных представлений (5):

$$U(t)=B(t)C_1+V_1(t) \text{ и } U(t)=B(t)C_2+V_2(t). \tag{10}$$

Вычитая из первого равенства второе, а затем умножая слева на матрицу $B^*(t)$ и интегрируя в пределах от 0 до $T$, получим $A(0,T)(C_1-C_2)=0$, так как матрица $A(0,T)$ невырожденная, то эта система имеет единственное решение $C_1=C_2$. Отсюда и из равенств (10) вытекает, что $V_1(t)=V_2(t)$. Теорема доказана.

**Замечание.** Заметим, что теорема 1 остается в силе, если $B_i(t)\in L^2[0,T]$ и матрица $A(0,T)$ невырожденная. Если же матрица $A(0,T)$ является вырожденной, то есть непрерывные векторные функции $B_1(t),\ldots,B_n(t)$ линейно зависимы на промежутке $[0,T]$ или имеют разрывы на этом промежутке, то разложение (5), (6) остается в силе, но уже не будет единственности этого представления.

Действительно, обозначим через $S$ матрицу, образованную из матрицы $A(0,T)$ и состоящую из всех $k$ линейно независимых строк этой матрицы. Через $H$ обозначим вектор, образованный компонентами вектора $\int_0^T B^*(t)U(t)dt$ с теми же номерами, что и линейно независимые строки матрицы $A(0,T)$, образующие матрицу $S$. Тогда, считая, что представление (5), (6) имеет место, можно получить укороченное уравнение (7)

$$H=SC. \tag{11}$$

Будем искать его решение $C$ в виде разложения по линейно независимым строкам матрицы $S$

$$C=S^*\Gamma+\overline{C}, \tag{12}$$

где $\overline{C}$ – вектор, ортогональный строкам матрицы $S$, то есть $S\overline{C}=0$. Подставляя выражение (12) в уравнение (11), получим $H=SS^*\Gamma$. Отсюда решение уравнения (11) имеет вид

$$C=S^*(SS^*)^{-1}H+\overline{C}. \tag{13}$$

Это вытекает из того, что матрица $SS^*$ размера $(k\times k)$ будет положительно определенной и тем самым невырожденной. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что для любого вектора $\Gamma\neq 0$ в силу линейной независимости строк матрицы $S$ (столбцов матрицы $S^*$) выполняется неравенство $S^*\Gamma\neq 0$. Из этого неравенства следует другое неравенство $\Gamma^*SS^*\Gamma=(S^*\Gamma)^2>0$, то есть матрица $SS^*$ является положительно определенной и, следовательно, невырожденной.

Подставляя полученное решение уравнения (11) в виде (13) в разложение (5), получим $U(t)=B(t)S^*(SS^*)^{-1}H+V(t)+\overline{V}(t)$, где

$$\overline{V}(t)=B(t)\overline{C}. \tag{14}$$

Очевидно, что справедливо соотношение

$$\int_0^T B^*(t)\overline{V}(t)dt=\int_0^T B^*(t)B(t)\overline{C}dt=A(0,T)\overline{C}. \tag{15}$$

Наличие у вектора $C$ произвольной ненулевой составляющей $\overline{C}$, ортогональной к строкам матрицы $A(0,T)$ $(S\overline{C}=0)$, и создает неоднозначность представления (5), так как вектор $C$ определен с точностью до вектора $\overline{C}$, являющегося его слагаемым.

**Выводы**

В связи с вышеизложенным, одной из важнейших проблем современного производства является развитие фундаментальных научных исследований в области обеспечения динамической безопасности функционирования сложных технических систем и технологических процессов. В первую очередь это касается использования в качестве объекта исследования адекватных динамических моделей и создания математических методов исследования их динамической безопасности.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).**

ЛИТЕРАТУРА

1. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Институт компьютерных исследований – 2002. – 384 с.
2. **Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.** Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
3. **Андреев Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976.
4. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука. – 1967. – 223 с.
5. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967.
6. **Зубов С.В., Стрекопытова М.В.** Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость. – СПб.: СПбГУ, 2010. – 446 с.
7. **Зубов И.В.** Анализ систем управления и способы представления программных управлений. – СПб.: ВВМ, 2014. – 150 с.
8. **Зубов А.В., Шабурова О.А.** Управление динамическими системами. – СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2005. – 83 с.
9. **Зубов А.В., Зубов Н.В., Зубов С.В., Зубова А.Ф.** Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем. – СПб.: ВВМ, 2011. – 362 с.
10. **Зубов С.В., Зубов А.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений. – СПб.: АООТ «Мобильность-плюс», 2012. – 357 с.

Зубов Алексей Иванович, аспирант кафедры теории управления, факультет прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета
191024, г. Санкт-Петербург, ул. Конная, д. 22/5, кв. 4
тел.: (812) 274-80-11, e-mail: ddemidova@mail.ru