УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОПОДОБНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ

Е.В. Лисовский
Калужский филиал МГТУ имени Н.Э. Баумана

CONSTRUCTION OF EQUATIONS OF THE PROGRAMMED MOTION AND ANALYSIS OF STABILITY-LIKE PROPERTIES OF DECISIONS

E.V. Lisovsky

Рассмотрено построение уравнений программного движения для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Изучены качественные свойства программного движения систем с распределенными параметрами. На основе применения функционалов Ляпунова получены достаточные условия устойчивости.

Ключевые слова: системы с распределенными параметрами, программное движение, устойчивость, притяжение, асимптотическая устойчивость.

Construction of the equations of the programmed motion for systems with lumped and distributed parameters is considered. Qualitative properties of the programmed motion of systems with the distributed parameters are studied. On the basis of application of Lyapunov functional obtained sufficient stability conditions are obtained.

Keywords: systems with distributed parameters, programmed motion, stability, attraction, asymptotical stability.

Введение

В статье рассмотрены вопросы построения программного движения некоторых классов динамических систем и нахождение условий, гарантирующих устойчивость этого движения.

Основополагающие результаты по построению систем программного движения, анализу их устойчивости получены в работах [1, 2].

В фундаментальной монографии А.А. Шестакова [3] представлены систематизированные результаты по обобщенному прямому методу А.М. Ляпунова исследования устойчивоподобных систем с распределенными параметрами, являющемуся обобщением, унификацией и развитием классического прямого метода. В указанной монографии разработан метод моделирования распределенных систем, описываемых уравнениями с частными производными или интегро-дифференциальными уравнениями (называемыми формальными уравнениями), с помощью абстрактных динамических систем на бесконечномерном фазовом пространстве, а также разработан подход, основанный на конструкциях полудинамических (динамических) систем (однопараметрических семейств преобразований фазового пространства в себя) и полудинамических (динамических) процессов (двухпараметрических семейств преобразований фазового пространства в себя).

Для систем с сосредоточенными параметрами результаты развития прямого метода Ляпунова представлены в [4, 5]. Некоторые вопросы устойчивости систем с распределенными параметрами рассмотрены в [6–11].

В разделе 1 настоящей работы приведены вспомогательные сведения из математической теории построения систем программного движения, используемые в последующих параграфах.

В разделе 2 найдено семейство операторов $\{\omega(t)\}_{t\in R^+}$ отображающих банахово пространство X в X, для которых дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{dt}=f(t)x$ допускает частный интеграл $\omega(t)x=0$, где $x(t)$ – решение дифференциального уравнения, вектор-функция $\omega(t)$ удовлетворяет определенным условиям.

В разделе 3 с помощью функционалов Ляпунова получены условия, гарантирующие устойчивость и асимптотическую устойчивость программного движения.

1. Вспомогательные сведения

Движения систем с сосредоточенными параметрами описываются уравнениями вида

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in R^n, \tag{1}$$

где $x=(x_1,...,x_n)'$ – вектор состояния системы, $f=(f_1,...,f_n)'$ – заданная функция и штрих означает транспонирование.

В теории управления важна задача построения систем уравнений с заранее заданными свойствами. Эти свойства зададим, например, уравнениями вида

$$\omega(t, x) = 0 \ , \tag{2}$$

где $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)'$ – вектор-функция, $m \le n$. Задача состоит в построении уравнения (1), то есть в определении функции $f(t,x)$, которая имеет следующие свойства:

$$\omega(t_0, x_0) = 0, \ \forall (t_0, x_0) \Rightarrow \omega(t, x(t)) = 0, \tag{3}$$

где $x(t)$ – решение уравнения (1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$. Таким образом, для осуществления движения, удовлетворяющего равенству (2), необходимо выполнение этого равенства для некоторого момента t_0 и для некоторой точки x_0. Так как это требование неосуществимо в связи с наличием возмущений, то корректно говорить лишь о приближенном выполнении равенства (2). В связи с этим приобретает большое значение исследование устойчивости решения уравнения (1). Соотношение (2) принято называть программой, а движение системы, удовлетворяющее этой программе, – программным движением системы [1, 2].

Построение уравнения программного движения состоит в следующем:

1) построить уравнение (1), решение $x(t)$ которого удовлетворяет программе (2), если она выполнена для некоторой пары $(t_0, x(t_0))$,

2) установить условия, гарантирующие устойчивость решений уравнения (1).

Будем полагать, что $x \in G$ – область R^n, $\omega \in C^1(R^n \times G, R^m)$, $R^+ = [0, +\infty)$. Кроме этого, выполнено условие:

$$\operatorname{rang} \frac{\partial \omega}{\partial x} = m \ \text{на} \ R^+ \times G . \tag{4}$$

Тогда $f(t,x)$ определяется из уравнения

$$\omega_x f(t,x) + \omega_t = F(\omega, x, t), \tag{5}$$

где $\omega_x = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}, \ \omega_t = \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$, а вектор-функция $F = (F_1, ..., F_m)'$ удовлетворяет условиям:

1) $F(0, x, t) \equiv 0$,

2) задача $\dot{\omega} = F(\omega, x, t), \ \omega(0) = 0$ имеет единственное нулевое решение $\omega = 0$ при любой функции

$$x(t) \in C^1(R^+, G). \tag{6}$$

Функция $f(t,x)$ представлена в виде $f = k(t,x) f^{\tau} + f^{\nu}$, где $k(t,x)$ – произвольная скалярная непрерывная функция;

$$f_l^{\tau} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \\ c_{m+1,1} & \cdots & c_{m+1,i} & \cdots & c_{m+1,n} \\ \vdots & & & & \\ c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,i} & \cdots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где $a_{ij} = \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j}, i = 1,...,m, \ j = 1,...,n, \ A^+ = A'(AA')^{-1}$ – псевдообратная к A матрица, $c_{kj} = c_{kj}(t,x)$ – произвольные непрерывные функции, $k = m+1, \ldots, n-1$.

Применяя (7), получаем равенство

$$f(t,x) = k(t,x)[\omega_x C] + \omega_x^+ (F(\omega, x, t) - \omega_t), \tag{8}$$

дающее искомое решение.

Так как $f(t,x)$ определяется неоднозначно, то можно доопределить ее так, чтобы рассматриваемое движение было устойчивым.

Уравнение (2) при условиях, наложенных на $\omega(t, x)$, определяет некоторое семейство $\{\Omega(t)\}_{t \in R^+}$ многообразий $\Omega(t), \ t \in R^+$. Можно сказать, что многообразие $\Omega(0)$ деформируется в зависимости от времени, при этом размерность его не меняется и равна m. Если $\omega = \omega(x)$, то многообразие $\Omega = \Omega(0)$ не деформируется и точка, движение которой определяется уравнением (1) с правой частью, определяемой (8), не покидает этого многообразия, если она принадлежала ему при $t = t_0$. Поэтому свойство устойчивости можно описать следующим образом: если расстояние от точки до многообразия мало в некоторый момент времени, то в дальнейшем это расстояние также будет малым.

Семейство $\{\Omega(t)\}_{t \in R^+}$ многообразий $\Omega(t)$, $t \in R^+$, определенное уравнением (2), назовем программным многообразием. Программное многообразие $\{\Omega(t)\}_{t \in R^+}$ уравнения (1) называется устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0, \ t_0 \ge 0 \ \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\rho(x_0, \Omega(t_0)) < \delta$ следует $\rho(x(t), \Omega(t)) < \varepsilon$ при любом $t > t_0$, где $x(t)$ – решение уравнения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Здесь и далее $\rho(x, \Omega)$ означает расстояние от точки x до множества Ω, равное $\rho(x, \Omega) = \inf\limits_{y \in \Omega} \|x - y\|$.

Программное многообразие $\{\Omega(t)\}_{t \in R^+}$ асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и

$\forall t_0 \geq 0\ \exists\Delta(t_0) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \Delta$ вытекает, что $\rho(x(t), \Omega(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Программу (2) назовем устойчивой, если $\forall\varepsilon > 0, t_0 \geq 0\ \exists\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из неравенства $\|\omega(t_0, x_0)\| < \delta$ вытекает неравенство $\|\omega(t, x(t))\| < \varepsilon,\ \forall t \geq t_0$.

Программу (2) назовем асимптотически устойчивой, если она устойчива и $\forall t \geq 0\ \exists\Delta(t_0) > 0$ такое, что из неравенства $\|\omega(t_0, x_0)\| < \Delta$ вытекает, что $\|\omega(t, x(t))\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x),\ \dot{\omega} = F(\omega, t, x), \tag{9}$$

где $f(t,x)$ удовлетворяет (8), а F – условию (6). Система (9) является неавтономной системой уравнений относительно переменных x и ω, где $x \in R^n$, $\omega \in R^m$.

Рассмотрим множество

$$M = \{(x, \omega) : \omega = 0\}. \tag{10}$$

Множество (10) инвариантно относительно (9), а его устойчивость (асимптотическая устойчивость) равносильна устойчивости (асимптотической устойчивости) программы (2).

Пусть $\omega = \omega(x)$, то есть программа не зависит от t, и множество Ω имеет компактную окрестность $\Omega_h = \{x \in G : \rho(x,\Omega) \leq h\},\ h > 0$. Тогда устойчивость (соответственно асимптотическая устойчивость) программы (2) равносильна устойчивости (соответственно асимптотической устойчивости) программного многообразия Ω. Действительно, определим функции

$$b(r) = \begin{cases} 0, \text{при } r = 0, \\ \min\{\|\omega(x)\| : x \in \partial\Omega_r\}, 0 < r \leq h, \end{cases} \tag{11}$$

$$a(r) = \varphi(r) \min_{r \leq s \leq h} b(s), \tag{12}$$

где $\varphi \in K$ и $\varphi(r) \leq 1$, $\partial\Omega_r$ – граница множества Ω_r. Тогда $a \in K$ и справедлива оценка

$$a(\rho(x, \Omega)) \leq \|\omega(x)\|. \tag{13}$$

Из гладкости функции $\omega(x)$ и из компактности множества Ω_r следует, что выполнено неравенство $\|\omega(x)\| = \|\omega(x) - \omega(y)\| \leq L\rho(x, y)$.

Поэтому имеем

$$\|\omega(x)\| \leq L\rho(x, \Omega), \tag{14}$$

где L – постоянная Липшица.

Неравенства (13) и (14) устанавливают эквивалентность устойчивости программы и программного многообразия.

Если программа ω зависит от времени t, то необходимо требовать выполнение неравенства $a(\rho(x,\Omega(t))) \leq \|\omega(t,x)\|$.

2. Построение уравнений программного движения

Рассмотрим банаховы пространства X, Y над полем R и семейство $\{\Omega(t)\}_{t \in R^+}$ операторов $\omega(t)$, отображающих X в Y и удовлетворяющих условиям: 1) отображение $t \to \omega(t)x$ при каждом фиксированном $x \in X$ принадлежит множеству $C^1(R^+, Y)$ непрерывно-дифференцируемых абстрактных функций со значениями в Y; производную этого отображения будем обозначать символом $\omega_t(t)x$; 2) операторы $\omega(t)$, $t \in R^+$, дифференцируемы по Фреше; производную Фреше оператора $\omega(t)$ обозначим через $\omega_x(t)$.

Предположим, что семейство $\{\Omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ множеств $\Omega(t) \subset X, t \in R^+$, определяемых уравнением

$$\omega(t) = 0, \tag{15}$$

состоит из непустых и связных множеств. Поставим задачу: построить семейство $\{f(t)\}_{t \in R^+}$ таких операторов $f(t)$, $t \in R^+$, отображающих X в X, для которых дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\,x \tag{16}$$

допускает частный интеграл (15) в следующем смысле: выполнение условия $\omega(t_0)x_0 = 0$ при $t_0 \in R^+$, $x_0 \in X$ влечет равенство $\omega(t)x(t) = 0$ для любого $t \geq t_0$, где $x(t)$ – решение уравнения (16) с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Теорема 1. Операторы $f(t)$, $t \in R^+$, удовлетворяющие уравнению

$$(\omega_x(t)x) f(t)x = F(t)(x, \omega(t)x) - \omega_t(t)x, \tag{17}$$

решают поставленную задачу. Здесь $F(t): X \times Y \to Y$ при каждом $t \in R^+$ удовлетворяет условиям: а) $F(t)(x,0) \equiv 0$; б) задача Коши $\dot{\omega} = F(t)(x(t),\omega), \omega(t_0) = 0,\ \ \forall t_0 \in R^+,\ \ \forall x(t) \in C^1(R^+, X)$ имеет единственное нулевое решение $\omega = 0$.

Доказательство. Покажем, что дифференциальное уравнение (16) с правой частью $f(t)$, удовлетворяющей уравнению (17), действительно имеет частный интеграл (15). Пусть $x = x(t)$ – решение уравнения (16) с начальным условием

$x(t_0)=x_0$, удовлетворяющее равенству $\omega(t_0)x_0 = 0$. Положим, $\tilde{\omega}(t)=\omega(t)x(t)$. В силу соотношения (17) функция $\tilde{\omega}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\tilde{\omega}} = F(t)(x(t),\, \tilde{\omega}(t))$ с начальным условием $\tilde{\omega}(t_0)=0$. Тогда из условий а) и б), наложенных на операторы $F(t)$, получаем тождество $\tilde{\omega}(t)\equiv 0$. Из этого тождества и следует $\omega(t)x(t)\equiv 0\ \forall t\geq t_0$.

Рассмотрим уравнение (17) с точки зрения разрешимости относительно $f(t)$. Заметим, что при фиксированных $(t,x)\in R^+\times X$ уравнение (17) представляет линейное уравнение

$$Af=b \tag{18}$$

с ограниченным линейным оператором $A: X\to Y$, где $A=\omega_x(t)x$, $b=F(t)(x,\omega(t)x)-\omega_t(t)x$. Для разрешимости уравнения (18) при всяком $b\in Y$ в конечномерных пространствах, когда $X=R^n$, $Y=R^m$, $n\geq m$, необходимо и достаточно, чтобы ранг оператора A был максимальным, то есть $\operatorname{rang} A=m$, что эквивалентно требованию: A является отображением «на». В общем случае, если оператор A является отображением «на», то очевидно, что уравнение (18) разрешимо, то есть существует хотя бы одно решение $f\in X$ такое, что $Af=b$ при каждом $b\in Y$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, оператор A – ограниченный линейный оператор из X на Y, $f=\bar{f}+f^*$ – общее решение линейного уравнения (18), где $\bar{f}$ – общее решение однородного уравнения $Af=0$, а f^* – частное решение уравнения (18).

Тогда $f^*=A^+b,\ A^+=A^*\left(AA^*\right)^{-1}$, где A^* – сопряженный к A оператор, является частным решением уравнения (18).

Доказательство. Достаточно установить существование обратного оператора $\left(AA^*\right)^{-1}$.

Так как A – ограниченный линейный оператор, то и оператор $A^{-1}: Y\to X$ – ограниченный линейный оператор. Но ограниченные линейные операторы являются замкнутыми. Следовательно, линейные многообразия $N(A)=\{x\in X: Ax=0\}$, ядро оператора A и $R(A^*)$ (область значений A^*) тоже замкнутые линейные подмножества X, то есть его подпространства. Покажем, что подпространство $R(A^*)$ образует ортогональное дополнение к подпространству $N(A)$.

Докажем сначала ортогональность $R(A^*)$ к $N(A)$, то есть $\forall x_1\in N(A)$ и $\forall x_2\in R(A^*)$, $(x_1,x_2)=0$, где $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение в X. Для всякого $x_1\in N(A)$ имеем $Ax_1=0$. Следовательно, $(Ax_1,y)_Y=0\ \ \forall y\in Y$, где $(\bullet,\bullet)_Y$ – скалярное произведение в Y. Отсюда: $(x_1,A^*y)_X=0\ \ \forall y\in Y$. Следовательно, $(x_1,x_2)_X = 0\ \ \forall x_2\in R(A^*)$. Теперь покажем, что из $x_1\perp R(A^*)$ следует $x_1\in N(A)$. Пусть $x_1\perp R(A^*)$. Тогда $(x_1,x_2)_X=0\ \ \forall x_2\in R(A^*)$. Следовательно, $(x_1,A^*y)_X=0\ \ \forall y\in Y$, что влечет равенство $(Ax_1,y)_Y=0\ \ \forall y\in Y$. Отсюда получаем $Ax_1=0$, то есть $x_1\in N(A)$. Далее установим, что отображение $AA^*: Y\to Y$ является взаимнооднозначным отображением Y на Y. Из равенств $Y=A(X)=A\left(N(A)\oplus R(A^*)\right)=A\left(R(A^*)\right)$ следует, что AA^* является отображением «на». Пусть $y_1,y_2\in Y$ таковы, что $AA^*y_1=AA^*y_2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\left(A^*(y_1-y_2)\right)=0$. Тогда $A^*(y_1-y_2)\in N(A)$. Отсюда в силу $A^*(y_1-y_2)\in\ \in R(A^*)\cap N(A)=\{0\}$ имеем $y_1-y_2=0\Leftrightarrow y_1=y_2$. Теорема 2 доказана.

Пример 1. Пусть $D\subset R^3$ – некоторая ограниченная область, $X=C^1(D,R^3)$, $Y=C(D,R)$. Координаты точек R^3 будем обозначать буквами ξ,η,ζ. Рассмотрим не зависящий от t оператор $\omega: X\to Y$, определенный по формуле $\omega x=\operatorname{div}x$, $\operatorname{div}x=\dfrac{\partial x_\xi}{\partial\xi}+\dfrac{\partial x_\eta}{\partial\eta}+\dfrac{\partial x_\zeta}{\partial\zeta}$, где $x=(x_\xi,x_\eta,x_\zeta)$. Оператор div является линейным и ограниченным как оператор из X в Y. Следовательно, этот оператор дифференцируем по Фреше, при этом $\omega_t=0$.

Определим правую часть уравнения (18) так, чтобы равенство

$$\operatorname{div}x=0 \tag{19}$$

было частным интегралом для (16). Запишем уравнение (17) для этой задачи

$$\operatorname{div}f(t)x=F(t)(x,\operatorname{div}x). \tag{20}$$

Пусть $F(t)(x,\ \operatorname{div}x)=c\operatorname{div}x$, $c=\mathrm{const}\in R$. Тогда уравнение (17) имеет вид

$$\operatorname{div}fx=c\operatorname{div}x\ \Leftrightarrow\ \operatorname{div}(fx-cx)=0. \tag{21}$$

Пусть $Z=\{g\in X: \operatorname{div}g=0\}$ – множество соленоидальных функций. Тогда уравнение (20) имеет решение $fx = cx - g,\ g \in Z$. Докажем, что решение задачи Коши

$$\dot{x} = cx + g,\ x(t_0) = x_0,\ \operatorname{div} x_0 = 0 \qquad (22)$$

удовлетворяет равенству (19). Действительно, решение (22) имеет вид

$$x = e^{c(t-t_0)}\left(x_0 + \frac{1}{2}g\right) - \frac{1}{c}g,$$

откуда и следует (19).

Пусть

$$F(t)(x, \operatorname{div} x) = a(t) \operatorname{div} x, a(t) \in C(R^+, R).$$

Тогда уравнение (17) примет вид $\operatorname{div} f(t)x = a(t) \operatorname{div} x$. Отсюда $f(t)x = a(t)x + g(t)$f(t), где $g(t) \in C(R^+, Z)$. Чтобы проверить правильность этого решения, заметим, что задача Коши $\dot{x} = a(t)x + g(t),\ x(t_0) = x_0$ имеет решение

$$x = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right\}x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left\{\int_{\tau}^{t} a(t_1)dt_1\right\}g(\tau)d\tau,$$

где интегрирование понимается в смысле Римана. Для интеграла Римана справедливо равенство

$$L\int h(t)dt = \int Lh(t)dt,$$

где L – ограниченный оператор. Поэтому решение $x(t)$ соленоидально.

Пример 2. Пусть $D \subset R^3, X = C^1(D, R^3)$. Положим, $\omega = \operatorname{rot}$. Определим $f(t)$. Уравнение (17) имеет вид $\operatorname{rot} f(t)x = F(t)(x, \operatorname{rot} x)$.

Полагая $F = a(t)\operatorname{rot} x$, получим $f(t)x = a(t)x + h(t)$, где $h(t) \in C(R^+, Z_1)$, $Z_1 = \{h \in X : \operatorname{rot} h = 0\}$ – множество потенциальных функций.

3. Устойчивоподобные свойства

Пусть $\{\Omega(t)\}_{t\in R^+}$ – семейство множеств $\Omega(t) \subset X,\ t \in R^+$, определяемых уравнением

$$\omega(t)x = 0, \qquad (23)$$

состоящее из непустых и связных множеств, $\{\omega(t)\}_{t\in R^+}$ – семейство операторов $\omega(t)$, отображающих гильбертово пространство X в гильбертово пространство Y и удовлетворяющих условиям: 1) отображение $t \to \omega(t)x$ при каждом фиксированном $x \in X$ принадлежит множеству $C^1(R^+, Y)$ непрерывно дифференцируемых функций со значениями в Y (производную этого отображения будем обозначать символом $\omega_t(t)x$); 2) операторы $\omega(t),\ t \in R^+$, дифференцируемы по Фреше (производную Фреше оператора $\omega(t)$ обозначим через $\omega_x(t)$).

Если операторы $f(t), t \in R^+$, удовлетворяют уравнению

$$(\omega_x(t)x) f(t)x = F(t)(x, \omega(t)x) - \omega_t(t)x, \quad (24)$$

где $F(t): X \times Y \to Y$ при каждом $t \in R^+$ удовлетворяет условиям: а) $F(t)(x, 0) \equiv 0$, б) задача Коши $\dot{\omega} = F(t)(x(t), \omega),\ \omega(t_0) = 0\quad \forall t_0 \in R^+$, $\forall x(t) \in C^1(R^+, X)$ имеет единственное нулевое решение $\omega = 0$, то дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x \qquad (25)$$

допускает частный интеграл (23) в следующем смысле: выполнение условия $\omega(t_0)x_0 = 0$ при $t_0 \in R^+,\ x_0 \in X$ влечет равенство $\omega(t)x(t) = 0$ для любого $t \ge t_0$, где $x(t)$ – решение уравнения (23) с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Программу (23) назовем:

1) устойчивой относительно уравнения (25) с правой частью $f(t)$, удовлетворяющей (24), если для каждого $\varepsilon > 0$ при любых $t \ge t_0,\ x_0 \in X$, можно найти число $\delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ такое, что из условия $\|\omega(t_0, x_0)\| < \delta$ следует неравенство $\|\omega(t, x)\| < \varepsilon$ при любом $t \ge t_0$, где $x(t)$ – решение уравнения (25) с начальным условием $x(t_0) = x_0$;

2) асимптотически устойчивой, если она устойчива и для любого $t_0 \ge 0$ существует число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что из условия $\|\omega(t_0, x(t_0))\| < \Delta$ вытекает равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \|\omega(t, x(t))\| = 0$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t)x,\ \dot{\omega} = F(t)(x, \omega), \qquad (26)$$

где f определяется уравнением (24), F удовлетворяет условиям а) и б) из уравнения (24). Эту систему будем рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно $(x, \omega) \in X \times Y$.

Инвариантное множество

$$M = \{(x, \omega) \in X \times Y : \omega = 0\} \qquad (27)$$

системы (26) назовем:

1) устойчивым относительно (26), если для любых $\varepsilon > 0, t_0 \ge 0$ существует число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из условия $\|\omega_0\| < \delta, \|x_0\| < \infty$ следуют неравенства $\|\omega(t)\| < \varepsilon, \|x(t)\| < \infty$, где $(x(t), \omega(t))$ – решение уравнения (26) с начальными условиями $x(t_0) = x_0,\ \omega(t_0) = \omega_0$;

2) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для любого $t_0 > 0$ можно определить число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \infty$, $\|\omega_0\| < \Delta$ следует $\|x(t)\| < \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\|\omega(t)\| = 0$.

Устойчивость (асимптотическая устойчивость) программы (23) в силу условий, наложенных на f и F, эквивалентна устойчивости (асимптотической устойчивости) множества (27).

Семейство $\{V(t)\}_{t\in R^+}$ функционалов

$$V(t)(x,\omega), V(t): X\times O_\omega \to R, V(t)(0,0)\equiv 0,$$

где O_ω – некоторая окрестность нулевой точки Y, назовем функционалом Ляпунова, если: 1) функции $t \to V(t)(x,\omega)$ при фиксированных $(x,\omega)\in X\times O_\omega$ принадлежат пространству $C^1(R^+, R)$, производные которых обозначим через $V_t(t)$, 2) операторы $V(t)$ дифференцируемы по Фреше по каждому аргументу x и ω.

Производная $\dot V(t)$ функционала $V(t)$ в силу системы (3.4) определяется по формуле

$$\dot V(t)(x,\omega) = V_t(t)(x,\omega) + \left[V_x(t)(x,\omega)\right] f(t)x + \\ + \left[V_\omega(t)(x,\omega)\right] F(t)(x,\omega).$$

Теорема 3. Пусть существует функционал Ляпунова $V(t)(x,\omega)$, удовлетворяющий условиям:

$$1)\ a(\|\omega\|) \le V(t)(x,\omega) \le b_t(\|\omega\|), \qquad (28)$$

где $a, b_t \in K, t\in R^+$,

$$2)\ \dot V(t)(x,\omega) \le 0. \qquad (29)$$

Тогда множество (27) устойчиво.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$ произвольны. Положим, $\delta = b_{t_0}^{-1}(a(\varepsilon))$. Тогда при $\|x_0\| < \infty$, $\|\omega_0\| < \delta$, согласно (28), имеем

$$V(t_0)(x_0,\omega_0) \le b_{t_0}(\|\omega_0\|) < \\ < b_{t_0}\left(b_{t_0}^{-1}(a(\varepsilon))\right) = a(\varepsilon). \qquad (30)$$

Очевидно, что при любых $t\in R^+$

$$V(t)(x(t),\omega(t)) = V(t_0)(x_0,\omega_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} \dot V(\tau)(x(\tau),\omega(\tau))\,d\tau, \qquad (31)$$

где $(x(\tau),\omega(\tau))$ – решение системы (26) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $\omega(t_0)=\omega_0$. В формуле (31) интеграл берется по Риману. Тогда из (29), (30) и (31) имеем

$$V(t)(x(t),\omega(t)) \le \\ \le V(t_0)(x_0,\omega_0) < a(\varepsilon),\ \forall t\in R^+. \qquad (32)$$

Из левого неравенства (28) и неравенства (32) вытекает $\|\omega(t)\| < \varepsilon\ \forall t\in R^+$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть существует функционал Ляпунова $V(t)(x,\omega)$, удовлетворяющий условиям:

$$1)\ a(\|\omega\|) \le V(t)(x,\omega) \le b(\|\omega\|),$$

$$2)\ \dot V(t)(x,\omega) \le -c(\|\omega\|),\ a,b,c\in K.$$

Тогда множество (27) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Выберем операторы $F(t)$ в линейном виде

$$F(t)(x,\omega) = B\omega, \qquad (33)$$

где $B: Y\to Y$ – линейный ограниченный оператор.

Функционал Ляпунова определим по формуле $V(t)(x,\omega) = \frac{1}{2}(\omega, A\omega)$, где $A: Y \to Y$ – линейный ограниченный самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию $(\omega, A\omega) \ge a\|\omega\|^2$, $a>0$, где $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение в Y. Тогда $\dot V = (\omega, BA\omega)$. Допустим, выполняется неравенство $\dot V = (\omega, BA\omega) \le -b\|\omega\|^2$, $b = \mathrm{const} > 0$. Очевидно, что такие операторы существуют, например: $A = aI$, $B = -\frac{b}{a}I$, $I: Y\to Y$ – тождественный оператор. Тогда по теореме 3.2 имеем, что программа (23) асимптотически устойчива, если операторы $F(t)$ выбраны согласно (33). Теорема 4 доказана.

На основе результатов монографии [11] и приведенных условий устойчивости построены уравнения программного движения счетной системы дифференциальных уравнений и изучен вопрос об устойчивости. Результаты настоящей статьи являются продолжением исследований [8–10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.** Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971.
2. **Галиуллин А.С.** Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986.
3. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: УРСС, 2007.
4. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980.
5. **Румянцев В.В.** О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения //

Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 5. –С. 739–776.
6. **Сиразетдинов Т.К.** Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Новосибирск: Наука, 1987.
7. **Афанасьева В.И., Дружинина О.В.** Исследование устойчивости некоторых классов распределенных систем // Нелинейный мир. – 2010. – Т. 8. – № 9. – С. 554–562.
8. **Шестаков А.А., Лисовский Е.В.** Об устойчивости линейных дифференциальных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве // Современные проблемы управления, устойчивости и колебаний нелинейных механических систем железнодорожного транспорта: межвуз. сб. науч. тр. – М.: ВЗИИТ, 1991. – Ч. 1. – С. 49–54.
9. **Лисовский Е.В.** Об устойчивости программного движения систем с распределенными параметрами // Устойчивость, прочность и надежность систем подвижного состава железнодорожного транспорта: межвуз. сб. науч. тр. – М.: РГОТУПС, 1999. – С. 16–19.
10. **Лисовский Е.В.** О построении уравнений программного движения для систем с распределенными параметрами // Устойчивость, прочность и надежность систем подвижного состава железнодорожного транспорта: межвуз. сб. науч. тр. – М.: РГОТУПС, 1999. – С. 51–54.
11. **Валеев К.Г., Жаутыков О.А.** Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974.

Лисовский Евгений Васильевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана
248000, Калуга, ул. Циолковского, д. 20, кор.7,
тел. 8 (4842) 797 763, e-mail: LEvgenijV@gmail.com