

УДК 517.91

## АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА

С.С. Мамонов, И.В. Ионова

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

## ANALYSIS BIFURCATIONS OF CYCLES OF THE SECOND KIND

S.S. Mamonov, I.V. Ionova

Рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Предложен численный подход нахождения гиперболических предельных циклов второго рода. Показано, что использование вращения векторного поля может быть использовано для анализа бифуркаций циклов второго рода.

*Ключевые слова:* предельные циклы, вращение векторного поля, бифуркация.

We consider a system of differential-equations with cylindrical phase space-stvom. A numerical approach of finding Ki-hyperbolic limit cycles of the second kind. Is shown that the use of the rotation of the vector field can be used for analysis of the second kind of bifurcation cycles.

*Keywords:* limit cycles, the rotation-schenie vector field, bifurcation.

**Введение.** В работе рассматривается система дифференциальных уравнений [1–13]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma), \quad (1)$$

где  $x, b, c \in R^n$ ,  $\varphi(\sigma)$  является непрерывно дифференцируемой и  $\Delta$ -периодической функцией. Система (1) является математической моделью системы фазовой автоподстройки частоты ФАП [1–13]. Рабочими режимами для системы ФАП являются режимы синхронизации. Нахождение синхронных режимов связано с условиями глобальной устойчивости и определением областей притяжения состояний равновесия системы (1). Система вида (1) изучалась в работах [5–13], где качественно-численными методами получены условия устойчивости, соответствующие режимам синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и числа предельных циклов второго рода. В последнее десятилетие возрос интерес к асинхронным режимам. Это связано с использованием хаотических колебаний, генерируемых системой ФАП [5–7], с нахождением неустойчивых циклов, определяющих области притяжения состояний равновесия [12], с применением систем ФАП для решения модельных задач нейродинамики [7, 12]. Трудности изучения сценариев бифуркаций циклов определяются тем, что в системе дифференциальных уравнений, наряду с устойчивыми циклами, появляются гиперболические циклы [12, 14].

**Цель работы:** разработать численно-аналитический подход для анализа бифуркаций предельных циклов второго рода, с использованием вращения векторного поля, сформулировать алгоритм определения гиперболических предельных циклов.

**Практические исследования.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1), для

которой  $x \in R^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $b = \begin{pmatrix} v \\ -\Gamma \end{pmatrix}$ ,

$\Gamma > 0$ ,  $v > 0$ ,  $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,

$v = 2$ ,  $\gamma = 0.82$ ,  $\rho = -3.6$ . В этом случае система (1) является математической моделью поисковой системы фазовой автоподстройки частоты [11, 12]. С использованием результатов работы [12] численно доказываем, что система (1) при  $\Gamma = 1.024$  имеет цикл второго рода с начальными условиями  $x_1(0) = -1.096$ ,  $x_2(0) = 1.66$ ,  $\sigma(0) = 0$ . На рисунке 1 изображена проекция цикла второго рода  $z_1(t)$  системы (1) на плоскость  $(x_1, x_2)$ .

Начальные условия цикла определяют точку  $N(-1.096; 1.66)$ , изображенную на рисунке 1.

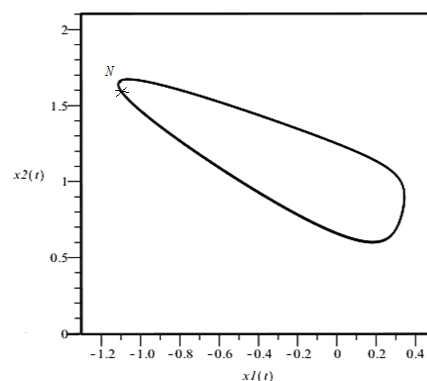


Рис. 1

Дальнейшее увеличение  $\Gamma$  приводит к бифуркации цикла второго рода. Трудности, возникающие при изучении бифуркаций циклов системы (1), связаны с тем, что, наряду с устойчивыми циклами, в системе (1) появляются неустойчивые

циклы. Для определения начальных условий неустойчивых циклов используется вращение векторного поля. В плоскости  $(x_1, x_2)$  определяется окружность  $\omega(A, r)$  радиуса  $r$  с центром в точке  $A$ , ограничивающая множество  $\Omega$ . Для оператора  $U_\Delta = P_\Delta \circ U_1$ , где  $U_1$  – оператор сдвига по траекториям системы (1),  $P_\Delta$  – отображение сдвига фазового пространства,  $P_\Delta(z) = \text{colon}(x, \sigma - \Delta)$ ,  $z = \text{colon}(x, \sigma)$ , численными методами определяется множество  $U_\Delta(\omega) = \omega_\Delta$ . Если вращение векторного поля  $Q_\Delta(x) = x - U_\Delta(x)$  на границе  $\omega$  множества  $\Omega$  отлично от нуля  $\gamma(Q_\Delta, \omega) \neq 0$ , то в силу теоремы 5.15 [15] оператор  $U_\Delta$  на множестве  $\Omega$  имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку  $x^* \in \Omega$ ,  $U_\Delta x^* = x^*$ , определяющую начальные условия цикла второго рода [8, 9]. Для нахождения неподвижной точки оператора  $U_\Delta$  в плоскости  $(x_1, x_2)$  определяется окружность  $\omega(A, r)$ , для которой  $\gamma(Q_\Delta, \omega) \neq 0$ . Множество  $\Omega$  делится на части, и определяется та его часть, для которой вращение векторного поля отлично от нуля. Деление  $\Omega$  продолжается до тех пор, пока площадь частей превосходит заданную точность. На рисунке 2 изображена схема деления множества  $\Omega$  на части  $\Omega_i$ ,  $\Omega \subset \bigcup \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

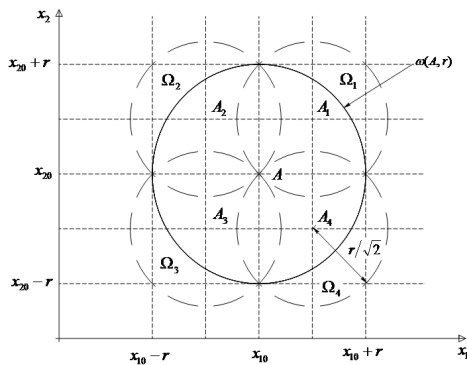


Рис. 2

Реализация указанного алгоритма для системы (1) сводится к следующим действиям: с использованием точки  $N$  находится грубое приближение  $\omega(A, r)$ ,  $\Omega$  окрестности начальных условий гиперболического цикла; делением  $\Omega$  на части по схеме, изображенной на рисунке 2, определяется окружность  $\omega_k(A_k, r_k)$ , для которой  $\gamma(Q_\Delta, \omega_k) \neq 0$ ,  $r_k < \varepsilon = 10^{-5}$ ; в качестве начальных условий гиперболического цикла второго рода выбираются координаты точки  $A_k$ . При  $\Gamma = 1.60$  численная реализация предложенных действий приводит к тому, что система (1) имеет гиперболический цикл  $z_{1,2\pi}^g$  второго рода с начальными

условиями, определяемыми координатами точки  $A_{1,2\pi}^g(-1.13281; 1.83453)$ .

Наряду с гиперболическим циклом  $z_{1,2\pi}^g$ , у системы (1) наблюдаются еще два устойчивых цикла второго рода  $z_{2,4\pi}^+$ ,  $z_{3,4\pi}^+$ , начальные условия которых определяются неподвижными точками оператора  $U_{4\pi} = P_{4\pi} \circ U_1$ .

Численными методами для окружности  $\omega_{1,2\pi}^g(A_{1,2\pi}^g; r = 0.01)$  находится линия  $L_{1,4\pi} = U_{4\pi}(\omega_{1,2\pi}^g)$ , изображенная на рисунке 3.

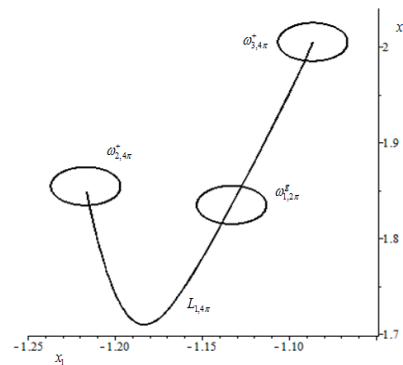


Рис. 3

На линии  $L_{1,4\pi}$  определяются точки  $A_{2,4\pi}^+$ ,  $A_{3,4\pi}^+$  для центров окружностей  $\omega_{2,4\pi}^+(A_{2,4\pi}^+; 0.01)$ ,  $\omega_{3,4\pi}^+(A_{3,4\pi}^+; 0.01)$  таких, что  $\gamma(Q_{4\pi}, \omega_{2,4\pi}^+) \neq 0$ ,  $\gamma(Q_{4\pi}, \omega_{3,4\pi}^+) \neq 0$ . На рисунке 4 представлены линии  $W_{2,4\pi}$ ,  $W_{1,2\pi}$ ,  $W_{3,4\pi}$ , описываемые векторами  $Q_{4\pi}(x)$ ,  $Q_{2\pi}(x)$  при прохождении  $x$  соответственно окружностей  $\omega_{2,4\pi}^+$ ,  $\omega_{1,2\pi}^g$ ,  $\omega_{3,4\pi}^+$ .

Численно определяются неподвижные точки  $A_{2,4\pi}^+(-1.2166; 1.8541)$ ,  $A_{3,4\pi}^g(-1.0862; 2.0048)$  оператора  $U_{4\pi}$  на множествах  $\Omega_{2,4\pi}^+$ ,  $\Omega_{3,4\pi}^+$ .

На рисунке 5а изображены проекции трех циклов второго рода  $z_{1,2\pi}^g(t)$ ,  $z_{2,4\pi}^+(t)$ ,  $z_{3,4\pi}^+(t)$  системы (1) на плоскость  $(x_1, x_2)$  с начальными условиями в точках  $A_{1,2\pi}^g$ ,  $A_{2,4\pi}^+$ ,  $A_{3,4\pi}^+$ . Проекция циклов  $z_{2,4\pi}^+(t)$ ,  $z_{3,4\pi}^+(t)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  совпадают. На рисунке 5б изображены проекции циклов второго рода  $z_{2,4\pi}^+(t)$ ,  $z_{3,4\pi}^+(t)$  системы (1) на плоскость  $(\sigma, x_2)$ .

Таким образом, в системе (1) при увеличении  $\Gamma$  от 1.024 до 1.60 наблюдается сценарий бифуркации устойчивого цикла на три цикла, среди которых один является гиперболическим с периодом

$2\pi$  по переменной  $\sigma$ , а два других являются устойчивыми с периодом  $4\pi$  по переменной  $\sigma$ . Система ФАП, соответствующая модели (1), имеет два пачечных биения с двумя импульсами каждое [7].

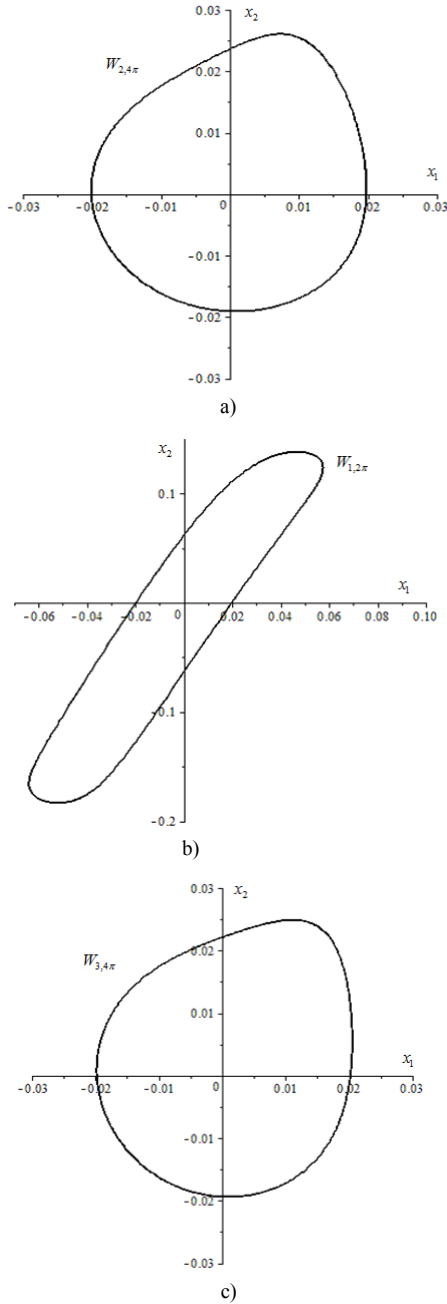


Рис. 4

Дальнейшее увеличение  $\Gamma$  от 1.60 до 1.74 приводит к тому, что от гиперболического цикла  $z_{1,2\pi}^g(t)$  отделяется устойчивый цикл  $\bar{z}_{1,6\pi}^+(t)$  с периодом  $6\pi$  по переменной  $\sigma$ , при этом цикл  $z_{1,2\pi}^g(t)$  трансформируется в гиперболический цикл  $\bar{z}_{1,2\pi}^g(t)$ . От устойчивого цикла  $z_{2,4\pi}^+(t)$  отделяется устойчивый цикл  $\bar{z}_{2,6\pi}^+(t)$  с периодом

$6\pi$  по переменной  $\sigma$ , при этом цикл  $z_{2,4\pi}^+(t)$  трансформируется в гиперболический цикл  $\bar{z}_{2,4\pi}^g(t)$ . От устойчивого цикла  $z_{3,4\pi}^+(t)$  отделяется устойчивый цикл  $\bar{z}_{3,6\pi}^+(t)$  с периодом  $6\pi$  по переменной  $\sigma$ . Цикл  $z_{3,4\pi}^+(t)$  трансформируется в гиперболический цикл  $\bar{z}_{3,4\pi}^g(t)$ . Система (1) имеет шесть циклов второго рода три, из которых устойчивые, а три гиперболические. На рисунке 6 изображены окрестности  $\bar{\Omega}_{1,2\pi}^g$ ,  $\bar{\Omega}_{2,4\pi}^g$ ,  $\Omega_{2,4\pi}^+$ ,  $\Omega_{2,4\pi}^+$ ,  $\Omega_{2,4\pi}^+$ ,  $\bar{\Omega}_{3,6\pi}^+$  начальных условий циклов системы (1), центры которых определяются начальными условиями циклов.

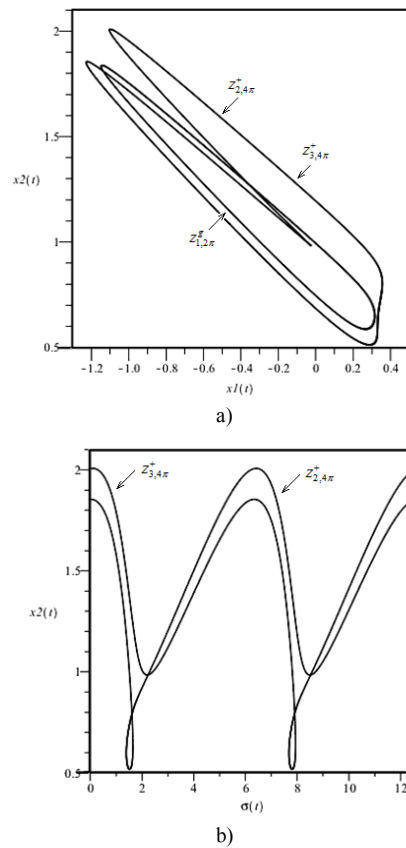


Рис. 5

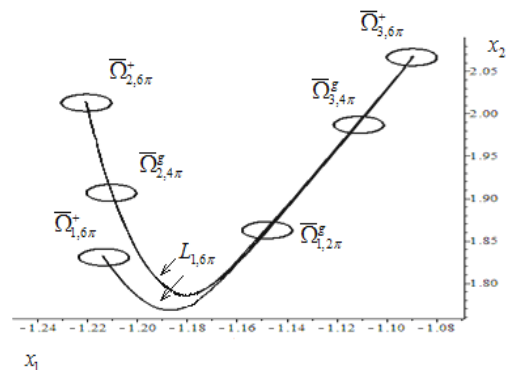


Рис. 6

Численными методами для границы  $\bar{\omega}_{1,2\pi}^g$  окрестности  $\bar{\Omega}_{1,2\pi}^g$  определяется линия  $L_{1,6\pi} = U_{6\pi}(\bar{\omega}_{1,2\pi}^g)$ , изображенная на рисунке 6. Начальные условия всех циклов системы (1) находятся на линии  $L_{1,6\pi}$ .

На рисунке 7а изображены проекции трех циклов второго рода  $\bar{z}_{1,6\pi}^+(t)$ ,  $\bar{z}_{2,6\pi}^+(t)$ ,  $\bar{z}_{3,6\pi}^+(t)$  системы (1) на плоскость  $(x_1, x_2)$ , при этом проекции циклов на плоскость  $(x_1, x_2)$  совпадают. На рисунке 7б изображены проекции этих циклов на плоскость  $(\sigma, x_2)$ .

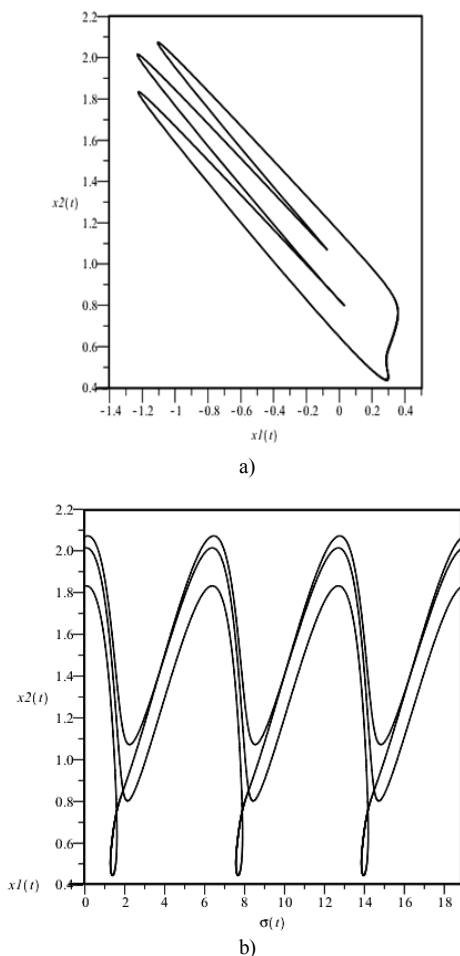
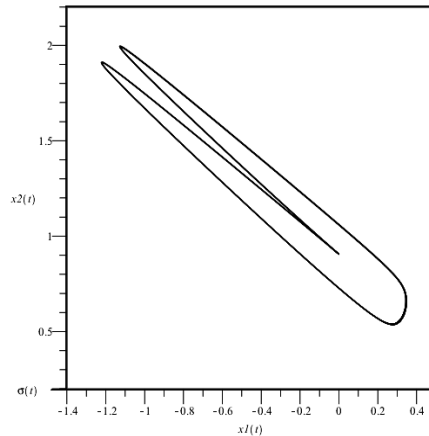
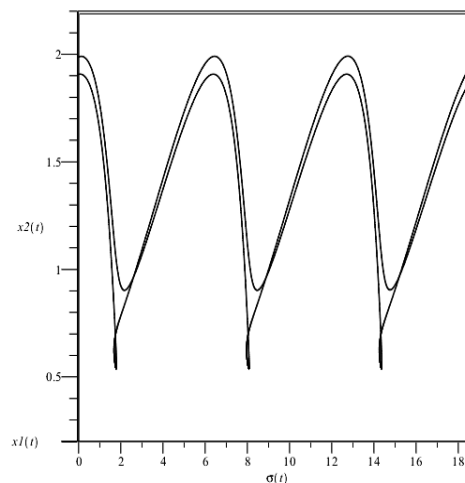


Рис. 7

На рисунке 8а изображены проекции двух циклов второго рода  $\bar{z}_{2,4\pi}^g(t)$ ,  $\bar{z}_{3,4\pi}^g(t)$  системы (1) на плоскость  $(x_1, x_2)$ . Проекция циклов, на плоскость  $(x_1, x_2)$  совпадают. На рисунке 8б изображены проекции этих циклов на плоскость  $(\sigma, x_2)$ .



а)



б)

Рис. 8

На рисунке 9а изображена проекция цикла второго рода  $\bar{z}_{1,2\pi}^g(t)$  системы (1) на плоскость  $(x_1, x_2)$ . На рисунке 9б изображены проекции шести циклов на плоскость  $(x_1, x_2)$ .

**Заключение.** В работе предложен численный подход анализа сценариев бифуркации предельных циклов второго рода: численно определяется вращение векторного поля, определяющее условия существования циклов второго рода. Использование вращения векторного поля для определения неподвижных точек оператора позволяет определить начальные условия гиперболических циклов. Прикладное значение полученных результатов заключается в том, что они позволяют использовать систему (1) как математическую модель нейроноподобного элемента [7]. Последовательные бифуркации циклов второго рода системы (1) приводят к появлению в модели нейроноподобного элемента пачечных биений с различным числом импульсов в пачке.

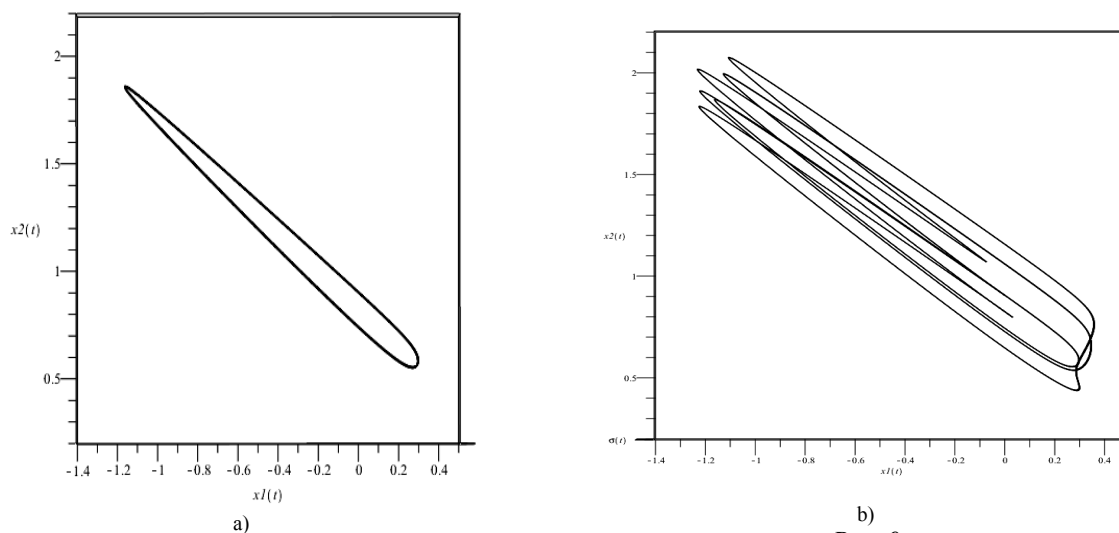


Рис. 9

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Витерби Э.Д.** Принципы когерентной связи. – М.: Советское радио, 1970. – 392с.
2. **Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.** Системы фазовой автоподстройки частоты. – М.: Связь, 1972. – 448 с.
3. **Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.** Теория колебаний в радиотехнике. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. **Шахтарин Б.И.** Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. – М.: Машиностроение, 1991. – 192 с.
5. **Матросов В.В.** Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С.267–278.
6. **Матросов В.В., Шалфеев В.Д.** Динамический хаос в фазовых системах. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. – 258 с.
7. **Шалфеев В.Д., Матросов В.В.** Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. – 366 с.
8. **Леонов Г.А., Смирнова В.Б.** Математические проблемы теории фазовой синхронизации. – СПб.: Наука, 2000. – 400 с.
9. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. – СПб., 1992. – 368 с.

10. **Мамонов С.С.** Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. II // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 8. – С. 1075–1084.

11. **Мамонов С.С.** Динамика астатической поисковой системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного университета. – 2010. – № 2/32. – С.48–55.

12. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Исследование биений поисковой системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник РГРТУ. – 2014. – № 2. – С. 52–59.

13. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Применение векторного поля для определения циклов второго рода // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 14. – № 5. – С. 46–54.

14. **Магницкий Н.А., Сидоров С.В.** Новые методы хаотической динамики. – М.: УРСС, 2004. – 318 с.

15. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

Мамонов Сергей Станиславович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина  
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,  
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru