УДК 517.91

ОТДЕЛЕНИЕ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

С.С. Мамонов, А.О. Харламова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

DEPARTMENT OF THE SECOND KIND OF CYCLES SYSTEM FREQUENCY-PHASE LOCKED-LOOP

S.S. Mamonov, A.O. Kharlamova

Рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты. Получены условия существования трех предельных циклов второго рода. Предложено использование вращения векторного поля для определения циклов в гиперболически инвариантном множестве. Рассмотрен пример математической модели системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка в цепях управления.

Ключевые слова: предельный цикл второго рода, система матричных уравнений, вращение векторного поля.

We consider a system of differential equations is a mathematical model of the system-frequency phase-locked loop. Conditions for the existence of three limit cycles of the second kind. Proposed the use of the rotation of the vector field to determine the cycles in a hyperbolic invariant set. An example of a mathematical model of the system frequency phase-locked with the first-order filter in control circuits.

Keywords: second limit cycle type, system matrix equations, the rotation of the vector field.

Введение. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1–9]. Для системы ЧФАП продолжены исследования, проведенные в работах [6, 7], решается задача определения условий существования трех циклов второго рода. Появление гиперболического цикла в системе ЧФАП может привести к появлению области притяжения состояний равновесия, которая определяет режимы синхронизации системы ЧФАП. Наличие вращательных режимов системы ЧФАП может быть использовано при генерировании модулированных по фазовой переменной нелинейных колебаний. Базовая математическая модель системы ЧФАП приводится к системе дифференциальных уравнений [1–3]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2kc^T x}{1+\tau^2(c^T x)^2}, \quad \dot{\sigma} = c^T x, \quad (1)$$

где $x,b,c,d \in R^2$, $k,\tau \in R$, $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. При исследовании системы (1) в работе используются результаты, полученные в [4–7]. Для системы (1) с матрицей A, имеющей собственные значения с действительной частью, возникает необходимость нахождения решения системы трех матричных уравнений, два из которых – модифицированные уравнения Ляпунова, третье – уравнение линейной связи. Использование матричных уравнений вместо неравенств позволяет получить в качестве одного из условий существования цикла второго рода – определение промежутков знакопостоянства функции одной переменной. В работе численно-аналитическими методами показано, что применение вращения векторного поля позволяет определить гиперболический цикл системы (1).

Теоретические исследования. Условия, обеспечивающие существование двух предельных циклов второго рода, определяются результатами следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = -\xi < 0$, $l^T d = 0$, $rang\|c,l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k > 0$, $\delta = \nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \beta_1 > 0$;

2) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma) - \frac{2k\xi y}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2\Gamma y^2)}, \quad \dot{\sigma} = y \quad (2)$$

при $\mu = \mu_2 < \nu\Gamma^{-3/2}$ имеет два предельных цикла второго рода $\Phi_1(\sigma)$, $\Phi_2(\sigma)$, $0 < \Phi_1(\sigma) < \Phi_2(\sigma)$

для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$, $N_i = \max_{\sigma} \Phi_i(\sigma)$, $n_i = \min_{\sigma} \Phi_i(\sigma)$, $i = 1,2$;

3) система уравнений (2) при $\mu = \mu_{1,i}$, имеет предельные циклы второго рода $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$, $0 < F_1(\sigma) < \Phi_1(\sigma) < F_2(\sigma) < \Phi_2(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$, $M_i = \max_{\sigma} F_i(\sigma)$, $m_i = \min_{\sigma} F_i(\sigma)$, $q_i = \frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2\Gamma M_i^2)}$, $u_{F_i} = \max_{\sigma}(\Phi_i(\sigma)F_i^{-1}(\sigma))$, $i = 1,2$;

4) система матричных уравнений относительно матриц H, L_1, L_2

$$A^T H + HA = -L_1 - 2\lambda_1 H, \tag{3}$$

$$(A + 2kdc^T)^T H + H(A + 2kdc^T) = -L_2 + 2\varepsilon cc^T - 2\lambda_1 H, \tag{4}$$

$$Hb = c, \tag{5}$$

при $\varepsilon > 0$, $\lambda_1 > 0$, имеет решение $H = H^T$, $L_1 = L_1^T \ge 0$, $L_2 = L_2^T \ge 0$, матрица H имеет одно отрицательное собственное значение и $\det H < 0$;

5) матрицы H, L_1, L_2 удовлетворяют соотношениям

$$H = -\gamma_1 cc^T + \gamma_2 (l + \nu\Gamma^{-1}c)(l + \nu\Gamma^{-1}c)^T, \tag{6}$$

$$L_1 = 2\eta_1 (l + \eta_2 c)(l + \eta_2 c)^T, \tag{7}$$

$$L_2 = 2\nu_1 (l + \nu_2 c)(l + \nu_2 c)^T, \tag{8}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2 \in R^+$;

6) для функций

$$f_1(u) = \tau^2 \Gamma \eta_1 u^2 ((\eta_2 \sqrt{\Gamma} - \nu\Gamma^{-1/2})u - \gamma_2^{-1/2}(\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2})^2,$$

$$f_2(u) = \nu_1 ((\nu_2 \sqrt{\Gamma} - \nu\Gamma^{-1/2})u - \gamma_2^{-1/2}(\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2})^2,$$

выполняется неравенство

$$\Psi_i(u) = (m_i^2 f_1(u) + f_2(u))(1 + \tau^2 \Gamma m_i^2 u^2) - (\lambda_1 - (\mu_{1,i} + q_i)\sqrt{\Gamma}u)(1 + \tau^2 \Gamma M_i^2 u^2) \times (1 + \tau^2 \Gamma m_i^2 u^2) - \varepsilon \Gamma u^2 (1 + \tau^2 \Gamma M_i^2 u^2) > 0$$

$$\text{для } u \in [1; u_{F_i}],\ i = 1,2. \tag{9}$$

Тогда система (1) имеет два предельных цикла второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_i(z) = x^T Hx + F_i^2(\sigma)$, $G_i(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}\Phi_i(\sigma)$, $i = 1,2$, $W_1(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, функции $F_i(\sigma)$, $\Phi_i(\sigma)$, $i = 1,2$ удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 1. Пусть $Q_{1,i} = \{z : V_i(z) \le 0, c^T x \ge 0\}$, $Q_{2,i} = \{z : G_i(z) \le 0\}$, $Q_3 = \{z : W_1(z) \le 0\}$, $\Omega_i = Q_{1,i} \cap Q_{2,i} \cap \Omega_3$, $i = 1,2$, тогда в силу условий теоремы 1, аналогично утверждению работы [7], показывается, что множества Ω_1, Ω_2 являются положительно инвариантными, а множества $\Omega_1 \cap \{z : \sigma = \sigma_0\}$, $\Omega_1 \cap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ – выпуклыми, замкнутыми и ограниченными. В силу теоремы Брауэра множества Ω_1, Ω_2 содержат предельные циклы второго рода.

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполнены условия теоремы 1 и справедливы соотношения:

$$g = \delta + \frac{2k\xi\nu}{\Gamma(1+\tau^2\Gamma n_1^2)}, \quad \alpha_1 - \nu\Gamma^{-1} > 0,$$

$$0 < \frac{M_2^2 g^2}{\gamma_1}\left((\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1})^2 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}g^2\right)^{-1} = D_{\min}^2 < D_{\max}^2 = \gamma_2^{-1}(\gamma_1 \Gamma n_2^2 - M_2^2), \tag{10}$$

тогда система (1) имеет гиперболически инвариантное множество [9].

Доказательство. Рассмотрим функции $V_2(z) = x^T Hx + F_2^2(\sigma)$, $G_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}\Phi_1(\sigma)$, $W_1(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x$, $W_2(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x + D_1$, где $D_1 > 0$, удовлетворяет неравенству

$$D_{\min}^2 < D_1^2 < D_{\max}^2. \tag{11}$$

В силу (10) такое D_1 существует. Пусть

$$Q_1^+ = \{z : V_2(z) \ge 0\},\ Q_2^+ = \{z : G_1(z) \ge 0\},$$

$$Q_3^- = \{z : W_1(z) \le 0\},\ Q_4^- = \{z : W_2(z) \ge 0\},$$

$$\Omega_3 = Q_1^+ \cap Q_2^+ \cap Q_3^- \cap Q_4^-.$$

Рассмотрим множество $\partial Q_2^+ = \{z : G_1(z) = 0, W_1(z) \le 0, W_2(z) \ge 0\}$, если $z \in \partial Q_2^+$, то справедливы соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma}\Phi_1(\sigma),\ l^T x \le -\nu\Gamma^{-1}c^T x. \tag{12}$$

В силу условий 1), 2) теоремы 1 и (12) получим, что производная функции $G_1(z)$ в силу системы (1) на множестве ∂Q_2^+ удовлетворяет соотношению

$$\dot{G}_1(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{2k\xi c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \sqrt{\Gamma}\frac{d\Phi_1(\sigma)}{d\sigma}c^T x \le \Gamma\Phi_1(\sigma)(\mu_2 - \nu\Gamma^{-3/2}) < 0. \tag{13}$$

Пусть $z \in \partial Q_3^- = \{z : W_1(z) = 0, V_2(z) \ge 0, G_1(z) \ge 0\}$, тогда выполняются соотношения

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1}c^T x. \tag{14}$$

$$0 < \sqrt{\Gamma}\Phi_1(\sigma) \le c^T x. \tag{15}$$

Используя условия 1), 3) теоремы 1 и соотношения (14), (15) найдем производную функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве ∂Q_3^-.

$$\dot{W}_1(z) = -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \frac{2k\xi\nu c^T x}{\Gamma(1+\tau^2(c^T x)^2)} +$$

$$+\frac{\nu}{\Gamma} l^T x = -\delta c^T x - \frac{2k\xi\nu c^T x}{\Gamma(1+\tau^2(c^T x)^2)} < 0\,. \quad (16)$$

Рассмотрим множество Ω_3, если $z \in \Omega_3$, то справедливы соотношения

$$-D_1 \le l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x \le 0\,, \quad (17)$$

$$\gamma_1 (c^T x)^2 \le \gamma_2 (l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x)^2 +$$

$$+F_2^2(\sigma) \le \gamma_2 D_1^2 + F_2^2(\sigma)\,. \quad (18)$$

С учетом условия 3) теоремы 1 и неравенств (17), (18), получим

$$c^T x \le \gamma_1^{-1/2} (\gamma_2 D_1^2 + F_2^2(\sigma))^{1/2} \le$$

$$\le \gamma_1^{-1/2} (\gamma_2 D_1^2 + M_2^2)^{1/2}\,. \quad (19)$$

Пусть $z \in \partial Q_4^- = \{z : W_2(z) = 0, \ \ V_2(z) \ge 0, G_1(z) \ge 0\}$, тогда выполняются соотношения (19)

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x = -D_1\,. \quad (20)$$

$$c^T x \ge \sqrt{\Gamma}\Phi_1(\sigma) \ge \sqrt{\Gamma} n_1\,. \quad (21)$$

В силу условий 1), 3) теоремы 1 и (11), (19), (20), (21), производная функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве ∂Q_4^- удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_2(z) = (\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1)(-\nu\Gamma^{-1} c^T x - D_1) -$$

$$-\beta_1 c^T x - \frac{2k\xi\nu c^T x}{\Gamma(1+\tau^2(c^T x)^2)} = -\delta c^T x -$$

$$-\frac{2k\xi\nu c^T x}{\Gamma(1+\tau^2(c^T x)^2)} + D_1(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) =$$

$$= -c^T x\left(\delta + \frac{2k\xi\nu}{\Gamma(1+\tau^2(c^T x)^2)}\right) + D_1(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) \ge$$

$$\ge -\gamma_1^{-1/2}(\gamma_2 D_1^2 + M_2^2)^{1/2}\left(\delta + \frac{2k\xi\nu}{\Gamma(1+\tau^2(c^T x)^2)}\right) +$$

$$+D_1(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) \ge -\gamma_1^{-1/2}(\gamma_2 D_1^2 + M_2^2)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\delta + \frac{2k\xi\nu}{\Gamma(1+\tau^2\Gamma n_1^2)}\right) + D_1(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) > 0\,. \quad (22)$$

Рассмотрим множество $\partial Q_1^+ = \{z : V_2(z) = 0, W_1(z) \le 0, W_2(z) \ge 0\}$, если $z \in \partial Q_1^+$, то в силу (10), (11), (19) справедливы соотношения

$$\sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) \le c^T x \le \sqrt{\Gamma} n_2 \le \sqrt{\Gamma}\Phi_2(\sigma)\,, \quad (23)$$

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x \le 0\,, \quad (24)$$

$$-\gamma_1 (c^T x)^2 + \gamma_2 (l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x)^2 = -F_2^2(\sigma)\,. \quad (25)$$

Используя (24), (25), получим

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1} c^T x - \\ -\gamma_2^{-1/2}(\gamma_1 (c^T x)^2 - F_2^2(\sigma))^{1/2}. \quad (26)$$

В силу условий 3), 4), 5) теоремы 1, производная функции $V_2(z)$ в силу системы (1) на множестве ∂Q_1^+ удовлетворяет равенству

$$\dot{V}_2(z) = \frac{1}{1+\tau^2(c^T x)^2}(\tau^2 (c^T x)^2 (2\lambda_1 F_2^2(\sigma) -$$

$$-x^T L_1 x) + (2\varepsilon (c^T x)^2 - x^T L_2 x + 2\lambda_1 F_2^2(\sigma))) -$$

$$-2c^T x F_2(\sigma)\left(\mu_{1,2} + \frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma))}\right) =$$

$$= -\frac{1}{1+\tau^2(c^T x)^2}(\tau^2 (c^T x)^2 x^T L_1 x + x^T L_2 x) +$$

$$+2\lambda_1 F_2^2(\sigma) + \frac{2\varepsilon(c^T x)^2}{1+\tau^2(c^T x)^2} - 2\mu_{1,2}(c^T x)F_2(\sigma) -$$

$$-2(c^T x)F_2(\sigma)\frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma))}\,. \quad (27)$$

Введем обозначение $c^T x = \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) u$, используя условие 3) теоремы 1 и (23), для $z \in \partial Q_1^+$ получим

$$1 \le u \le \frac{\Phi_2(\sigma)}{F_2(\sigma)} \le u_{F_2} = \max_{\sigma} \frac{\Phi_2(\sigma)}{F_2(\sigma)}\,. \quad (28)$$

Из (26) вытекает

$$l^T x = -F_2(\sigma)(\nu\Gamma^{-1/2} u + \gamma_2^{-1/2}(\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2})\,. \quad (29)$$

Используя условия 3), 6) теоремы 1, соотношения (27), (28), (29), получим, что для $\dot{V}_2(z)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}_2(z) \le -\frac{1}{1+\tau^2(c^T x)^2}(\tau^2 (c^T x)^2 x^T L_1 x + x^T L_2 x) +$$

$$+2\lambda_1 F_2^2(\sigma) - 2\mu_{1,2}(c^T x)F_2(\sigma) - 2q_2(c^T x)F_2(\sigma) +$$

$$+\frac{2\varepsilon(c^T x)^2}{1+\tau^2(c^T x)^2} = -\frac{1}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)u^2} \times$$

$$\times(\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)u^2 x^T L_1 x + x^T L_2 x) +$$

$$+2F_2^2(\sigma)(\lambda_1 - (\mu_{1,2} + q_2)\sqrt{\Gamma}u) + \frac{2\varepsilon\Gamma F_2^2(\sigma)u^2}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)u^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)u^2}(2F_2^4(\sigma)f_1(u) + 2F_2^2(\sigma)f_2(u)) +$$

$$+2F_2^2(\sigma)f_2(u)) + 2F_2^2(\sigma)(\lambda_1 - (\mu_{1,2} + q_2)\sqrt{\Gamma}u) +$$

$$+\frac{2\varepsilon\Gamma F_2^2(\sigma)u^2}{1+\tau^2\Gamma F_2^2(\sigma)u^2} \le -\frac{2F_2^2(\sigma)}{1+\tau^2\Gamma M_2^2 u^2}(m_2^2 f_1(u) +$$

$$+f_2(u)) + 2F_2^2(\sigma)(\lambda_1 - (\mu_{1,2} + q_2)\sqrt{\Gamma}u) +$$

$$+\frac{2\varepsilon\Gamma F_2^2(\sigma)u^2}{1+\tau^2\Gamma m_2^2 u^2} = -\frac{2F_2^2(\sigma)}{(1+\tau^2\Gamma M_2^2 u^2)(1+\tau^2\Gamma m_2^2 u^2)} \times$$

$$\times\Psi_2(u) < 0\,. \quad (30)$$

Из (13), (16), (22), (30) следует, что множество Ω_3 является гиперболически инвариантным.

Условия разрешимости системы матричных уравнений (3)–(5) определяются следующим утверждением.

Лемма. Пусть для системы матричных уравнений (3)–(5) выполнены соотношения $A=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & 0\\ 0 & -\lambda_2\end{pmatrix}$, $\lambda_2>\lambda_1>0$, $\lambda_2-\lambda_1=\alpha>0$, $c=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}$, $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$, $c_2\neq 0$, $c^Tb=-\Gamma<0$, $l=A^Tc$, $l^Tb=c^TAb=$ $=\nu>0$, $\varepsilon_0=\nu\Gamma^{-1}$, $\lambda_1-\varepsilon_0\neq 0$, $\lambda_2-\varepsilon_0\neq 0$, $rang\|c,l\|=2$, тогда матричные уравнения (3)–(5) имеют решение $H=H^T$, $L_1=L_1^T$, $L_2=L_2^T$, матрицы H, L_1, L_2 удовлетворяют соотношениям (6–8), где

$$\gamma_1=\Gamma^{-1},\ \gamma_2=(\Gamma(\lambda_1-\varepsilon_0)(\lambda_2-\varepsilon_0))^{-1},\quad (31)$$

$$\eta_1=(\Gamma(\lambda_1-\varepsilon_0))^{-1},\ \eta_2=\lambda_1,\quad (32)$$

$$\varepsilon=\frac{1}{\alpha}k^2c_2b_2\left(\frac{d_1}{b_1}-\frac{d_2}{b_2}\right)^2+2k\frac{d_1}{b_1},\quad (33)$$

$$\nu_1=\frac{1}{\alpha c_2b_2},\ \nu_2=\lambda_1+kc_2b_2\left(\frac{d_1}{b_1}-\frac{d_2}{b_2}\right).\quad (34)$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой в уравнение (3) показывается, что матрицы $H=\begin{pmatrix}c_1b_1^{-1} & 0\\ 0 & c_2b_2^{-1}\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\alpha c_2b_2^{-1}\end{pmatrix}$ удовлетворяют соотношениям (3), (5–7), где $\gamma_1,\gamma_2,\eta_1,\eta_2$ определяются равенствами (31), (32). Используя (3), из (4) определим матрицу L_2

$$L_2=L_1-(2kdc^T)^TH-H(2kdc^T)+2\varepsilon cc^T.\quad (35)$$

Из уравнения (35) определяется значение ε, для которого $\det L_2=0$. Если ε удовлетворяет (33), то $\det L_2=0$ и $L_2=uu^T$. Так как $rang\|c,l\|=2$, то для вектора u справедливо разложение по линейно независимым векторам c, l, $u=\sqrt{2\nu_1}(l+\nu_2c)$, где ν_1, ν_2 находятся с помощью соотношений (34). Лемма доказана.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{b}\varphi(\sigma)+\tilde{d}\frac{2k\tilde{c}^T\tilde{x}}{1+\tau^2(\tilde{c}^T\tilde{x})^2},\dot{\sigma}=\tilde{c}^T\tilde{x},\quad (36)$$

где $\tilde{A}=\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\tilde{b}=\begin{pmatrix}\nu\\ -\Gamma\end{pmatrix}$, $\tilde{c}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, $\tilde{d}=$ $=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma$, $D=\alpha_1^2-4\beta_1>0$. Матрица $\tilde{A}$ имеет действительные собственные значения $(-\lambda_1)$, $(-\lambda_2)$, $\lambda_1=2^{-1}(\alpha_1-\sqrt{D})$, $\lambda_2=$ $=2^{-1}(\alpha_1+\sqrt{D})$, $\lambda_1\lambda_2=\beta_1$, $\lambda_1+\lambda_2=\alpha_1$, $\lambda_2-\lambda_1=$ $=\sqrt{D}=\alpha$. В системе (36) сделаем замену переменных $\tilde{x}=Sx$, получим систему (1), где $A=$ $=S^{-1}\tilde{A}S$, $b=S^{-1}\tilde{b}$, $c^T=\tilde{c}^TS$, $d=S^{-1}\tilde{d}$. Пусть $S=\begin{pmatrix}\beta_1 & -\lambda_2\\ -\lambda_2 & 1\end{pmatrix}$, тогда $\det S=\Delta_s=-\lambda_2\sqrt{D}<0$, $S^{-1}=\Delta_s^{-1}\begin{pmatrix}1 & \lambda_2\\ \lambda_2 & \beta_1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & 0\\ 0 & -\lambda_2\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}-\lambda_2\\ 1\end{pmatrix}$, $b=\Delta_s^{-1}\begin{pmatrix}\nu-\lambda_2\Gamma\\ \lambda_2\nu-\Gamma\beta_1\end{pmatrix}$, $d=\Delta_s^{-1}\begin{pmatrix}-\lambda_2\\ -\beta_1\end{pmatrix}$, $l=A^Tc=$ $=\begin{pmatrix}\beta_1\\ -\lambda_2\end{pmatrix}$, $l^TA=-\alpha_1l^T-\beta_1c^T$, $l^Tb=\nu$, $l^Td=0$, $\det\|c,l\|=-\Delta_s\neq 0$, $rang\|c,l\|=2$. Для системы (1) выполняется условие 1) теоремы 1.

Рассмотрим случай $\alpha_1=5.14$, $\beta_1=0.41$, $\nu=7.5$, $\Gamma=100$, $\tau=0.02$, $k=0.8$, $\varphi(\sigma)=$ $=\sin\sigma-\gamma$, $\gamma=0.38$. При проверке условий теоремы 1 целесообразно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм проверки условий теоремы 1.

1. Используя соотношения (31-34) леммы, найти значения $\gamma_1=0.01$, $\gamma_2=0.332$, $\varepsilon=0.016$, $\eta_1=1.654$, $\eta_2=0.081$, $\nu_1=1.654$, $\nu_2=0.069$, $h_{11}=c_1/b_1=-0.256$, $h_{22}=c_2/b_2=8.236$. Так как $h_{11}<0$, $h_{22}>0$, $\eta_1>0$, $\nu_1>0$, то матрица H имеет одно отрицательное собственное значение и $\det H<0$, L_1, L_2 удовлетворяют неравенствам $L_1\geq 0$, $L_2\geq 0$. Для системы (1) выполнены условия 4), 5) теоремы 1.

2. Найти $\delta=\nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1}-\alpha_1)+\beta_1=0.03>0$. Определить начальные условия предельных циклов второго рода $\Phi_1(\sigma)$, $\Phi_2(\sigma)$ системы (2) при $\mu=\mu_2=\nu\Gamma^{-3/2}-10^{-8}=0.0075$, $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma$, $\gamma=0.38$. Численными методами находятся начальные условия $y_1(0)=3.408$, $\sigma_1(0)=0$ для цикла $\Phi_1(\sigma)$ и $y_2(0)=36.945$, $\sigma_2(0)=0$ для цикла $\Phi_2(\sigma)$, $N_1=\max\limits_{\sigma}\Phi_1(\sigma)=3.408$, $n_1=$ $=\min\limits_{\sigma}\Phi_1(\sigma)=2.759$, $N_2=\max\limits_{\sigma}\Phi_2(\sigma)=36.945$, $n_2=\min\limits_{\sigma}\Phi_2(\sigma)=36.891$. Для системы (1) выполнены условия 1), 2) теоремы 1.

3. Для системы (2) при $\mu=\mu_{1,1}=0.0315>\mu_2$ найти начальные условия $\bar{y}_1(0)=2.76$, $\sigma_1(0)=0$ предельного цикла второго рода $F_1(\sigma)$. При $\mu=\mu_{1,2}=0.0085>\mu_2$ определить начальные условия $\bar{y}_2(0)=28.92$, $\sigma_2(0)=0$ цикла $F_2(\sigma)$. Численными методами найти значения

$$M_1 = \max_{\sigma} F_1(\sigma) = 2.76, \quad m_1 = \min_{\sigma} F_1(\sigma) = 1.904,$$
$$M_2 = \max_{\sigma} F_2(\sigma) = 28.92, \; m_2 = \min_{\sigma} F_2(\sigma) = 28.85.$$

Для циклов второго рода выполняются неравенства $0 < F_1(\sigma) < \Phi_1(\sigma) < F_2(\sigma) < \Phi_2(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$. На рисунке 1 изображены циклы $F_1(\sigma)$, $\Phi_1(\sigma)$.

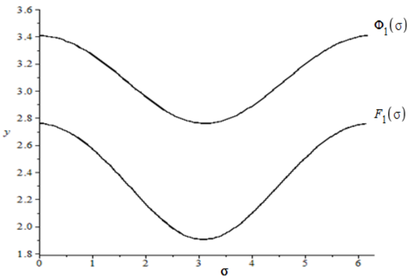

Рис. 1

Из условия 3) теоремы 1 определить $q_1 = 0.123$, $q_2 = 0.0046$, $u_{F_1} = 1.449$, $u_{F_2} = 1.279$. Система (1) удовлетворяет условию 3) теоремы 1.

4. Провести анализ функций $\Psi_1(u)$, $\Psi_2(u)$, определяемых соотношением (9). Численно показывается, что $\Psi_1(u) > 0$ для $u \in [1;\ 1.449]$, $\Psi_2(u) > 0$ для $u \in [1;\ 1.279]$. На рисунке 2 представлен график функции $\Psi_1(u)$.

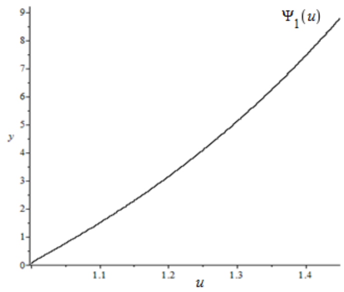

Рис. 2

Для системы (1) выполнены условия теоремы 1, системы (1), (36) имеют два цикла второго рода.

Рассмотрим условия теоремы 2, используя (10), найдем $D_{\min} = 7.99$, $D_{\max} = 39.752$. Пусть $D_1 = 8 > D_{\min}$, тогда в силу теоремы 2, система (1) имеет гиперболически инвариантное множество Ω_3, которое определяет множество $\tilde{\Omega}_3$ для системы (36). Используя (6) найдем матрицу $M = S^{-1}HS^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. Для рассматриваемого примера получим $m_1 = 0.332$, $m_2 = 0.025$, $m_3 = -0.008$. В плоскости $\sigma = 0$ рассмотрим линии

$$L_1 : x^T Hx = -F_2^2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}^T (S^{-1})^T HS^{-1}\tilde{x} = -F_2^2(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0.332\tilde{x}_1^2 + 2\cdot 0.025\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 0.008\tilde{x}_2^2 = -28.92^2,$$

$$L_2 : l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x = 0 \Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{A}\tilde{x} + \nu\Gamma^{-1}\tilde{c}^T\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_1 + 0.075\tilde{x}_2 = 0,$$
$$L_3 : l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x = -D_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{A}\tilde{x} + \nu\Gamma^{-1}\tilde{c}^T\tilde{x} = -D_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_1 + 0.075\tilde{x}_2 = -8,$$
$$L_4 : c^T x = \sqrt{\Gamma}\Phi_1(0) \Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x} = \sqrt{\Gamma}\Phi_1(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 3.401\sqrt{100}.$$

На рисунке 3 изображена область $\Omega_0 = \tilde{\Omega}_3 \cap \cap\{z : \sigma = 0\}$ ограниченная линиями L_1, L_2, L_3, L_4.

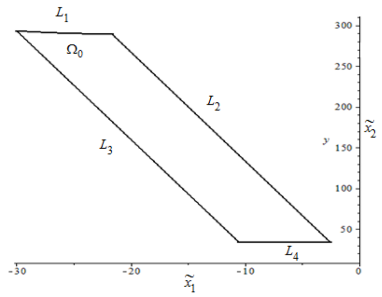

Рис. 3

Рассмотрим оператор $U = T_2 \circ T_1$, где T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (36), T_2 – параллельный перенос, $T_2\begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sigma - \Delta \end{pmatrix}$. Численными методами находится множество $U(\Omega_0)$. Определим непрерывное векторное поле $Q(x) = x - U_{\beta_1}(x)$. Если вращение векторного поля $Q(x)$ на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то согласно Теореме 5.15 [10] оператор U имеет неподвижную точку.

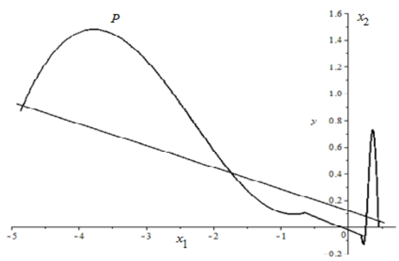

Рис. 4

На рисунке 4 представлена линия P, описываемая вектором $Q(x) = x - U(x)$ при прохождении x границы $\partial\Omega_0$. Численно показывается, что вращение векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q, \partial\Omega_0) = -1$. Оператор U имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия цикла второго рода системы (36). Делением области Ω_0 на части, показывается, что неподвижная точка оператора U находится в круге ограниченном окружностью $\omega(B;r)$, $B(-10.69719;\ 127.20156)$, $r = 0.0003$. Координаты точки B можно использовать в качестве приближения начальных условий цикла второго рода системы (36).

На рисунках 5 и 6 изображены проекции гиперболического цикла второго рода системы (36) на плоскости $(\widetilde{x}_1,\sigma)$, $(\widetilde{x}_2,\sigma)$.

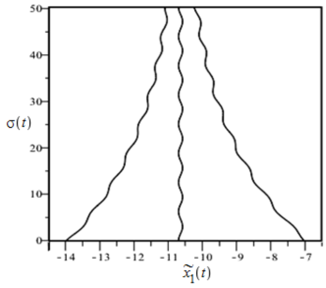

Рис. 5

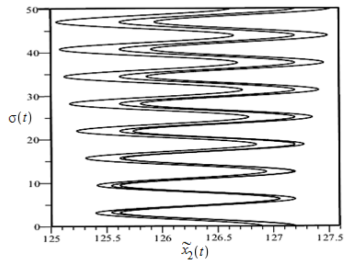

Рис. 6

Таким образом, использование решения системы матричных уравнений и вращения векторного поля позволило для системы (1) определить три области, содержащие циклы второго рода, один из которых является гиперболическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шалфеев В.Д.** К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Радиофизика. – 1969. – Т. 12. – № 7. – С. 1037–1051.
2. **Пономаренко В.П., Матросов В.В.** Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки // Радиотехника и электроника. – 1997. – Т. 42. – № 9. – С. 1125–1133.
3. **Шалфеев В.Д., Матросов В.В.** Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. – 366 с.
4. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. – 368 с.
5. **Мамонов С.С.** Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Математика, механика, информатика. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 70–81.
6. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Условия существования предельных циклов второго рода для модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты. // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 13. – № 4. – С. 51–57.
7. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Влияние частотного кольца системы фазовой автоподстройки на условия существования циклов второго рода // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 14. – № 5. – С. 55–60.
8. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 14. – № 5. – С. 46–54.
9. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Исследование биений поисковой системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2014. – № 2. – С. 52–59.
10. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. –332 с.

Мамонов Сергей Станиславович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru