УДК 518.61

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИИ

А.А. Ванцян

Институт механики НАН Армении

Предлагается обобщенный метод итерации для решения трансцендентых уравнений. Доказана теорема о существовании и сходимости предлагаемой итерации. Приводятся соответствующие графики.

Ключевые слова: *обобщенный метод итерации, трансцендентные уравнения, теорема.*

GENERALIZE METHOD OF ITERATION

A.A. Vantsyan

Generalize method of iteration for solution of the transcendent and algebraic equations is offered. The theorem about existence and convergity of a supposed iteration is evidenced. The respectively graphs are brought.

Kaywords: *generalize method of iteration, transcendent equations, theorem.*

ВВЕДЕНИЕ

В публикации [1] впервые была изложена оригинальная разновидность традиционного процесса итерациии, которую впоследствии решено было назвать модернизированным методом итерации. Выдвинутое нововведение успешно себе зарекомендовало на ряде приведенных примеров [1] по сравнению с некоторыми существующими методами численного решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Последующие теоретические и прикладные исследования новой модификации метода итерации подтвердили, с одной стороны, его эффективность, а, с другой стороны, первоначально возникшие догадки о существовании некоего обобщенного процесса итерации, в рамках которого классический (КМИ) и модернизированный (ММИ) методы итерации выступают лишь частными случаями. Это обстоятельство позволяет теперь, опираясь на старое теоретическое обоснование и твердую практическую аргументацию, утверждать о существовании и справедливости обобщенного метода итерации (ОМИ), или сжимающего отображения, с которым предлагается ознакомиться ниже в полной трактовке.

ТЕОРЕМА

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем все ее значения $\varphi(x)\in[a,b]$. Тогда, если существует правильная дробь q такая, что

$$\frac{\left|\lambda-1+\varphi'(x)\right|}{\lambda}\le q<1 \qquad (1)$$

при $a<x<b$ и $\lambda\in R$, то обобщенный процесс итерации

$$x_n=\frac{\varphi(x_{n-1})+(\lambda-1)x_{n-1}}{\lambda},\quad n=1,2,... \qquad (2)$$

сходится независимо от начального значения $x_0\in[a,b]$ к предельному значению

$$\xi=\lim_{n\to\infty}x_n, \qquad (3)$$

которое является единственным корнем уравнения

$$f(x)=0,\text{ или }\varphi(x)=x, \qquad (4)$$

на отрезке $[a,b]$, где выполняется условие теоремы Больцмана–Коши $f(a)\cdot f(b)<0$ о существовании отделенного изолированного корня (3) уравнения (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим два последовательных приближения

$$x_n=\frac{\varphi(x_{n-1})+(\lambda-1)x_{n-1}}{\lambda}\quad\text{и}$$

$$x_{n+1}=\frac{\varphi(x_n)+(\lambda-1)x_n}{\lambda},$$

откуда

$$\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})+ +(\lambda-1)(x_n-x_{n-1})=\lambda(x_{n-1}-x_n).$$

Применяя теорему Лагранжа, будем иметь:

$$(x_n-x_{n-1})\varphi'(\overline{x}_n)+(\lambda-1)(x_n-x_{n-1})= =\lambda(x_{n+1}-x_n),\quad \overline{x}_n\in(x_{n-1},x_n);$$

или

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|\frac{\lambda-1+\varphi'\left(\overline{x}_n\right)}{\lambda}\right|\left|x_n-x_{n-1}\right|,$$

или, с учетом условия (1),

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|\le q\left|x_n-x_{n-1}\right|. \qquad (5)$$

Отсюда, придавая значения n=1, 2последовательно получим:

$$\left|x_2-x_1\right|\le q\left|x_1-x_0\right|,$$
$$\left|x_3-x_2\right|\le q\left|x_2-x_1\right|\le q^2\left|x_1-x_0\right|,$$
$$\left|x_{n+1}-x_n\right|\le q^n\left|x_1-x_0\right|.$$

Рассмотрим ряд

$$x_0+\left(x_1-x_0\right)+\left(x_2-x_1\right)+\ldots+\left(x_n-x_{n-1}\right)+\ldots, \qquad (6)$$

для которого последовательные приближения x_n являются $(n+1)$ –ми частными суммами, т.е. $x_n=S_{n+1}$.

В силу неравенства (5) члены ряда (6) по абсолютной величине меньше соответствующих членов геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$, поэтому ряд (6) сходится и притом абсолютно. А из этого следует, что для непрерывной функции $\varphi(x)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{(\lambda-1)\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}+\varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)}{\lambda}=$$
$$=\frac{(\lambda-1)\xi+\varphi(\xi)}{\lambda}=\xi,$$

который в итоге равносилен результату $\varphi(\xi)=\xi$, откуда следует, что ξ есть корень уравнения (4), что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ:

$$\text{а) } \lambda>0\left|\frac{\lambda-1+\varphi'(x)}{\lambda}\right|<1\Leftrightarrow\begin{cases}-1<\dfrac{\lambda-1+\varphi'(x)}{\lambda}\\ \dfrac{\lambda-1+\varphi'(x)}{\lambda}<1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(x)>-2|\lambda|+1 & (\text{для с пиралеобразной итерации}[2]\\ & \text{при}\quad -2|\lambda|+1<\varphi'(x)<0)\\ \varphi'(x)<1 & (\text{для ступенчатой итерации}[2]\\ & \text{при}\quad 0<\varphi'(x)<1)\end{cases} \qquad (7)$$

$$\text{б) } \lambda<0\left|\frac{\lambda-1+\varphi'(x)}{\lambda}\right|<1\Leftrightarrow\begin{cases}-1<\dfrac{-\lambda-1+\varphi'(x)}{-\lambda}\\ \dfrac{-\lambda-1+\varphi'(x)}{-\lambda}<1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(x)<2|\lambda|+1 & (\text{для гиперступентчатой}\\ & \text{итерации}\\ & \text{при } 1<\varphi'(x)<2|\lambda|+1)\\ \varphi'(x)>1 & \end{cases} \qquad (8)$$

Геометрическая интерпретация процесса сходимости ОМИ представлена на рис. 1, 2 для вышеприведенных случаев соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЯ

1) ОМИ включает в себе три возможных подобласти сходящихся процессов: спиралеобразной итерации (рис. 1) при $-2|\lambda|+1<\varphi'(x)<0$, ступенчатой итерации (рис. 2) при $0<\varphi'(x)<1$ и названной в настоящей работе гиперступенчатой итерацией (рис. 2) при $1<\varphi'(x)<2|\lambda|+1$, которые в триединстве обеспечивают методу итерации безусловную сходимость при выборе достаточно большого числа $|\lambda|\in R$, т.е. при $|\lambda|\to\infty$.

2) Нетрудно заметить, что при $\lambda=1$ ОМИ вырождается к виду КМИ, а при $\lambda=2$ – принимает вид ММИ.

3) Нетрудно также показать, что ОМИ аналогичным образом формулируется и для систем нелинейных уравнений с образованием сжимающего отображения обобщенного типа.

В качестве примера рассмотрен случай численного решения трансцендентного уравнения в комплексных корнях полученного в [3], где исследована задача об устойчивости многослойного основания:

$$\alpha p\,\mathrm{tg}p=1+i\beta p,$$

где $p=p_1+ip_2$, причем α и β – параметры, принимающие следующие значения: $\alpha=0,1,10$ и $\beta=0;\ 0{,}1$. Это уравнение для комплексных корней можно свести к системе двух трансцендентных уравнений для действительных корней:

$$\begin{cases}\alpha p_1\,\mathrm{tg}p_1-\alpha p_2\,\mathrm{th}p_2=1+\beta p_1\,\mathrm{tg}p_1\,\mathrm{th}p_2-\beta p_2,\\ \alpha p_1\,\mathrm{th}p_2+\alpha p_2\,\mathrm{tg}p_1=\beta p_1-\mathrm{tg}p_1\,\mathrm{th}p_2+\beta p_2\,\mathrm{tg}p_1\,\mathrm{th}p_2.\end{cases}$$

На рис. 3, 4 приводется оптимальные значения параметра $\lambda_{\text{опт}}$ для достижения сходимости численных результатов приведенного примера в зависимости от начальных приближений p_1^0 и p_2^0. Аналогичные таблицы можно получить для любых значений пар α и β.

Следует особо отметить, что попытки решения контрольного примера методом Ньютона и комбинированных методом не привели к каким-либо удовлетворительным результатам по нахождению корней.

Наряду с безусловной сходимостью численных решений обобщенный метод итерации, представленный в настоящей работе, обеспечивает также нахождение

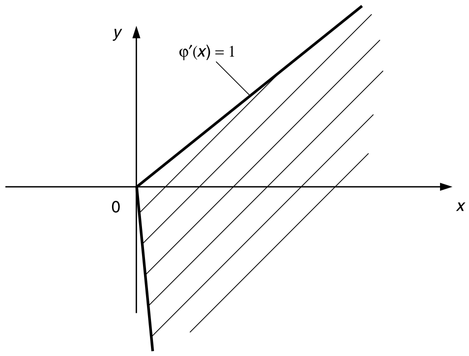

РИС. 1.
Область сходимости при $\varphi'(x) = -2|\lambda| + 1$

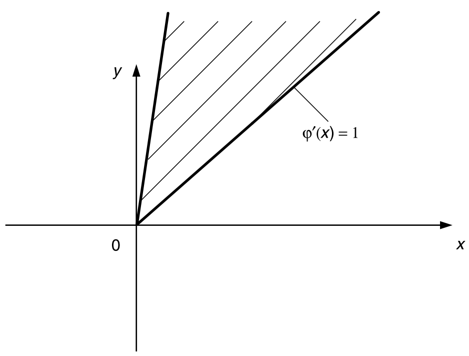

РИС. 2.
Область сходимости при $\varphi'(x) = 2|\lambda| + 1$

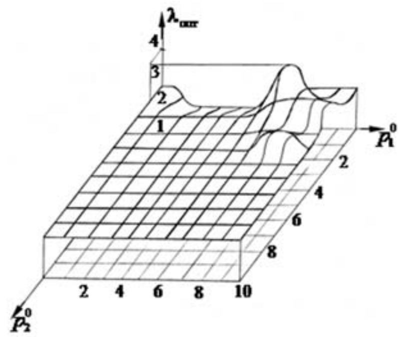

РИС. 3.
Зависимость $\lambda_{опт}$ от начального приближения при $\alpha = 0{,}1;\ \ \beta = 0$

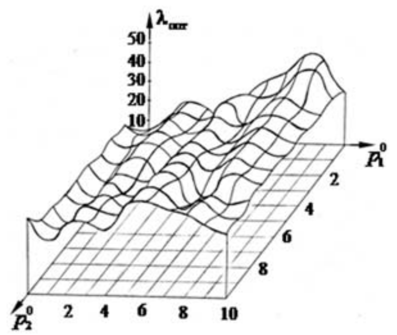

РИС. 4.
Зависимость $\lambda_{опт}$ от начального приближения при $\alpha = 10;\ \ \beta = 0{,}1$

большего каличество корней уравнений по сравнению с известными методами.

Автор считает своим долгом выразить признательность Г.А. Геворкяну за проведенные расчеты.

Литература

1. **Ванцян А.А.** Об одном методе решения трансцендентых и алгебраических уравнений // Information Technologies and Management. 2004, № 4. С. 44–47.
2. **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики // М.: Наука, 1970. 664 с.
3. **Мовсисян Л.А.** Об одном способе сейсмозащиты ДНАМ РА // 2011, №4. Т. 111. С. 325–335.

Ванцян Анушаван Аристакесович
д.ф.–м.н., профессор, в.н.с. Института механики НАН Армении

➲ Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б, тел.: (374-10) 56-15-23, e-mail: vantsyan@mechins sci.am