УДК 517.929

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦ ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

А.И. Зубов, В.И. Зубов, А.Ф. Зубова
Санкт-Петербургский государственный университет

THE TASK OF CONSTRUCTING BOUNDARY CHANGES ELEMENT MATRIX SYSTEM FIRST APPROACH

A.I. Zubov, V.I. Zubov, A.F. Zubova

В статье поставлена задача без построения характеристических многочленов и изучения множеств их коэффициентов, при которых они будут устойчивы, определить границы изменения элементов матрицы системы, при которых её собственные числа остаются в левой полуплоскости, то есть границ устойчивости системы первого приближения.

Ключевые слова: точка множества, полуплоскость, собственное число, матрица, достаточное условие, характеристический многочлен, диагональные клетки, базис, критерий, корневой вектор.

In present paper is decides the task no building characteristics multitudes and the learning multitudes they coefficients, by that they is stability, to define the borders of alteration elements of matrix system, by that shi own numbers is remains in left semi plane, e. c. borders of stability system first approach.

Keywords: point of multitude, semi plane, own number, matrix, sufficient condition, characteristics multitude, diagonal cages, basis, criteria, root vector.

Введение

При решении задач робастной устойчивости нелинейных динамических систем по первому линейному приближению обычно переходят к исследованию устойчивости их характеристических многочленов, коэффициенты которых определяют некоторый интервальный полином или иное заданное множество. Известно, что до сих пор одним из наиболее конструктивных инструментов исследования устойчивости интервальных полиномов остается теорема Харитонова [1]. Однако, наибольший интерес для исследования в данной области представляет задача построения границ изменения элементов матрицы системы первого приближения $\dot{X} = AX$, чтобы при изменении этих элементов в рамках найденных границ сохранялась устойчивость системы.

Постановка задачи о существовании выпуклых областей устойчивости

Напомним несколько известных фактов и определений из теории выпуклых множеств.

Определение 1. Множество $\Omega \subset E_{nn}$ постоянных квадратных матриц размера $n \times n$ называется выпуклым, если для любых двух матриц A_1 и A_2, принадлежащих этому множеству, и любых чисел $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ матрица $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ также принадлежит этому множеству.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что точка A лежит на отрезке, соединяющем точки A_1 и A_2. Действительно, так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, то можно записать $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \alpha A_1 + (1-\alpha) A_2 = A_2 + \alpha(A_1 - A_2)$, $\alpha \in [0,1]$.

Определение 2. Пусть заданы k точек $A_1, A_2, \ldots, A_k \in E_{nn}$. Выпуклой линейной комбинацией этих точек назовем выражение $A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i$, где $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \ge 0$.

Определение 3. Угловой точкой выпуклого множества $\Omega \subset E_{nn}$ называется точка A, которая не представляется в виде выпуклой линейной комбинации других точек этого множества.

Теорема 1. Если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – все угловые точки замкнутого, ограниченного и выпуклого множества Ω, то любая точка A этого множества может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации этих точек [2].

Определение 4. Будем называть выпуклое множество $U \subset E_{nn}$ постоянных, квадратных матриц размера $n \times n$ выпуклым устойчивым матричным множеством, если для любой матрицы $A \subset U$ её собственные числа λ_i лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, ï$.

Теорема 2. Пусть задано замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $U \subset E_{nn}$ имеющее конечное число угловых точек $A_1, A_2, \ldots, A_к$. Для того чтобы это множество было устойчивым матричным множеством, достаточно того, чтобы матрицы A_i $(i = 1, \ldots, k)$ были отрицательно определены.

Доказательство. Пусть выполняются условия данной теоремы. Тогда согласно теореме 1 любая точка A множества U может быть представлена в виде комбинации угловых точек: $A=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i A_i,\quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,\ \alpha_i\geq 0$.

Покажем, что матрица A отрицательно определена. Действительно, так как матрицы $A_i\ (i=1,...,k)$ являются отрицательно определенными, то для любого вектора $X\in E_n$ справедливы неравенства: $X^T A_i X<0,\quad i=1,...,k.$ Отсюда вытекает $X^T A_i X = X^T(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i A_i)X=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X^T A_i X<0.$ Это означает, что матрица A является отрицательно определенной и, следовательно, в силу теоремы 1 все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости. Теорема доказана.

Замечание 1. Условия теоремы 2 с одной стороны не являются необходимыми, так как из того, что все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости, не следует, что данная матрица является отрицательно определенной. С другой стороны, если матрица A является положительно определенной, то она является неустойчивой, то есть не все её собственные числа лежат в левой полуплоскости.

Замечание 2. Рассмотрим простейший пример, доказывающий, что собственные числа λ_i матрицы A могут лежать в левой полуплоскости, а сама матрица не является отрицательно определенной. Действительно, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, то $\lambda_1=\lambda_2=-1.$ Возьмем $X=(1,1)^T$, получим $X^T AX=2>0,$ то есть матрица A не является отрицательно определенной. Легко привести аналогичный пример в том случае, когда матрица A зависит от времени и (или) пространственных координат.

Перейдем теперь к более детальному изучению достаточных условий того, что матрица A является отрицательно определенной. Положим, что все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости. Найдем дополнительные условия на собственные числа этой матрицы, при выполнении которых, эта матрица будет отрицательно определенной.

Известно [3], что для любой матрицы A справедливо представление $A=SJS^{-1}$, где J – вещественная каноническая форма Жордана, а S – неособенная матрица перехода к базису, образованному объединением базисов корневых подпространств этой матрицы. Очевидно, матрица A является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда матрица J также является отрицательно определенной, то есть отрицательно определенная матрица A является отрицательно определенной в любом базисе.

Пусть характеристический многочлен матрицы A в вещественной области имеет вид

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_k)^{r_k}\prod_{j=1}^{s}[(\lambda-\alpha_j)^2+\beta_j]^{p_j},\quad (1)$$

где $\lambda_k<0\quad (k=1,...,m)$ – вещественные собственные числа матрицы A с кратностями r_k, а $\lambda_j=\alpha_j\pm\beta_j\ (j=1,...,s)$ – комплексные собственные числа матрицы A с кратностями $p_j\ (\alpha_j<0,\beta_j>0)$. Тогда, как известно [4], вещественная форма Жордана J состоит из диагональных клеток вида

$$\begin{pmatrix}\lambda_\kappa & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_\kappa & 1 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_\kappa & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_\kappa\end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_j & \beta_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -\beta_j & \alpha_j & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0\ 0 & \alpha_j & \beta_j & 1 & 0 & \dots\\ 0\ 0 & -\beta_j & \alpha_j & 0 & 1 & \dots\\ \vdots\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\\ 0\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_j & \beta_j\\ 0\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_j & \alpha_j\end{bmatrix}.\quad (2)$$

Так как матрица J является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда матрица $J+J^T$ также является отрицательно определенной, то рассмотрим диагональные элементы этой матрицы. Нетрудно видеть, что они будут иметь вид

$$\begin{pmatrix}2\lambda_\kappa & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 2\lambda_\kappa & 1 & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\\ 0 & \dots & 1 & 2\lambda_\kappa & 1\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\lambda_\kappa\end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2\alpha_j & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 2\alpha_j & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 2\alpha_j & 0 & 1 & 0 & \dots\\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha_j & 0 & 1 & \dots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\alpha_j & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2\alpha_j\end{bmatrix}.\quad (3)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что величины β_j никак не влияют на величину собственных чисел матрицы $J+J^T$.

Очевидно, что матрица $J+J^T$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда матрицы (3), являющиеся её диагональными клетками, также являются отрицательно определенными. Найдем условия, которым должны удовлетворять величины $\lambda_к$ и α_j, при выполнении которых матрицы вида (3) будут отрицательно определены.

Рассмотрим вначале матрицы (3) первого вида и введем обозначения, считая, что $\mu = 2\lambda_k$

$$\Phi_1(\mu) = \mu,\ \Phi_2(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},\ \Phi_3(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\Phi_3(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \mu & 1 & \ldots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & 1 & \mu & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель последней матрицы, разлагая его по первой строке. Нетрудно видеть, что справедливо рекуррентное соотношение [5]

$$\det \Phi_k(\mu) = |\Phi_k(\mu)| = \mu\,|\Phi_{k-1}(\mu)| - \\ - |\Phi_{k-2}(\mu)|, \quad k = 3,4,... \tag{4}$$

Выпишем несколько первых определителей из этой цепочки

$$|\Phi_1(\mu) = \mu, |\Phi_2(\mu)| = \mu^2 - 1, |\Phi_3(\mu)| = \mu^3 - 2\mu\,,$$
$$|\Phi_4(\mu)| = \mu^4 - 3\mu^2 + 1, \quad |\Phi_5(\mu)| = \mu^5 - 4\mu^3 + 3\mu,$$
$$|\Phi_6(\mu)| = \mu^6 - 5\mu^4 + 6\mu^2 - 1, \ldots .$$

Применяя критерий Сильвестра, получим, что матрица $\Phi_s(\mu)$ будет отрицательно определенной тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$(-1)^l \Phi_l(\mu) > 0, \quad l = 1,...,s\,. \tag{5}$$

Кроме того, собственные числа ρ_k этих матриц удовлетворяют условию [2]

$$\det(\Phi_k(\mu) - \rho_k E) = |\Phi_k(\mu - \rho_k)| = 0\,. \tag{6}$$

Найдем для ясности собственные числа для первых четырех из этих матриц: $\rho_1 = \mu$; $\rho_{2i} = \mu \pm 1, i = 1,2;\quad \rho_{31} = \mu,\ \rho_{3i} = \mu \pm \sqrt{2},\ \ i = 2,3;$ $\rho_{4i} = \mu \pm \sqrt{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}},\quad i = 1,\ldots,4$ и так далее.

Заметим, что многочлены $|\Phi_k(\mu)|$ k-го порядка имеют k вещественных кососимметрических корней (для нечетного k один из корней является нулевым). Это следует из рекуррентного соотношения (4) и того, что эта матрица симметричная. Таким образом, для любого числа k можно указать такой минимальный по величине отрицательный корень многочлена $-\Delta_k$, что все его корни удовлетворяют двустороннему неравенству $-\Delta_k \le \mu \le \Delta_k$ и $(-1)^l \Phi_l(\mu) > 0,\ \mu \notin [-\Delta_k, \Delta_k]$, $l = 1,...,r_k$.

Таким образом мы доказали две теоремы.

Теорема 3. Если при $\mu = 2\lambda_k$, $k = 1,\ldots,\partial$, выполняются неравенства (5), то все диагональные клетки (3) первого вида являются отрицательно определенными матрицами [6].

Теорема 4. Если при $\mu = 2\lambda_k$, $k = 1,\ldots,\partial$, выполняются неравенства

$$\mu < -\Delta_s, \quad s = r_k\,, \tag{7}$$

где $-\Delta_{k_i}$ – наименьший из корней многочлена $|\Phi_{r_k}(\mu)|$, то все диагональные клетки (3) первого вида являются отрицательно определенными матрицами.

Замечание 3. Условия теоремы 3 являются, вообще говоря, излишне жесткими. Достаточно потребовать выполнения условий (5) при числе S, совпадающем с максимальным размером диагональной клетки вещественной формы Жордана, соответствующей собственному числу λ_k (максимальной высоте корневого вектора, соответствующего этому собственному числу). Это же замечание по поводу величины S касается и теоремы 4. Заметим также, что достаточно несложно выписать коэффициенты многочлена $|\Phi_k(\mu)|$ в общем виде исходя из рекуррентного соотношения (4), и уточнить полученные выше оценки [1].

Перейдем теперь к изучению диагональных клеток вещественной формы Жордана (3) второго вида, имеющих четные размеры. Введем формально обозначения, считая, что $\mu = 2\alpha_j$

$$\Psi_1(\mu) = \mu, \Psi_2(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \Psi_3(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 0 & \mu & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\Psi_k(\mu) = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \mu & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \mu & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \mu \end{bmatrix}.\mathrm{d}$$

Вычислим определитель последней матрицы, разлагая его по первой строке. Нетрудно видеть, что справедливо рекуррентное соотношение [7]

$$\det \Psi_k(\mu) = |\Psi_k(\mu)| = \mu\,|\Psi_{k-1}(\mu)| - \\ - \mu\,|\Psi_{k-3}(\mu)| + |\Psi_{k-4}(\mu)|, \quad k = 5,6,\ldots \tag{8}$$

Выпишем несколько первых определителей из этой цепочки

$$|\Psi_1(\mu)| = \mu, |\Psi_2(\mu)| = \mu^2, |\Phi_3(\mu)| = \mu^3 - \mu,$$
$$|\Phi_4(\mu)| = \mu^4 - 2\mu^2 + 1, |\Phi_5(\mu)| = \mu^5 - 3\mu^3 + 2\mu,$$
$$|\Phi_6(\mu)| = \mu^6 - 4\mu^4 + 4\mu^2, \ldots$$

Применяя критерий Сильвестра, получим, что матрица $\Psi_d(\mu)$ будет отрицательно определенной тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$(-1)^l \Psi_l(\mu) > 0, \quad l = 1,\ldots,d. \tag{9}$$

Собственные числа $\rho_к$ этих матриц удовлетворяют условию

$$\det(\Psi_k(\mu)-\rho_k E)=|\Psi_k(\mu-\rho_k)|=0\,. \qquad (10)$$

Найдем, для ясности, собственные числа для первых четырех из этих матриц: $\rho_1=\mu;\rho_{2j}=\mu,$ $j=1,2;$ $\rho_{31}=\mu,$ $\rho_{3i}=\mu\pm 1,$ $i=2,3;$ $\rho_{4j}=\mu\pm i,$ $j=$ $=1,\ldots,4$ и так далее.

Заметим, что многочлены $|\Psi_k(\mu)|$ k-го порядка имеют k вещественных кососимметричных корней. Это следует из рекуррентного соотношения (8) и того, что данная матрица симметричная. Таким образом, для любого числа k можно указать минимальный по величине отрицательный корень многочлена $-\Delta_{\hat{e}}$, при котором все корни этого многочлена удовлетворяют двустороннему неравенству $-\Delta_к\le\mu\le\Delta_к$ и $(-1)^l|\Psi_l(\mu)|>0,$ $\mu\notin[-\Delta_k,\Delta_k],$ $l=1,\ldots,p_s.$

Таким образом, мы доказали две теоремы.

Теорема 5. Если при $\mu=2\alpha_j,$ $j=1,\ldots,s,$ выполняются неравенства (9) при $d=p_s$, то все диагональные клетки (3) второго вида являются отрицательно определенными матрицами.

Теорема 6. Если при $\mu=2\alpha_j,$ $j=1,\ldots,s,$ выполняется неравенство

$$\mu<-\Delta_d\,,\quad d=p_s\,, \qquad (11)$$

где $-\Delta_d$ – наименьший из корней многочлена $|\Psi_{p_s}(\mu)|$, то все диагональные клетки (3) второго вида являются отрицательно определенными матрицами.

Справедлива следующая теорема

Теорема 7. Если выполняются условия теорем 3 и 5 (4 и 6), то матрица A является отрицательно определенной.

Доказательство теоремы следует из того, что все диагональные клетки $J+J^T$ являются отрицательно определенными матрицами, и замечаний, сделанных выше.

Выводы

Условия теоремы 5 являются, вообще говоря, излишне жесткими. Достаточно потребовать выполнения условий (9) при числе d совпадающем с максимальным размером диагональной клетки вещественной формы Жордана, соответствующей собственному числу $\alpha_j+\beta_j$ (максимальной высоте корневого вектора, соответствующего этому собственному числу). Это же замечание по поводу величины d касается и теоремы 6. Заметим также, что достаточно несложно выписать коэффициенты многочлена $|\Psi_k(\mu)|$ в общем виде исходя из рекуррентного соотношения (8) и уточнить полученные выше оценки.

Полученные результаты можно применить для решения вопроса о структурной минимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов А.В., Шабурова О.А.** Управление динамическими системами. – СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2005. – 83 с.
2. **Зубов А.В., Зубов С.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений. – СПб.: ВВМ, 2011. – 323 с.
3. **Дикусар В.В., Зубов А.В., Зубов Н.В**. Структурная минимизация стационарных систем управления и наблюдения // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2010. – № 4. – С. 13–17.
4. **Дикусар В.В., Зубов А.В., Зубов Н.В**. Критерии управляемости стационарных систем // Доклады академии наук. – 2010. – Т. 430. – № 1. – С. 13–14.
5. **Зубов А.В., Зубов Н.В.** Динамическая безопасность управляемых систем. – СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009. – 172 с.
6. **Зубов И.В., Зубов Н.В., Стрекопытова М.В.** Анализ управляемых систем и равновесных движений. – СПб.: ВВМ, 2012. – 322 с.
7. **Зубов А.В., Зубов И.В., Зубов С.В., Стрекопытов И.С., Стрекопытова М.В.** Аналитическая природа случайных последовательностей // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2010. – № 104. – С. 84–89.

Зубов Алексей Иванович, аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургского государственного университета
191024, г. Санкт-Петербург, ул. Конная, д. 22/5, кв. 4
тел.: (812) 274-80-11; e-mail: ddemidova@mail.ru