УДК 517.925.51

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Малышев, П.С. Атаманов
Казанский государственный технологический университет
Чувашский государственный университет

SYMBOLIC METHOD TO SOLVE SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yu.V. Malyshev, P.S. Atamanov

Предложены методы сведения систем дифференциальных уравнений третьего порядка к линейным дифференциальным уравнениям третьего порядка. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, факторизованный оператор, однородное и неоднородное уравнения, операторный метод.

It is proposed methods of reducing a systems of differential equations of the third order to linear differential equations of the third order. The examples are considered.

Keywords: linear differential equation, factorized operator, homogeneous and non-homogeneous equations, symbolic method.

Как продолжение работ [1, 2], операторным методом получены линейные дифференциальные уравнения третьего порядка относительно любой искомой функции однородной, неоднородной систем третьего порядка линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рассмотрены общие случаи. Приведены примеры систем с решениями операторным методом.

1. Однородные системы. Система

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(x)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + a_{13}(t)x_3(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(x)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + a_{23}(t)x_3(t), \\ x_3'(t) = a_{31}(x)x_1(t) + a_{32}(t)x_2(t) + a_{33}(t)x_3(t) \end{cases}$$

с непрерывными и дифференцируемыми функциями $a_{ij}(t)$ в некоторой области с помощью оператора $D = d/dt$ приводится к виду

$$\begin{cases} (D - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 = 0, \\ -a_{21}x_1 + (D - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 = 0, \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (D - a_{33})x_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

А) Пусть $a_{12} \neq 0$. Исключим искомую функцию x_2 из системы (1):

$$\begin{cases} \left[(D - a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D - a_{11}) - a_{21}\right]x_1 - \\ \qquad -\left[(D - a_{22})\frac{a_{13}}{a_{12}} + a_{23}\right]x_3 = 0, \\ -\left[\frac{a_{32}}{a_{12}}(D - a_{11}) + a_{31}\right]x_1 + \\ \qquad +\left[(D - a_{33}) + \frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}\right]x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Сложением равенств (2) получим уравнение

$$\left[(D - a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D - a_{11}) - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D - a_{11}) - \right.$$
$$\left. - a_{21} - a_{31}\right]x_1 + \left[(D - a_{33}) - (D - a_{22})\frac{a_{13}}{a_{12}} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}} - a_{23}\right]x_3 = 0. \quad (3)$$

1. Пусть $a_{12} = a_{13} \neq 0$. Тогда (3) примет вид

$$\left[(D - a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D - a_{11}) - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D - a_{11}) - a_{21} - \right.$$
$$\left. - a_{31}\right]x_1 + (a_{32} - a_{33} + a_{22} - a_{23})x_3 = 0. \quad (4)$$

Если выражение x_3 из (4) подставить в первое равенство системы (2), то получим уравнение относительно искомой функции x_1

$$\left[(D - a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D - a_{11}) - a_{21}\right]x_1 -$$
$$-[(D - a_{22}) + a_{23}]\frac{1}{a_{33} - a_{32} + a_{23} - a_{22}} \times$$
$$\times\left[(D - a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D - a_{11}) - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D - a_{11}) - \right.$$
$$\left. - a_{21} - a_{31}\right]x_1 = 0 \quad (5)$$

($a_{33} - a_{32} + a_{23} - a_{22} \neq 0, \quad a_{12} = a_{13} \neq 0$), которое решается операторным методом [3]. Подставив найденную функцию x_1 в систему (1), вычисляем x_2 и x_3.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1' = \qquad\qquad tx_2 + tx_3, \\ x_2' = tx_1 \qquad\qquad - tx_3, \\ x_3' = -2tx_1 - tx_2 + tx_3. \end{cases}$$

Решение. Выполнив ограничения к уравнению (5), получим уравнение

$$x_1''' - \left(t + \frac{3}{t}\right)x_1'' + \left(\frac{3}{t^2} + 1\right)x_1' = 0.$$

С факторизованным оператором оно имеет вид

$$\left[D - \left(t + \frac{2}{t}\right)\right]\left(D - \frac{1}{t}\right)Dx_1 = 0.$$

С помощью операторного метода [3] находим общее решение $x_1 = C_1 e^{t^2/2} + C_2 t^2 + C_3$. Из первого и третьего уравнений системы следует уравнение

$$x_3' - 2tx_3 = -3C_1 t e^{\frac{t^2}{2}} - 2C_2 t - 2C_2 t^3 - 2C_3 t = \varphi(t),$$

которому соответствует операторное уравнение $(D - 2t)x_3 = \varphi(t)$, общим решением которого будет $x_3 = 3C_1 e^{t^2/2} + C_2(t^2 + 1) + C_2 + C_3$. Из первого уравнения находим $x_2 = \frac{1}{t}x_1' - x_3$ или

$$x_2 = -2C_1 e^{t^2/2} - C_2 t^2 - C_3.$$

Ответ:

$$x_1 = C_1 e^{t^2/2} + C_2 t^2 + C_3,$$

$$x_2 = -2C_1 e^{t^2/2} - C_2 t^2 - C_3,$$

$$x_3 = 3C_1 e^{t^2/2} + C_2(t^2 + 1) + C_2 + C_3.$$

2. Пусть $a_{13} = 0$. Поступая так же, как в п. 1, получим другое уравнение относительно функции x_1:

$$(D - a_{33})\frac{1}{a_{23}}\left[(D - a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D - a_{11}) - a_{21}\right]x_1 - \left[\frac{a_{32}}{a_{12}}(D - a_{11}) + a_{31}\right]x_1 = 0 \qquad (6)$$

($a_{12} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{13} = 0$).

3. Пусть $a_{32} = 0$. Так же, как в пп. 1, 2, получим уравнение относительно функции x_3:

$$\left[(D - a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D - a_{11}) - a_{21}\right]\frac{1}{a_{31}}(D - a_{33})x_3 - \left[(D - a_{22})\frac{a_{13}}{a_{12}} + a_{23}\right]x_3 = 0, \qquad (7)$$

($a_{12} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{32} = 0$).

B) Пусть $a_{13} \neq 0$. Исключим x_3 из системы (1):

$$\begin{cases} \left[(D - a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D - a_{11}) - a_{31}\right]x_1 - \left[(D - a_{33})\frac{a_{12}}{a_{13}} + a_{32}\right]x_2 = 0, & (8) \\ -\left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D - a_{11}) + a_{21}\right]x_1 + \left[\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} + (D - a_{22})\right]x_2 = 0. & (9) \end{cases}$$

Сложив (8) и (9), получим уравнение

$$\left[(D - a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D - a_{11}) - \frac{a_{23}}{a_{13}}(D - a_{11}) - a_{21} - a_{31}\right]x_1 + \left[\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} + (D - a_{22}) - (D - a_{33})\frac{a_{12}}{a_{13}} - a_{32}\right]x_2 = 0. \qquad (10)$$

1. Пусть $a_{12} = a_{13} \neq 0$. Из уравнений (10), (8) получим уравнение относительно функции x_1:

$$\left[(D - a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D - a_{11}) - a_{31}\right]x_1 - [(D - a_{33}) + a_{32}]\frac{1}{a_{22} - a_{23} - a_{33} + a_{32}} \times \left[(D - a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D - a_{11}) - \frac{a_{23}}{a_{13}}(D - a_{11}) - a_{31} - a_{21}\right]x_1 = 0 \qquad (11)$$

($a_{22} - a_{23} - a_{33} + a_{32} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} \neq 0$).

2. Пусть $a_{12} = 0$. Из уравнений (8), (9) получим уравнение относительно неизвестной функции x_1:

$$(D - a_{22})\frac{1}{a_{32}}\left[(D - a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D - a_{11}) - a_{31}\right]x_1 - \left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D - a_{11}) + a_{21}\right]x_1 = 0 \qquad (12)$$

($a_{13} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$, $a_{12} = 0$).

3. Пусть $a_{23} = 0$. Из уравнений (8), (9) получим уравнение относительно искомой функции x_2:

$$\left[(D - a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D - a_{11}) - a_{31}\right]\frac{1}{a_{21}}(D - a_{22})x_2 - \left[(D - a_{33})\frac{a_{12}}{a_{13}} + a_{32}\right]x_2 = 0 \qquad (13)$$

($a_{13} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{23} = 0$).

C) Пусть $a_{31} \neq 0$. Исключим x_1 из системы (1):

$$\begin{cases} -\left[(D-a_{11})\dfrac{a_{32}}{a_{31}}+a_{12}\right]x_2 + \\ +\left[(D-a_{11})\dfrac{1}{a_{31}}(D-a_{33})-a_{13}\right]x_3 = 0, & (14) \\ \left[(D-a_{22})+\dfrac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}\right]x_2 - \\ \qquad -\left[\dfrac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})+a_{23}\right]x_3 = 0. & (15) \end{cases}$$

После сложения (14) и (15) будет уравнение

$$\left[(D-a_{11})\frac{a_{32}}{a_{31}}+(D-a_{22})+\frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}}+a_{12}\right]x_2 - \\ -\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})+\frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})- \\ -a_{13}+a_{23}\right]x_3 = 0. \qquad (16)$$

1. Пусть $a_{31} = -a_{32} \neq 0$. Из уравнений (14), (16) выводится уравнение для искомой функции x_3:

$$[-(D-a_{11})+a_{12}]\frac{1}{a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}}\times \\ \times\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})+\frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})- \\ -a_{13}+a_{23}\right]x_3 - \\ -\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})-a_{13}\right]x_3 = 0 \qquad (17)$$

($a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22} \neq 0$, $a_{31} = -a_{32} \neq 0$).

2. Пусть $a_{32} = 0$. Из равенств (14), (15) выводится уравнение относительно искомой функции x_3:

$$(D-a_{22})\frac{1}{a_{12}}\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})-a_{13}\right]x_3 - \\ -\left[\frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})+a_{23}\right]x_3 = 0 \qquad (18)$$

($a_{12} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{32} = 0$).

3. Пусть $a_{21} = 0$. Тогда из уравнений (14), (15) следует линейное уравнение третьего порядка относительно искомой функции x_2:

$$\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})-a_{13}\right]\frac{1}{a_{23}}(D-a_{22})x_2 - \\ -\left[(D-a_{11})\frac{a_{32}}{a_{31}}+a_{12}\right]x_2 = 0 \qquad (19)$$

($a_{23} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{21} = 0$).

D) Пусть коэффициенты системы (1) не удовлетворяют ограничениям уравнений, выведенных в пп. A, B, C.

Авторами разработан общий метод решения таких систем, который может быть применен и в некоторых ранее рассмотренных случаях.

В пункте B после исключения x_3 из системы (1) были получены уравнения (8) и (9). После некоторых преобразований они соответственно имеют вид

$$\begin{cases} \left[(D-a_{33})\dfrac{1}{a_{13}}(D-a_{11})-a_{31}\right]x_1 - \\ \quad -\dfrac{a_{12}}{a_{13}}\left[D+\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{13}}\right)' - \right. \\ \qquad \left. -a_{33}+\dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}\right]x_2 = 0, & (20) \\ -\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1 + \\ \quad +\left[D-\left(a_{22}-\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right)\right]x_2 = 0. & (21) \end{cases}$$

Если $a = -\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{13}}\right)' + a_{33} - \dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}$, $b = a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$, то система примет укороченный вид:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\dfrac{1}{a_{13}}(D-a_{11})- \right. \\ \qquad \left. -a_{31}\right]x_1 - (D-a)x_2 = 0, & (22) \\ -\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1 + \\ \qquad +(D-b)x_2 = 0. & (23) \end{cases}$$

Заметим: 1) $(D-a)x_2 = e^u De^{-u}x_2$, где $u = \int a\,dt$; если $e^{-u}x_2 = z(t)$, то $(D-a)x_2 = e^u Dz$; 2) $(D-b)x_2 = (D-b)e^u e^{-u}x_2 = e^u(D-b+u')e^{-u}x_2 = e^u(D-c)z$, где $c = b-u'$.

С учетом замечаний и умножения обоих уравнений системы на e^{-u} получим систему уравнений относительно функций $x_1(t)$ и $z(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\dfrac{1}{a_{13}}(D-a_{11})- \right. \\ \qquad \left. -a_{31}\right]x_1 - Dz = 0, & (24) \\ -e^{-u}\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1 + \\ \qquad +(D-c)z = 0. & (25) \end{cases}$$

Применим к первому уравнению системы оператор $D-c-c'D^{-1}$, ко второму — оператор D.

Сложением обоих уравнений получим уравнение относительно искомой функции x_1:

$$(D-c-c'D^{-1})\frac{a_{13}}{a_{12}}e^{-u}\times$$
$$\times\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D-a_{11})-a_{31}\right]x_1-$$
$$-De^{-u}\left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1=0 \qquad (26)$$
$$(a_{12}\neq 0,\ a_{13}\neq 0),$$

где $c=b-a$, $b=a_{22}-\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$, $a=\dfrac{a'_{13}}{a_{13}}-\dfrac{a'_{12}}{a_{12}}+$ $+a_{33}-\dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}$, $u=\int a\,dt$.

Уравнение (26) будет линейным уравнением четвертого порядка в общем случае; если $c=\text{const}$, то – третьего порядка.

Приведем условия факторизации линейного уравнения четвертого порядка

$$x^{(4)}(t)+a_1(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+$$
$$+a_3(t)x'(t)+a_4(t)x(t)=f(t), \qquad (27)$$

то есть представления его в виде

$$[D-u'(t)][D-v'(t)][D-w'(t)]\times$$
$$\times[D-\gamma'(t)]x(t)=f(t). \qquad (28)$$

Применяя метод факторизации уравнения третьего порядка [3], получим систему, которой удовлетворяют $u'(t)$, $v'(t)$, $w'(t)$, $\gamma'(t)$ в уравнении (28):

$$\begin{cases}\gamma'+s_1=-a_1,\\ -3\gamma''+s_1\gamma'+s_2=a_2,\\ -3\gamma'''+2s_1\gamma''-s_2\gamma'+s_3=a_3,\\ -\gamma^{(4)}+s_1\gamma'''-s_2\gamma''-s_3\gamma'=a_4,\end{cases} \qquad (29)$$

где $s_1=u'+v'+w'$, $s_2=u'v'+u'w'+v'w'-v''-$ $-2w''$, $s_3=u'w''+v'w''+w'v''-u'v'w'-w'''$, a_i – коэффициенты уравнения (27). (Аргумент t в (29) опущен.)

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}x'_1=-\dfrac{1}{t}x_2+\dfrac{1}{t}x_3,\\ x'_2=\dfrac{1}{t}x_1-\dfrac{3}{t}x_2+\dfrac{2}{t}x_3,\\ x'_3=-\dfrac{1}{t}x_1+\dfrac{1}{t}x_2.\end{cases}$$

Решение. Для применения в формуле (26) вычислим: $a=1/t$, $b=-1/t$, $c=-2/t$, $u=\ln t$.

Получим $\left(D+\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}D^{-1}\right)\dfrac{1}{t}\left(DtD+\dfrac{1}{t}\right)x_1+$ $+D\dfrac{1}{t}\left(2D+\dfrac{1}{t}\right)x_1=0$. После применения оператора D получим уравнение

$$x'''_1+\frac{5x''_1}{t}+\frac{x'_1}{t^2}-\frac{2x_1}{t^3}-\frac{2}{t^2}D^{-1}\left(\frac{1}{t}x'_1+x''_1+\frac{x_1}{t^2}\right)=0.$$

Умножая его на t^2 и применяя к полученному уравнению оператор D, приходим к уравнению

$$x_1^{(4)}+\frac{7}{t}x'''_1+\frac{4}{t^2}x''_1-\frac{4}{t^3}x'_1=0.$$

Для записи уравнения по форме (28), применяя систему (29), находим $u'=-\dfrac{1}{t}$, $v'=-\dfrac{2}{t}$, $w'=-\dfrac{4}{t}$, $\gamma'=0$. Решением операторного уравнения

$$\left(D+\frac{1}{t}\right)\left(D+\frac{2}{t}\right)\left(D+\frac{4}{t}\right)Dx_1=0.$$

будет функция $x_1=C_1t^2+C_2\ln t+\dfrac{C_3}{t^3}+C_4$. Функции x_2 и x_3 примут вид $x_2=C_5t^2+C_6\ln t+\dfrac{C_7}{t^3}+$ $+C_8$, $x_3=C_9t^2+C_{10}\ln t+\dfrac{C_{11}}{t^3}+C_{12}$. После подстановки функций x_1, x_2, x_3 в систему определим связи между C_i, $i=\overline{1;12}$: $C_1=C_5=C_9=0$, $C_2=C_6=C_{10}$, $C_7=2{,}5C_3$, $C_8=C_2+C_4$, $C_{11}=-0{,}5C_3$, $C_{12}=2C_2+C_4$. Таким образом, система функций

$$\begin{cases}x_1=C_2\ln t+\dfrac{C_3}{t^3}+C_4,\\ x_2=C_2\ln t+\dfrac{2{,}5C_3}{t^3}+C_2+C_4,\\ x_3=C_2\ln t-\dfrac{0{,}5C_3}{t^3}+2C_2+C_4\end{cases}$$

является общим решением системы.

Замечание. Система (1) может быть решена подстановкой в нее найденной функции

$$x_1=\varphi_1(t,C_1,C_2,C_3,C_4).$$

Функции

$x_2=\varphi_2(t,C_1,C_2,C_3,C_4)$, $x_3=\varphi_3(t,C_1,C_2,C_3,C_4)$ получаются как решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными функциями x_2 и x_3. После подстановки x_1, x_2, x_3 в систему (1) общее решение системы (1) будет содержать только три постоянные из C_1, C_2, C_3, C_4.

2. Неоднородные системы. Система

$$\begin{cases}x'_1(t)=a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)+\\ \qquad\qquad +a_{13}(t)x_3(t)+f_1(t),\\ x'_2(t)=a_{21}(t)x_1(t)+a_{22}(t)x_2(t)+\\ \qquad\qquad +a_{23}(t)x_3(t)+f_2(t),\\ x'_3(t)=a_{31}(t)x_1(t)+a_{32}(t)x_2(t)+\\ \qquad\qquad +a_{33}(t)x_3(t)+f_3(t)\end{cases}$$

с непрерывными и дифференцируемыми функциями $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ в некоторой области с помощью оператора $D = d / dt$ приводится к виду

$$\begin{cases} (D-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 = f_1, \\ -a_{21}x_1 + (D-a_{22})x_2 - a_{23}x_3 = f_2, \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (D-a_{33})x_3 = f_3. \end{cases} \quad (30)$$

I. Пусть $a_{12} \neq 0$. По аналогии выполняя преобразования пункта А для неоднородной системы (30), выводятся линейные неоднородные дифференциальные уравнения третьего порядка для искомых функций. В этом пункте можно получить три уравнения с некоторыми дополнительными ограничениями.

1. Пусть $a_{12} = a_{13} \neq 0$. Выведем уравнение для искомой функции x_1:

$$\left[(D-a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D-a_{11}) - a_{21}\right]x_1 - \\ -[(D-a_{22})+a_{23}]\frac{1}{a_{33}-a_{32}+a_{23}-a_{22}} \times \\ \times\left\{\left[(D-a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D-a_{11}) - \frac{a_{32}}{a_{12}}(D-a_{11}) - \right.\right. \\ \left.\left. -a_{21}-a_{31}\right]x_1 - (D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} + \frac{a_{32}}{a_{12}}f_1 - \\ \left. -f_2 - f_3\right\} = (D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} + f_2 \quad (31)$$

($a_{33} - a_{32} + a_{23} - a_{22} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} \neq 0$).

2. Пусть $a_{13} = 0$. В этом случае выведем уравнение также для первой искомой функции:

$$(D-a_{33})\frac{1}{a_{23}}\left\{\left[(D-a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D-a_{11}) - a_{21}\right]x_1 - \right. \\ \left. -(D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} - f_2\right\} - \left[\frac{a_{32}}{a_{12}}(D-a_{11}) + a_{31}\right]x_1 = \\ = f_3 - \frac{a_{32}}{a_{12}}f_1 \quad (32)$$

($a_{12} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{13} = 0$).

3. Пусть $a_{32} = 0$. Получим уравнение для функции x_3:

$$\left[(D-a_{22})\frac{1}{a_{12}}(D-a_{11}) - a_{21}\right]\frac{1}{a_{31}}[(D-a_{33})x_3 - \\ -f_3] - \left[(D-a_{22})\frac{a_{13}}{a_{12}} + a_{23}\right]x_3 = \\ = (D-a_{22})\frac{f_1}{a_{12}} + f_2 \quad (33)$$

($a_{12} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{32} = 0$).

II. Считая $a_{13} \neq 0$, можно исключить x_3 из системы (30). Выведем еще три уравнения для искомых функций.

4. Пусть $a_{12} = a_{13} \neq 0$. Получим уравнение для искомой функции x_1:

$$\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D-a_{11}) - a_{31}\right]x_1 - \\ -[(D-a_{33})+a_{32}]\frac{1}{a_{22}-a_{23}-a_{33}+a_{32}} \times \\ \times\left\{\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D-a_{11}) - a_{31} - \frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11}) - \right.\right. \\ \left. -a_{21}\right]x_1 - (D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}} - f_3 + \\ \left. + \frac{a_{23}}{a_{13}}f_1 - f_2\right\} = (D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}} + f_3 \quad (34)$$

($a_{22} - a_{23} - a_{33} + a_{32} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} \neq 0$).

5. Пусть $a_{12} = 0$. Выведем уравнение для вычисления искомой функции x_1:

$$\left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11}) + a_{21}\right]x_1 - (D-a_{22})\frac{1}{a_{32}} \times \\ \times\left\{\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D-a_{11}) - a_{31}\right]x_1 - \right. \\ \left. -(D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}} - f_3\right\} = \frac{a_{23}}{a_{13}}f_1 - f_2 \quad (35)$$

($a_{13} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$, $a_{12} = 0$).

6. Пусть $a_{23} = 0$. Выведем уравнение для нахождения искомой функции x_2:

$$\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D-a_{11}) - a_{31}\right]\frac{1}{a_{21}} \times \\ \times[(D-a_{22})x_2 - f_2] - \left[(D-a_{33})\frac{a_{12}}{a_{13}} + a_{32}\right]x_2 = \\ = (D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}} + f_3 \quad (36)$$

($a_{13} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{23} = 0$).

III. Считая $a_{31} \neq 0$, исключим x_1 из системы (30). По аналогии с предыдущими пунктами получим еще три уравнения для вычисления искомых функций.

7. Пусть $a_{31} = a_{32} \neq 0$. Выведем линейное уравнение третьего порядка относительно x_3:

$$-[(D-a_{11})+a_{12}]\frac{1}{a_{21}-a_{22}+a_{11}-a_{12}} \times \\ \times\left\{-\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33}) - \frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33}) - \right.\right. \\ \left. -a_{13}-a_{23}\right]x_3 + (D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}} - \frac{a_{21}}{a_{31}}f_3 + \\ \left. + f_1 + f_2\right\} + \left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33}) - a_{13}\right]x_3 = \\ = (D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}} + f_1 \quad (37)$$

($a_{21} - a_{22} + a_{11} - a_{12} \neq 0$, $a_{31} = a_{32} \neq 0$).

8. Пусть $a_{32}=0$. Получим уравнение относительно искомой функции x_3:

$$(D-a_{22})\frac{1}{a_{12}}\left\{\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})-a_{13}\right]x_3-\right.$$
$$\left.-(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}-f_1\right\}-\left[\frac{a_{21}}{a_{31}}(D-a_{33})+a_{23}\right]x_3=$$
$$=f_2-\frac{a_{21}}{a_{31}}f_3 \qquad (38)$$

($a_{12}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$, $a_{32}=0$).

9. Пусть $a_{21}=0$. Выведем уравнение относительно искомой функции x_2:

$$-\left[(D-a_{11})\frac{a_{32}}{a_{31}}+a_{12}\right]x_2+$$
$$+\left[(D-a_{11})\frac{1}{a_{31}}(D-a_{33})-a_{13}\right]\frac{1}{a_{23}}\times$$
$$\times[(D-a_{22})x_2-f_2]=(D-a_{11})\frac{f_3}{a_{31}}+f_1 \qquad (39)$$

($a_{23}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$, $a_{21}=0$).

IV. Пусть коэффициенты системы не удовлетворяют условиям ни одного из рассмотренных 9 случаев.

Исследуя общий случай, выведем уравнения относительно каждой искомой функции системы (30).

Для вывода уравнения относительно x_1 преобразуем систему, получаемую из (30) исключением функции x_3:

$$\begin{cases}\left[(D-a_{33})\dfrac{1}{a_{13}}(D-a_{11})-a_{31}\right]x_1-\\ \quad -\left[(D-a_{33})\dfrac{a_{12}}{a_{13}}+a_{32}\right]x_2=\\ \qquad =(D-a_{33})\dfrac{f_1}{a_{13}}+f_3, \qquad (40)\\ -\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1+\left[\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}+\right.\\ \qquad \left.+(D-a_{22})\right]x_2=f_2-\dfrac{a_{23}}{a_{13}}f_1. \qquad (41)\end{cases}$$

Система примет следующий вид:

$$\begin{cases}\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\dfrac{1}{a_{13}}(D-a_{11})-a_{31}\right]x_1-(D-a)x_2=\\ \qquad =\dfrac{a_{13}}{a_{12}}(D-a_{33})\dfrac{f_1}{a_{13}}+\dfrac{a_{13}}{a_{12}}f_3,\\ -\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1+(D-b)x_2=f_2-\dfrac{a_{23}}{a_{13}}f_1,\end{cases}$$

где $a=-\dfrac{a_{13}}{a_{12}}\left(\dfrac{a_{12}}{a_{13}}\right)'+a_{33}-\dfrac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}$, $b=a_{22}-\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$, $a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$.

Пусть $(D-a)x_2=e^{u}De^{-u}x_2=e^{u}Dz$, $u=\int a\,dt$, $z=e^{-u}x_2$; $(D-b)x_2=(D-b)e^{u}e^{-u}x_2=(D-b)\times\times e^{u}z=e^{u}(D-b+u')z=e^{u}(D-c)z$, $c=b-u'=b-a$. Тогда последняя система будет иметь вид

$$\begin{cases}\dfrac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\dfrac{1}{a_{13}}(D-a_{11})-a_{31}\right]x_1-Dz=\\ \qquad =\dfrac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}(D-a_{33})\dfrac{f_1}{a_{13}}+\dfrac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}f_3,\\ -e^{-u}\left[\dfrac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]x_1+(D-c)z=\\ \qquad =e^{-u}f_2-\dfrac{a_{23}e^{-u}}{a_{13}}f_1.\end{cases}$$

Применим к первому уравнению системы оператор $D-c-c'D^{-1}$, ко второму уравнению – оператор D, сложим полученные уравнения. Заметим, что $(D-c-c'D^{-1})Dz=D(D-c)z$. Тогда

$$\left\{(D-c-c'D^{-1})\frac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{13}}(D-a_{11})-\right.\right.$$
$$\left.\left.-a_{31}\right]-De^{-u}\left[\frac{a_{23}}{a_{13}}(D-a_{11})+a_{21}\right]\right\}x_1=$$
$$=(D-c-c'D^{-1})\frac{a_{13}e^{-u}}{a_{12}}\left[(D-a_{33})\frac{f_1}{a_{13}}+f_3\right]+$$
$$+De^{-u}\left(f_2-\frac{a_{23}}{a_{13}}f_1\right) \qquad (42)$$

($a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$).

В общем случае уравнение (42) является линейным уравнением четвертого порядка относительно искомой функции x_1. В случае $c=\mathrm{const}$ оно будет уравнением третьего порядка.

По аналогии с уравнением (42) выводится уравнение относительно функции x_2:

$$\left\{(D-c-c'D^{-1})\frac{a_{23}e^{-u}}{a_{21}}\left[(D-a_{33})\frac{1}{a_{23}}(D-a_{22})-\right.\right.$$
$$\left.\left.-a_{32}\right]-De^{-u}\left[\frac{a_{13}}{a_{23}}(D-a_{22})+a_{12}\right]\right\}x_2=$$
$$=(D-c-c'D^{-1})\frac{a_{23}e^{-u}}{a_{21}}\left[(D-a_{33})\frac{f_2}{a_{23}}+f_3\right]+$$
$$+De^{-u}\left(f_1-\frac{a_{13}}{a_{23}}f_2\right) \qquad (43)$$

($a_{21}\neq 0$, $a_{23}\neq 0$,

$c=a_{11}-\dfrac{a_{13}a_{21}}{a_{23}}+\dfrac{a_{21}'}{a_{21}}-\dfrac{a_{23}'}{a_{23}}+\dfrac{a_{23}a_{31}}{a_{21}}-a_{33}$,

$$u = \int \left(\frac{a'_{23}}{a_{23}} - \frac{a'_{21}}{a_{21}} + a_{33} - \frac{a_{23}a_{31}}{a_{21}} \right) dt \text{).}$$

Уравнение для искомой функции x_3 имеет следующий вид:

$$\Bigg\{ (D - c - c'D^{-1}) \frac{a_{31}e^{-u}}{a_{32}} \times$$
$$\times \left[(D - a_{11}) \frac{1}{a_{31}} (D - a_{33}) - a_{13} \right] -$$
$$- De^{-u} \left[\frac{a_{21}}{a_{31}} (D - a_{33}) + a_{23} \right] \Bigg\} x_3 =$$
$$= (D - c - c'D^{-1}) \frac{a_{31}e^{-u}}{a_{32}} \left[(D - a_{11}) \frac{f_3}{a_{31}} + f_1 \right] +$$
$$+ De^{-u} \left(f_2 - \frac{a_{21}}{a_{31}} f_3 \right) \qquad (44)$$

$$(a_{31} \neq 0, \quad a_{32} \neq 0,$$
$$c = a_{22} - \frac{a_{21}a_{32}}{a_{31}} + \frac{a'_{32}}{a_{32}} - \frac{a'_{31}}{a_{31}} + \frac{a_{12}a_{31}}{a_{32}} - a_{11},$$
$$u = \int \left(\frac{a'_{31}}{a_{31}} - \frac{a'_{32}}{a_{32}} + a_{11} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{32}} \right) dt \text{).}$$

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2/t + x_3/t + t, \\ x'_2 = x_1/t - 3x_2/t + 4x_3/t - t, \\ x'_3 = x_1/t + x_2/t. \end{cases}$$

Решение. По формулам (42), (43), (44) вычислим искомые функции x_1, x_2, x_3, имеющие в общей сложности 12 произвольных постоянных. Подставляя их в систему, найдем связи между ними (см. пример 2), причем из них останутся три нужные произвольные постоянные.

Сначала найдем одну из трех искомых функций с четырьмя произвольными постоянными. Подставив найденную функцию в систему, решим систему из двух уравнений с двумя неизвестными функциями. Найдем все три функции с одними и теми же постоянными C_1, C_2, C_3, C_4, связи между которыми будут определены после подстановки функций в начальную систему.

По формуле (43) составим дифференциальное уравнение для искомой функции x_2. Вычислим $c = 15/(4t)$, $u = -4\ln t$. После раскрытия операторов получим уравнение $x_2^{(4)} + \frac{12}{t}x'''_2 + \frac{30}{t^2}x''_2 = \frac{15}{t^2}$ или $\left(D^4 + \frac{12}{t}D^3 + \frac{30}{t^2}D^2\right)x_2 = \frac{15}{t^2}$. Пусть оно факторизуется, то есть имеет вид

$$(D - u')(D - v')(D - w')(D - \gamma')x_2 = \frac{15}{t^2}.$$

По системе (29) находим, что решением уравнения являются $u' = -6/t$, $v' = -6/t$, $w' = 0$, $\gamma' = 0$. Тогда $\left(D + \frac{6}{t}\right)\left(D + \frac{6}{t}\right)DDx_2 = \frac{15}{t^2}$. Общее решение составленного уравнения примет вид $x_2 = \frac{t^2}{4} + \frac{C_1}{t^3} + \frac{C_2}{t^4} + C_3t + C_4$. После подстановки его в систему получим уравнение для x_3: $\left(D + \frac{4}{t}\right)x_3 = \frac{5}{2}t + \frac{C_1}{t^4} + 5C_3 + 4\frac{C_4}{t}$. Решая операторным методом, получим $x_3 = \frac{5}{12}t^2 + \frac{C_1}{t^3} + C_3t + {}$ $+C_4$. Тогда $x_1 = \frac{7}{12}t^2 - \frac{4C_1}{t^3} - \frac{C_2}{t^4} - C_4$. После подстановки в начальную систему выясняем, что x_1, x_2, x_3 составляют общее решение, если $C_1 = 0$ во всех найденных функциях.

Ответ: общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{12}t^2 + \frac{C_2}{3t^4} - C_4, \\ x_2 = \frac{t^2}{4} + \frac{C_2}{t^4} + C_3t - C_4, \\ x_3 = \frac{5}{12}t^2 - \frac{C_2}{3t^4} + C_3t - C_4. \end{cases}$$

Вывод. Предложенный метод позволяет решать системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами более высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малышев Ю.В., Атаманов П.С.** Факторизованные операторы и системы дифференциальных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2011. – № 16. – С. 54–61.
2. **Малышев Ю.В., Атаманов П.С.** О решении системы линейных дифференциальных уравнений операторным методом // Вестник Чувашского университета. – 2011. – № 3. – С. 155–159.
3. **Малышев Ю.В., Атаманов П.С.** Интегрирование дифференциальных уравнений операторным методом. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2011. – 176 с.

Малышев Юрий Валентинович, д. ф.-м. н., профессор кафедры высшей математики Казанского государственного технологического университета
420015, г. Казань, ул. К.Маркса, д.68,
тел.: +7(843)272-67-98, e-mail: office@kstu.ru