УДК 518.61

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.А. Ванцян, Г.А. Геворкян

Институт механики НАН Армении

Предлагается обобщенный метод итерации, представляющий собой гибрид классического метода итерации и метода пропорционального деления. Приводится геометрическая интерпретация сходимости обобщенного метода итерации: рассмотрены случаи ступенчатой и спиралеобразной итераций. Выведены формулы для обобщенного нелинейного оператора как для сжимающего отображения функции одной, так и нескольких переменных.
На примерах решения некоторых систем дифференциальных уравнений показано преимущество обобщенного метода итерации по отношению к известным методам с точки зрения как широты области, так и скорости сходимости.

Ключевые слова: *обобщенный метод итерации, нелинейно-обобщенное отображение, сжимаемый оригинал, сходимость, неподвижная точка, системы дифференциальных уравнений.*

ABOUT ONE NON LINEAR GENERALIZATION OF THE COMPRESSION REFLECTION PRINCIPLE

A.A. Vantsyan, H.A. Gevorgyan

Generalize method of iteration is proposed, presented as a combination of the classical iteration and proportional division methods. A geometrical interpretation of a convergence of a generalize method of iteration is brought, the case of stage and spiral iterations are considered. The formulas for the generalize non linear operator as for compression reflection for one as for some variables carried out. On the exercises of some examples of the differential equations systems the advantage of a generalize method of iteration on respect to the known methods a view point as of the width of region as of the speed of convergence was showed.

Keywords: *generalize method of iteration, non linear generalize reflection, compressing original, convergence, immovable point, differential equations systems.*

ВВЕДЕНИЕ

В публикациях [1–3] было дано необходимое обоснование теоретической состоятельности и прикладной эффективности обобщенного метода итерации (ОМИ) применительно к решению нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Более того, в работе [2] было показано, что ОМИ в связи с численным решением нелинейных трансцендентных уравнений не уступает по показателям сходимости таким прогрессивным методам численного анализа, как метод Ньютона и комбинированный метод (метод касательных + метод хорд).

В настоящей статье предполагается несколько расширить традиционные представления о сжимающем отображении [4] как о фундаментальном принципе решения систем алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений методом последовательных приближений. Новое нелинейное обобщение принципа сжимающего отображения призвано послужить, таким образом, теоретической основой для численного решения систем алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений обобщенным методом итерации.

НЕЛИНЕЙНО-ОБОБЩЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КАК ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В целях наглядной иллюстрации предлагаемого обобщения оператора сжимающего отображения рассмотрим его, прежде всего, на примере функции одной переменной.

Как известно [4], всякую функцию $\varphi = \varphi(x)$, удовлетворяющую условию $\varphi(x) = x$, принято называть сжимающим отображением, если $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le q|x_1 - x_2|$ при $0 < q < 1$.

Вводится в рассмотрение следующее выражение [2]:

$$\Phi(x) = \frac{\psi(x) + (\lambda - 1)x}{\lambda}, \tag{2.1}$$

после чего доказывается, что оно практически при какой угодно функции $\psi = \psi(x)$ в полном метрическом пространстве R является сжимающим отображением, т.е. $|\Phi'(x)| \le q < 1$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИИ

В достаточной близости от искомого корня $x = \xi$, где допустима ассимиляция касательной в точках x_0, x_1. и x_2, т.е. $\psi'(x_0) = \psi'(x_1) = \psi'(x_2) = \mathrm{tg}\alpha$, для спиралеобразной итерации на рис. 1, (а), с одной стороны, имеют место следующие равенства:

$$\frac{BO}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{p_1}{p_2} = |\mathrm{tg}\alpha|, \text{. или}$$

$$x_2 - x_1 = (x_0 - x_2)\mathrm{tg}\alpha, \ \ \mathrm{tg}\alpha < 0$$

С другой стороны, для ступенчатой (рис. 1, б) и гиперступенчатой (рис. 1, в) итераций справедливо соотношение

$$x_1 - x_2 = (x_0 - x_2)\mathrm{tg}\alpha, \quad \mathrm{tg}\alpha > 0.$$

Следовательно, с учетом обозначения $\mathrm{tg}\alpha = 1 - \lambda$ подтверждается предположение о полноте метрического пространства R, а вместе с тем и справедливость первичного выражения (3.1) для обобщенного сжимающего отображения при выполнении условий существования и единственности неподвижной точки в R [4], что позволяет переформулировать оператор нелинейного сжимающего отображения в окончательном виде

$$\Phi(x) = \frac{\psi(x) - \psi'(x)x}{1 - \psi'(x)}. \tag{3.8}$$

Таким образом, из вышеприведенных выкладок становится ясно, что при выборе достаточно большого по абсолютной величине числа $|\lambda| \in \boldsymbol{R}$, т.е. при $|\lambda| \to \infty$, все три подобласти сходимости (рис. 2, а и б) покрывают практически весь спекрт возможных вариаций касательной на плоскости, что и требовалось доказать. Из этого следует, что оператор $\Phi(x)$ является нелинейно-обобщенным отображением при сжимаемом оригинале $\psi(x)$ (рис. 3).

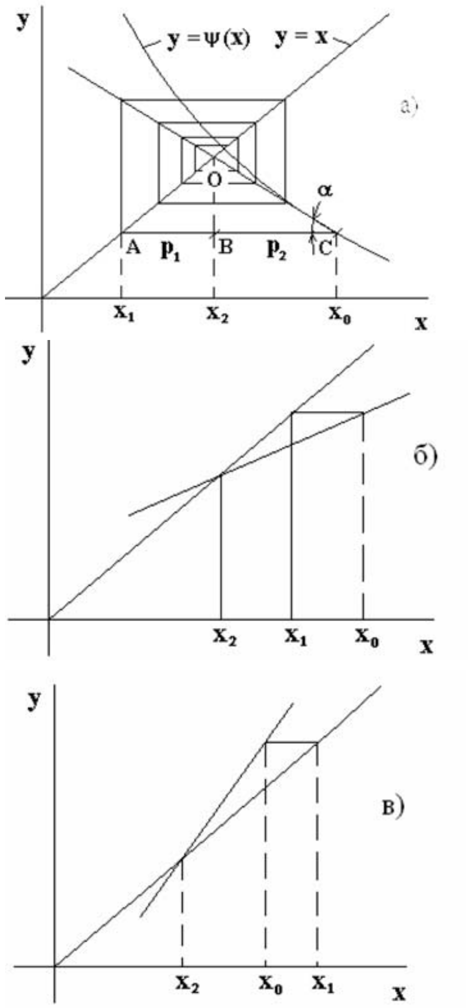

РИС. 1.
Геометрическая интерпретация сходимости ОМИ

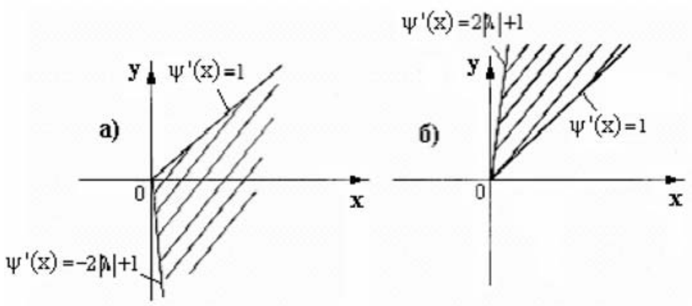

РИС. 2.
Изображение подобластей сходимости

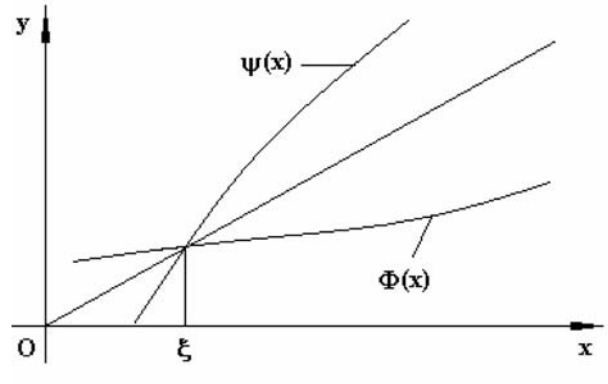

РИС. 3.
Нелинейно-обобщенное отображение $\Phi(x)$ и сжимаемый оригинал $\psi(x)$

Для случаев (а) и (б) имеем:

$$\lambda > 0 \quad \left|\frac{\lambda - 1 + \psi'(x)}{\lambda}\right| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \dfrac{|\lambda| - 1 + \psi'(x)}{|\lambda|} \\ \dfrac{|\lambda| - 1 + \psi'(x)}{|\lambda|} < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi'(x) > -2|\lambda| + 1 \text{ (для "спирали" [4] при } -2\lambda| + |1 < \psi'(x) < 0); \\ \psi'(x) < 1 \text{ (для "лестницы" [4] при } 0 < \psi'(x) < 1). \end{cases}$$

Для случая (в) имеем:

$$\lambda < 0 \quad \left|\frac{\lambda - 1 + \psi'(x)}{\lambda}\right| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \dfrac{-|\lambda| - 1 + \psi'(x)}{-|\lambda|} \\ \dfrac{-|\lambda| - 1 + \psi'(x)}{-|\lambda|} < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi'(x) < 2|\lambda| + 1; \\ \psi'(x) > 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(для гиперступентчатой итерации [3]} \\ \text{при } 1 < \psi'(x) < 2|\lambda| + 1) \end{matrix}$$

НЕЛИНЕЙНО-ОБОБЩЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КАК ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В пространстве E_n вводится каноническая норма $\|\vec{x}\|$, выражаясь одной из следующих норм [5]:

$$\|\vec{x}\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \text{или} \quad \|\vec{x}\|_l = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|},$$

$$\text{или} \quad \|\vec{x}\|_m = \max_i |x_i|.$$

В таком случае отображение

$$\|\vec{\Phi}(\vec{x}_1) - \vec{\Phi}(\vec{x}_2)\| \le q\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \quad \text{при} \quad 0 < q < 1$$

может квалифицироваться нелинейно-обобщенным в пространстве E_n. Для нововведенного оператора нелинейного отображения $\vec{\Phi}$ в E_n будут формально выполняться все известные теоремы [5], доказанные для классического оператора сжимающего отображения $\vec{\varphi}$ в E_n.

На основании вышеизложенного допустима формализация нелинейного оператора сжимающего отображения $\vec{\Phi}$ в пространстве E_n как оператора, обеспечивающего сжатие произвольного сжимаемого оригинала $\vec{\psi}$ к неподвижной точке, т.е.

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) = [\overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{\psi}'(\vec{x})]^{-1}[\vec{\psi}(\vec{x}) - \overleftrightarrow{\psi}'(\vec{x})\vec{x}], \qquad (4.1)$$

где $\overleftrightarrow{\psi}'(\vec{x})$ – матрица-якобиан вектора сжимаемого оригинала $\vec{\psi}(\vec{x})$, а именно,

$$\overleftrightarrow{J}(\vec{x}) = \overleftrightarrow{\psi}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В качестве первого примера алгоритмического приложения ОМИ к решению дифференциальных уравнений в частных производных рассматривается двумерная модельная задача охлаждения предварительно нагретой пластины, уравнение которой записывается в виде [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad при \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \qquad (5.1)$$

где ρ – плотность, с – удельная теплоемкость, а k – коэффициент теплопроводности, зависящий от материала сплошной среды.

Плоская среда представляет собой железную прямоугольную пластину с размерами 1=h=1 м, для которой имеют место следующие значения физических характеристик: $\rho = 7800\,\text{кг}/\text{м}^3$, $c = 465\,\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ и $k = \lambda t = 47t\,\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Одинаковым образом изначально предполагаются заданными начальные условия дифференциального уравнения (5.1) (рис. 4). Также оговаривается, что охлаждение присходит только по краям пластины при температуре окружающей среды $t_{ext} = 20^\circ\text{C}$.

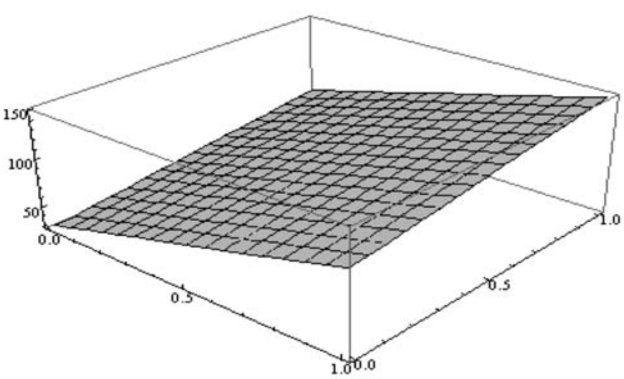

РИС. 4.
Начальное распределение температуры (при t = 0)

Вследствие численного решения сформулированной выше задачи на основе ОМИ [1–3] приводятся промежуточное (при t = 30 с, рис. 5) и конечное (при t = 60 с, рис. 6) распределения температур в исследуемой пластине.

В роли второго примера численного решения дифференциального уравнения в частных производных рассматривается классическая задача моделирования поперечных колебаний натянутой и защемленной на концах струны (задача Д'Аламбера) [6].

В такой постановке задача сводится к численному решению волнового уравнения обобщенным методом итерации:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } c = 336\ м/с \ \text{ и } \ i = 1,\ldots,n \tag{5.2}$$

совместно с граничыми условиями

$$v(0,t) = v(l,t) \equiv 0, \tag{5.3}$$

а также с учетом начальных условий в перемещениях и в скоростях, т.е.

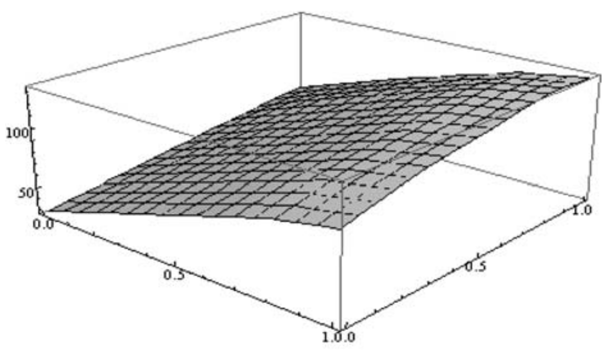

РИС. 5.
Промежуточное распределение температуры (при t = 30 с)

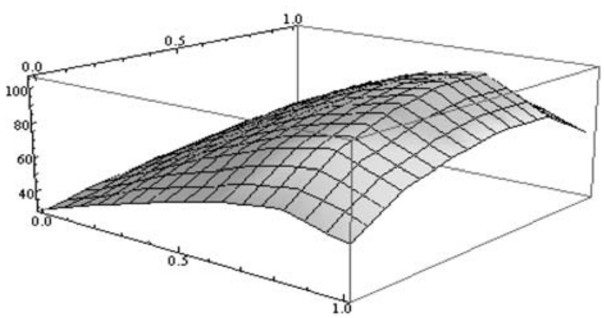

РИС. 6.
Конечное распределение температуры (при t = 60 с)

$$\begin{cases} v_i(x_i,0) = \zeta_i(x_i), & i = 1,\ldots,n; \\ \dot{v}_i(x_i,0) = 0, & i = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{5.4}$$

причем функция $\zeta_i = \zeta_i(x_i)$ в первом выражении (5.4) представляет собой совокупность начальных отклонений точек струны, изображенную на рис. 7.

Численное воспроизведение прогибов (мм) струны реализуется при значениях n=11 и 1=1 м для моментов времени t = 0,5 с и t = 1,0 с, а соответствующие результаты предлагаются на рис. 8 и 9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно приведенным теоретическим обоснованиям и представленным численным результатам ОМИ в ряде случаев обладает существенным преимуществом по отношению к методу Ньютона и к другим известным методам вычислительной математики при решении систем алгебраических и дифференциальных уравнений.

В самом деле, эффективность метода Ньютона в связи с решением систем уравнений существенно падает, если якобиан системы уравнений либо равен, либо близок к единичной матрице: в таком случае точность итерационного процесса ограничивается начальным приближением, принимаемым на каждом этапе численного интегрирования. Это обстоятельство и

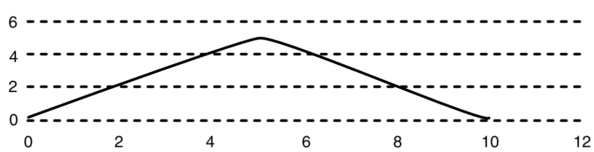

РИС. 7.
Функция начального отклонения

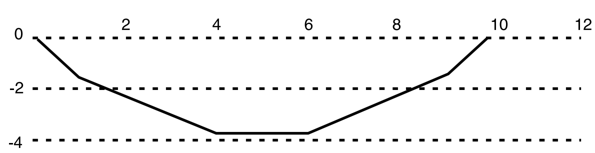

РИС. 8.
Функция прогибов струны при t = 0.5 с

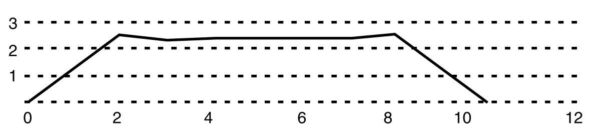

РИС. 9.
Функция прогибов струны при t = 1.0 с

обосновывает нецелесообразность непосредственного применения метода Ньютона для разрешения указанного типа систем дифференциальных уравнений.

Литература

1. **Ванцян А.А.** Об одном методе решения трансцендентных и алгебраических уравнений // Information Technologies and Management. 2004. № 4. С. 44–47.
2. **Ванцян А.А.** Обобщенный метод итерации // Вестник РАЕН. 2015. Т. 15. № 4. С. 13–15.
3. **Ванцян А.А., Геворкян Г.А.** Модернизированный метод итерации // Механика композиционных материалов и конструкций. Сб. трудов IV Всероссийского симпозиума. М., 2012. Т. 1. С. 40–44.
4. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
5. **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
6. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

Ванцян Анушаван Аристакесович,
д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,

Геворкян Грант Араратович,
к.т.н, научный сотрудник Института механики НАН РА,

➲ 0019, Армения, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б,
тел.: (374-10) 56-15-23, e-mail: vantsyan@mechins sci.am