УДК 517.925

ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ МНОЖЕСТВА НЕНУЛЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е.Ю. Лискина

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE PROBLEM OF EXISTENCE OF SET OF NONZERO PERIODIC SOLUTIONS OF NON-LINEAR AUTONOMOUS DYNAMIC SYSTEM OF THE SECOND ORDER

E.Y. Liskina

Исследуется автономная нелинейная система дифференциальных уравнений второго порядка, матрица линейного приближения которой имеет пару чисто мнимых собственных значений, а нелинейная часть может быть представлена в виде суммы форм порядка, не ниже второго относительно компонент фазового вектора. Получены достаточные условия существования множества ненулевых периодических решений в окрестности нулевого решения.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, критический случай, ненулевое периодическое решение.

We research an autonomous non-linear system of second order differential equations with a linear approximation matrix which has a pair of imaginary eigenvalues, and with the nonlinearity which can be represented as a sum of forms of a phase vector components, where the order of the forms is not less than two. We receive sufficient conditions of existence of a non-zero periodic solution set in a neighborhood of a zero solution.

Keywords: system differential equations, critical case, nonzero periodic solution.

Введение. Проблеме существования ненулевых периодических решений автономной нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с чисто мнимыми собственными значениями матрицы линейного приближения посвящено большое количество исследований [1–3]. Рассматриваемый критический случай требует привлечения нелинейных членов правой части. Благодаря многообразию нелинейностей проблема не теряет актуальности.

В данной работе для получения условий существования ненулевых периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия используется метод введения вспомогательного параметра [4–8]. Как и в [8], параметр вводится не только по фазовым переменным, но и по времени. Полученные в настоящей работе результаты уточняют условия существования семейства ненулевых периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия, полученные ранее в [7, 8].

Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A\,x + f(x), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2$ – двумерное вещественное векторное пространство, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a \end{pmatrix}$ – матрица, имеющая пару собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ($\omega = \sqrt{bc - a^2}$, $a^2 < bc$, $bc > 0$, [7]); $f(x)$ – вектор-функция, компонентами которой являются суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x, $\|x\| = \max\limits_{i=1,\,2}\{|x_i|\}$. Система (1) на множестве $\Omega(\varepsilon_0) = \{x \in \mathbf{R}^2, \|x\| \le \varepsilon_0\}$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Требуется получить условия существования окрестности состояния равновесия $x \equiv 0$, через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение системы (1).

Преобразование системы (1). Выполним замену переменных $t = (1+\lambda)\bar{t}$, $x = (E+M)\bar{x}$, где $\lambda = \lambda(\nu)$ – непрерывное выражение-параметр, $t = \bar{t}$ при $\nu = 0$, $M = (m_{ij}(\mu))_{i,j=1}^2$ – матрица параметров, функции $m_{ij}(\mu)$ непрерывны по компонентам вектора $\mu \in \mathbf{R}^m$, $\|\mu\| = \max\limits_{i=\overline{1,\, m}}\{|\mu_i|\}$, $M(0)=0$; E – единичная 2×2-матрица. Пусть норма матрицы $\|M\| = \max\limits_{i=\overline{1;2}}\{|m_{i1}|+|m_{i2}|\}$. Тогда в силу [9] матричный ряд $(E+M)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i$ равномерно сходится на множестве $W(\varepsilon_1) = \{\mu \in \mathbf{R}^m : \|\mu\| \le \varepsilon_1 \Rightarrow \|M\| < 1\}$. С учетом сказанного при сохранении прежних обозначений для переменных t и x систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\dot{x} = ((1+\lambda)A + (AM - MA))x + \left(\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i\left(M^i A - M^{i-1}AM\right)\right)x + (1+\lambda)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i f((E+M)x). \qquad (2)$$

Определим множество $U(\delta) = \{\alpha \in \mathbf{R}^2, \|\alpha\| \le \delta\}$, $\|\alpha\| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Состояние равновесия $x \equiv 0$ является решением системы (2). Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_0 \in (0; \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\})$, что для любого вектора $\alpha \in U(\delta_0)$, любого выражения $\lambda(\nu)$ ($|\lambda(\nu)| \le \delta_0$) и любого вектора $\mu \in W(\delta_0)$ решение $x(t, \alpha, \nu, \mu)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$, определено и непрерывно на промежутке $[0, T_0]$ ($T_0 = 2\pi/\omega$) и при любых $t \in [0, T_0]$ удовлетворяет неравенству $\|x(t, \alpha, \nu, \mu)\| < \varepsilon$.

Аналогично [4] доказано, что решение $x(t, \alpha, \nu, \mu)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$, можно представить как: $x(t, \alpha, \nu, \mu) = (X(t) + \Phi(t, \alpha, \lambda(\nu), \mu))\alpha$, где: $X(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей линейной системы $\dot{x} = A\,x$, удовлетворяющая условию $X(0) = E$; матрица $\Phi(t, \alpha, \lambda(\nu), \mu)$ непрерывна по переменным t, x, $\lambda(\nu)$, μ на множестве $[0; T_0]\times U(\delta_0)\times[-\delta_0; \delta_0]\times W(\delta_0)$; $\Phi(0, \alpha, \lambda(\nu), \mu) = 0$; при $\alpha \to 0$, $\lambda(\nu) \to 0$, $\|\mu\| \to 0$ справедливо, что $\Phi(t, \alpha, \lambda(\nu), \mu) \to 0$ равномерно по $t \in [0, T_0]$.

Так как вектор-функция $f(x)$ содержит суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x, ($k \in \mathbf{N}$), то $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = F(x)x$, $F(x)$ – 2×2-матрица, элементами которой являются суммы форм порядка не ниже первого относительно компонент вектора x. Непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$f((E+M)(X(t) + \Phi(t, \alpha, \lambda(\nu), \mu))\alpha) = \overline{F}(X(t)\alpha)\alpha + \overline{\overline{F}}(\Phi(t, \alpha, \lambda(\nu), \mu) + M(X(t) + \Phi(t, \alpha, \lambda(\nu), \mu))\alpha),$$

где $\overline{F}(X(t)\alpha)$ – 2×2-матрица, элементами которой являются суммы форм порядка не ниже $(k-1)$ относительно компонент вектора $X(t)\alpha$, $\psi(\alpha, \lambda, \mu)$ – выражение, в которое входят слагаемые, содержащие матрицу $\Phi(t, \alpha, \lambda, M)$. Тогда условие существования ненулевого T_0-периодического решения системы (2) (соответственно ненулевого T-периодического решения системы (1), $T = (1+\lambda)T_0$) будет иметь вид

$$\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\lambda A X(t)\alpha dt + \int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)(AM - MA)X(t)\alpha dt + \int_0^{T_0} X^{-1}(t)\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i\left(M^i A - M^{i-1}AM\right)X(t)\alpha dt + \lambda\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i\left(M^i A - M^{i-1}AM\right)X(t)\alpha dt + (1+\lambda)\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i \overline{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt + \psi(\alpha, \lambda, M) = 0. \qquad (3)$$

Преобразование системы (3). В работе [8] установлено:

1) фундаментальная матрица соответствующей линейной системы $\dot{x} = A\,x$, удовлетворяющая условию $X(0) = E$, имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t + \frac{a}{\omega}\sin\omega t & \frac{b}{\omega}\sin\omega t \\ -\frac{c}{\omega}\sin\omega t & \cos\omega t - \frac{a}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix};$$

2) для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M справедливо тождество

$$\int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)(AM - MA)X(t)\alpha dt \equiv 0;$$

3) если $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, то при s или q нечетном $\int_0^{T_0}\sin^s\omega t\cos^q\omega t dt \ne 0$, а при s и q четных $\int_0^{T_0}\sin^s\omega t\cos^q\omega t dt \equiv 0$;

4) пусть в системе (1) $f(x)$ – вектор-функция, компонентами которой являются суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент

вектора x. Если порядок всех форм, входящих в $f(x)$, четный, то в формуле (3)

$$\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i \overline{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt \equiv 0.$$

Если хотя бы одна из форм, входящих в $f(x)$, нечетного порядка, то в формуле (3)

$$\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i \overline{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt \neq 0.$$

Обозначим $G(\alpha) = \int_0^{T_0} X^{-1}(t)\overline{F}(X(t)\alpha)X(t)dt$ – 2×2-матрицу, состоящую из сумм форм четного порядка не ниже второго относительно компонент вектора α. Далее непосредственными вычислениями устанавливаем, что:

5) $\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\lambda AX(t)\alpha dt = \frac{2\omega}{\pi}\lambda A\alpha$;

6) $\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\left(M^2A - MAM\right)X(t)\alpha dt = -\frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)\times$ $\times A\alpha$, в котором

$$h(\mu) = 4a^2 m_{12}m_{21} - bc(m_{11}-m_{22})^2 -$$
$$-2a(m_{11}-m_{22})(cm_{12}-bm_{21}) - (cm_{12}+bm_{21})^2.$$

С учетом 1)–6) систему уравнений (3) запишем следующим образом:

$$\left(\frac{2\pi}{\omega}\lambda - \frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)\right)A\alpha + G(\alpha)\alpha + \overline{\psi}(\alpha,\lambda,\mu) = 0. \quad (4)$$

Заметим, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\overline{\psi}(\alpha,\lambda,\mu)}{\rho} = 0$, где $\rho = \max\{\|\alpha\|, |\lambda|, \|\mu\|\}$.

Умножим обе части матричного уравнения (4) слева на матрицу A^{-1} и на число $\frac{\omega}{\pi}$. Обозначим $\overline{G}(\alpha) = \frac{\omega}{\pi}A^{-1}G(\alpha)$, $\overline{\overline{\psi}}(\alpha,\lambda,\mu) = \frac{\omega}{\pi}A^{-1}\overline{\psi}(\alpha,\lambda,\mu)$. Тогда (4) примет вид

$$\left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha + \overline{G}(\alpha)\alpha + \overline{\overline{\psi}}(\alpha,\lambda,\mu) = 0. \quad (5)$$

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$\overline{G}(\alpha) = \frac{1}{\omega\pi}\begin{pmatrix} -(ag_{11}+bg_{21}) & -(ag_{12}+bg_{22}) \\ (cg_{11}+ag_{21}) & (cg_{12}+ag_{22}) \end{pmatrix},$$

где $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ ($i, j = \overline{1;2}$) – элементы матрицы $G(\alpha)$.

Из утверждения 4) следует, что если все формы, входящие в вектор-функцию $f(x)$, четного порядка, то формула (3) принимает вид

$$\left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha + \overline{\overline{\psi}}(\alpha,\lambda,\mu) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, для получения условий существования ненулевых T_0-периодических решений системы (2) следует рассмотреть два случая:

1) вектор-функция $f(x)$ содержит хотя бы одну форму нечетного порядка не ниже третьего;

2) вектор-функция $f(x)$ содержит сумму форм только четного порядка не ниже второго.

Следующая теорема представляет условие отсутствия ненулевых T_0-периодических решений системы (2) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Теорема 1. Если при любом $(\alpha,\lambda,\mu)\in \mathbf{R}^{m+3}$ таком, что $\alpha\neq 0$, выполнено неравенство $\left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha + \overline{G}(\alpha)\alpha \neq 0$, то существует такое число $\delta' \in (0,\delta_0)$, что для любых векторов $\alpha\in U(\delta')\setminus\{0\}$, $\mu\in W(\delta')$ и любого λ такого, что $|\lambda|\le\delta'$, система (2) не имеет ненулевых T_0-периодических решений.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 в [7].

Условия существования ненулевых T_0-периодических решений системы (2).

В следующей теореме сформулировано условие существования ненулевого решения системы уравнений

$$\left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha + \overline{G}(\alpha)\alpha = 0 \quad (7)$$

в первом случае.

Теорема 2. Пусть вектор-функция $f(x)$ содержит хотя бы одну форму нечетного порядка не ниже третьего. Для того чтобы система уравнений (7) имела хотя бы одно ненулевое решение на множестве $(U(\delta_0)\setminus\{0\})\times[-\delta_0;\delta_0]\times W(\delta_0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал хотя бы один вектор $\overline{\alpha}\in U(\delta_0)\setminus\{0\}$, удовлетворяющий уравнению

$$(cg_{11}(\alpha)+ag_{21}(\alpha))\alpha_1^2 + (cg_{12}(\alpha)+$$
$$+a(g_{11}(\alpha)+g_{22}(\alpha))+bg_{21}(\alpha))\alpha_1\alpha_2 +$$
$$+(ag_{12}(\alpha)+bg_{22}(\alpha))\alpha_2^2 = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть вектор-функция $f(x)$ содержит хотя бы одну форму нечетного порядка не ниже третьего и система уравнений (7) имеет хотя бы одно решение на множестве $(U(\delta_0)\setminus\{0\})\times[-\delta_0;\delta_0]\times W(\delta_0)$. Так как (7) является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений относительно λ и $h(\mu)$, то для ее совместности необходимо и достаточно, чтобы ранги основной и расширенной матриц системы (7) были равны [10]. Основная матрица системы (7) имеет вид $\begin{pmatrix} 2\alpha_1 & -\frac{\alpha_1}{\omega^2} \\ 2\alpha_2 & -\frac{\alpha_2}{\omega^2}\end{pmatrix}$, из которого следует, что при всех $\alpha \in U(\delta_0)\setminus\{0\}$ ранг основной матрицы системы (7) равен 1. Приведя расширенную матрицу системы (7) к ступенчатому виду, получаем, что для того, чтобы ее ранг был равен 1, необходимо и достаточно, чтобы существовал хотя бы один вектор $\overline{\alpha} \in U(\delta_0)\setminus\{0\}$, являющийся решением уравнения (8). Теорема доказана.

Замечание. Если существует вектор $\overline{\alpha} \in U(\delta_0)\setminus\{0\}$, являющийся решением уравнения (8), то система (7) является совместной и неопределенной, то есть каждому $\overline{\alpha} \in U(\delta_0)\setminus\{0\}$ соответствует множество значений $\mu \in W(\delta_0)$ и λ ($|\lambda| \le \delta_0$), связанных выражением

$$\lambda = \frac{h(\mu)}{2\omega^2} - \frac{1}{2\pi\omega}\Big(\big(ag_{11}(\overline{\alpha}) + bg_{21}(\overline{\alpha})\big) + \\ + \big(ag_{12}(\overline{\alpha}) + bg_{22}(\overline{\alpha})\big)\frac{\overline{\alpha}_2}{\overline{\alpha}_1}\Big). \qquad (9)$$

Во втором случае $\overline{G}(\alpha) \equiv 0$. Тогда система уравнений (7) принимает вид $\left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha = 0$ и имеет ненулевое решение при всех $\alpha \in U(\delta_0)\setminus\{0\}$, $\mu \in W(\delta_0)$ и λ ($|\lambda| \le \delta_0$) таких, что $\lambda = \frac{h(\mu)}{2\omega^2}$.

Будем полагать, что элементы $m_{ij} = m_{ij}(\mu)$ ($i, j = \overline{1;2}$) матрицы M являются формами порядка l относительно компонент вектора $\mu \in \mathbf{R}^m$, $l \in \mathbf{N}$, $\mu \in W(\delta_0)$; $\lambda(\nu) = \pm\nu^r$, $r \in \mathbf{N}$, $|\nu^r| \le \delta_0$. В первом случае степени l и r определяются наименьшим порядком форм относительно компонент вектора , входящих в матрицу $\overline{G}(\alpha)$. Во втором случае – степени l и r должны быть выбраны так, чтобы обеспечить существование ненулевых вторых производных вектор-функции $\left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha$ по компонентам векторов α, μ и по переменной ν. Знак при ν^r следует выбрать так, чтобы функция $\nu(\alpha, \mu)$, определяемая выражением (9), и функция $\nu = \sqrt[r]{\frac{h(\mu)}{2\omega^2}}$ были определены.

Первый случай. Он разделяется на два подслучая: вектор-функция $f(x)$ содержит ровно одну вектор-форму нечетного порядка и вектор-функция $f(x)$ содержит более одной вектор-формы нечетного порядка. Пусть вектор-функция $f(x)$ содержит ровно одну вектор-форму нечетного порядка $k \ge 3$. Обозначим $s_k(\alpha, \nu, \mu) = \left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha + \overline{G}(\alpha)\alpha$ форму порядка k по совокупности компонент векторов α, μ и переменной ν. Тогда $r = k-1$, $l = \frac{k-1}{2}$. Выполняя рассуждения, аналогичные [8], систему (5) приведем к виду

$$\tilde{s}_k(\zeta) + \mathrm{O}(\rho) = 0, \qquad (11)$$

в котором $\zeta = \left(\frac{\alpha}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}\right)$, $\|\zeta\| = 1$, $\mathrm{O}(\rho) = \frac{o(\rho^k)}{\rho^k}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\mathrm{O}(\rho) = 0$, $o(\rho^k) = \overline{\overline{\psi}}(\alpha, \nu, \mu)$.

Обозначим $U_{\overline{\alpha}}(\delta_0)$ множество всех векторов $\overline{\alpha} \in U(\delta_0)\setminus\{0\}$, удовлетворяющих теореме 2. Для каждого вектора $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta_0)$ выберем число $\delta' \in (0, \delta_0)$ так, чтобы для любого вектора $\mu \in W(\delta')$ выполнялось неравенство $|\nu^{k-1}| \le \delta'$, где $|\nu^{k-1}| = |\lambda|$ определяется выражением (9). Построим $K_{\overline{\alpha}}(\delta') = U_{\overline{\alpha}}(\delta') \times [-\delta'; \delta'] \times W(\delta')$ – множество векторов (α, ν, μ), удовлетворяющих теореме 2 и неравенству $|\nu^{k-1}| \le \delta'$, и Z_0 – множество, определенное условием $Z_0 = \{\zeta \in \mathbf{R}^{m+3} : \|\zeta\| = 1, (\alpha, \nu, \mu) \in K_{\overline{\alpha}}(\delta') \Rightarrow \zeta \in Z_0\}$. Обозначим $2\times(m+3)$-матрицу Якоби $D\tilde{s}_k(\zeta_0)$ функции $\tilde{s}_k(\zeta)$, вычисленную при $\zeta = \zeta_0$, $\zeta_0 \in Z_0$.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия существования ненулевого T_0-периодического решения системы (2).

Теорема 3. Если для вектора $\zeta_0 \in Z_0$ справедливо равенство $\operatorname{rank} D\tilde{s}_k(\zeta_0) = 2$, то существует такое число $\delta > 0$, что на множестве $S_{\zeta_0}(\delta) = \{\zeta \in \mathbf{R}^{m+3} : \|\zeta - \zeta_0\| < \delta\}$ система (2) имеет семейство ненулевых T_0-периодических решений $\overline{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$, удовлетворяющих начальным условиям $\overline{x}(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$. Начальные значения $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$ решений семейства определяются соотношениями $(\alpha, \nu, \mu) = \rho(\zeta_0 + \Delta\zeta)$, $(\zeta_0 + \Delta\zeta) \in S_{\zeta_0}(\delta)$.

Доказательство теоремы основано на применении принципа неподвижной точки нелинейного оператора и аналогично доказательству теоремы 2 в [7] для каждого фиксированного вектора $\zeta_0 \in Z_0$. Далее, в силу замечания к теореме 2, получаем, что каждый вектор $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$, удовлетворяющий теореме 2, порождает семейство векторов $\zeta_0 \in Z_0$, а следовательно, и семейство ненулевых T_0-периодических решений $\overline{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$ с начальными условиями $\overline{x}(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$, $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$, при этом зависимость $\nu(\alpha, \mu)$ определяется соотношением (9). Теорема доказана.

Замечание. Подставляя выражение $t = (1+\lambda)\bar{t}$ в решение $\overline{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$ системы (2), а решение $\overline{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$ в выражение $x = (E + M)\overline{x}$, получим, что существует окрестность состояния равновесия $x \equiv 0$ системы (1), через каждую точку $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$ которой проходит ненулевое T-периодическое решение системы (1) $x(t, \alpha) = x(t, \alpha(\nu, \mu))$ с начальными условиями $x(0, \alpha(\nu, \mu)) = \alpha(\nu, \mu)$, $T = (1+\lambda)T_0$, $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$, $|\lambda| = \left|\nu^{k-1}\right|$, при этом зависимость $\nu(\alpha, \mu)$ определяется соотношением (9). В силу существования зависимости $\nu(\alpha, \mu)$ период T системы (1) зависит от начальных значений $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$.

Если для вектора $\zeta_0 \in Z_0$ справедливо неравенство $\operatorname{rank} D\widetilde{s}_k(\zeta_0) = 1$, то дальнейшие рассуждения аналогичны второму случаю (вектор-функция $f(x)$ содержит сумму форм только четного порядка не ниже второго).

Второй случай. Пусть вектор-функция $f(x)$ содержит сумму форм только четного порядка не ниже второго. Тогда условие (3) существования ненулевого T_0-периодического решения системы (2) имеет вид (6), а система уравнений (7) в силу проведенных выше рассуждений имеет ненулевое решение при всех $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$, $\mu \in W(\delta_0)$ и λ ($|\lambda| \le \delta_0$) таких, что $\lambda = \frac{h(\mu)}{2\omega^2}$. Пусть $\lambda(\nu) = \pm \nu^r$, $r \in \mathbf{N}$, $\left|\nu^r\right| \le \delta_0$. Знак при ν^r выберем так, чтобы функция $\nu = \sqrt[r]{\frac{h(\mu)}{2\omega^2}}$ была определена. В этом случае форма порядка k по совокупности компонент векторов α, μ и переменной ν имеет вид $s_k(\alpha, \nu, \mu) = \left(2\lambda - \frac{h(\mu)}{\omega^2}\right)E\alpha$, причём порядок k может быть определён произвольным образом. Тогда $r = k-1$, $l = \frac{k-1}{2}$. Выполняя рассуждения, аналогичные [8], систему (6) приведем к виду (11). Обозначим множество $K(\delta_0) \in (U(\delta_0) \setminus \{0\}) \times [-\delta_0; \delta_0] \times W(\delta_0)$. Для каждого произвольного, но фиксированного вектора $(\alpha, \nu, \mu) \in K(\delta_0)$ ($\nu = \sqrt[r]{\frac{h(\mu)}{2\omega^2}}$) построим единичный вектор ζ и множество $Z_1 = \left\{\zeta \in \mathbf{R}^{m+3} : \|\zeta\| = 1, (\alpha, \nu, \mu) \in K(\delta_0) \Rightarrow \zeta \in Z_1\right\}$.

Проводя непосредственные вычисления, получаем, что для любого вектора $\zeta_0 \in Z_1$ $\operatorname{rank} D\widetilde{s}_k(\zeta_0) = 1$. Разложим $\widetilde{s}_k(\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности произвольного, но фиксированного $\zeta_0 \in Z_1$. После преобразований, аналогичных выполненным в [4], систему (11) приведем к виду

$$D\widetilde{s}_k(\zeta_0)\Delta\zeta + p(\zeta_0, \Delta\zeta) + o\left(\|\Delta\zeta\|^2\right) + \mathrm{O}(\rho) = 0, \qquad (12)$$

в котором $p(\zeta_0, \Delta\zeta)$ – вектор-форма второго порядка относительно компонент вектора $\Delta\zeta$, $\lim\limits_{\|\Delta\zeta\| \to 0} \frac{o\left(\|\Delta\zeta\|^2\right)}{\|\Delta\zeta\|^2} = 0$. Приведем матрицу $D\widetilde{s}_k(\zeta_0)$ к ступенчатому виду. Для этого систему (12) умножим слева на неособенную матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}} & 1 \end{pmatrix}$, тогда непосредственно путем вычислений получим $QD\widetilde{s}_k(\zeta_0) = \begin{pmatrix} D_1\widetilde{s}_k(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, $Qp(\zeta_0, \Delta\zeta) = \begin{pmatrix} p_1(\zeta_0, \Delta\zeta) \\ \widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta) \end{pmatrix}$, где $D_1\widetilde{s}_k(\zeta_0)$ – первая строка матрицы $D\widetilde{s}_k(\zeta_0)$, $p(\zeta_0, \Delta\zeta) = \begin{pmatrix} p_1(\zeta_0, \Delta\zeta) \\ p_2(\zeta_0, \Delta\zeta) \end{pmatrix}$, $\widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta) = p_2(\zeta_0, \Delta\zeta) - \frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}} \times p_1(\zeta_0, \Delta\zeta)$, $\widetilde{o}\left(\|\Delta\zeta\|^2\right) = Qo\left(\|\Delta\zeta\|^2\right)$, $\widetilde{\mathrm{O}}(\rho) = Q\mathrm{O}(\rho)$. Следовательно, система (12) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_1\widetilde{s}_k(\zeta_0)\Delta\zeta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(\zeta_0, \Delta\zeta) \\ \widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta) \end{pmatrix} + \widetilde{o}\left(\|\Delta\zeta\|^2\right) + \widetilde{\mathrm{O}}(\rho) = 0. \qquad (13)$$

Рассмотрим множество $V_{\zeta_0}(\delta_1) = \left\{\Delta\zeta \in \mathbf{R}^{m+3} : \|\Delta\zeta\| \le \delta_1 \Rightarrow (\zeta_0 + \Delta\zeta) \in Z_1\right\}$.

Теорема 4. Если при любом $\Delta\zeta \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$ выполнено неравенство $\widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta) \ne 0$, то существует такое число $\delta'' \in (0; \min\{\delta_0, \delta_1\})$, что для любого вектора $(\alpha, \nu, \mu) \in K(\delta'')$ система (2) не имеет ненулевых T_0-периодических решений.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 в [5].

Замечание. В первом случае (вектор-функция $f(x)$ содержит ровно одну вектор-форму нечетного порядка не ниже третьего, и $\operatorname{rank} D\widetilde{s}_k(\zeta_0) = 1$) множество $V_{\zeta_0}(\delta_1)$ определяется условием $V_{\zeta_0}(\delta_1) = \left\{\Delta\zeta \in \mathbf{R}^{m+3} : \|\Delta\zeta\| \le \delta_1 \Rightarrow (\zeta_0 + \Delta\zeta) \in Z_0\right\}$, а число $\delta'' \in (0; \min\{\delta', \delta_1\})$.

Теорема 5. Для того чтобы уравнение $\widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta) = 0$ имело хотя бы одно ненулевое решение на множестве $V_{\zeta_0}(\delta_1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

I. Существует вектор $\Delta\zeta_{0\alpha} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ такой, что $\|\Delta\zeta_{0\alpha}\| \le \delta_1$, являющийся решением уравнения $\Delta\zeta_{0\alpha_2} = \frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}}\Delta\zeta_{0\alpha_1}$ при всех $(\Delta\zeta_{0\nu}, \Delta\zeta_{0\mu}) \in$

$\in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\}$, удовлетворяющих неравенствам $\|\Delta\zeta_{0\nu}\| \le \delta_1$, $\|\Delta\zeta_{0\mu}\| \le \delta_1$.

II. Существует вектор $(\Delta\zeta_{0\nu}, \Delta\zeta_{0\mu}) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ такой, что $\|\Delta\zeta_{0\nu}\| \le \delta_1$, $\|\Delta\zeta_{0\mu}\| \le \delta_1$, являющийся решением уравнения $\Delta\zeta_{0\nu} = \frac{1}{2\omega^2 r}\left(\frac{2\omega^2}{h(\zeta_{0\mu})}\right)^{\frac{r-1}{r}} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h(\zeta_{0\mu})}{\zeta_{0\mu_j}} \Delta\zeta_{0\mu_j}$ при всех $\Delta\zeta_{0\alpha} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, удовлетворяющих неравенству $\|\Delta\zeta_{0\alpha}\| \le \delta_1$.

Доказательство. Непосредственно путем вычислений получаем, что $\widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta) = \left(4\omega^2 r \left(\frac{h(\zeta_{0\mu})}{2\omega^2}\right)^{\frac{r-1}{r}} \Delta\zeta_{0\nu} - 2\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h(\zeta_{0\mu})}{\partial \zeta_{0\mu_j}} \Delta\zeta_{0\mu_j}\right) \times \left(\Delta\zeta_{0\alpha_2} - \frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}}\Delta\zeta_{0\alpha_1}\right)$. Из явного вида функции $\widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta)$ следует доказательство теоремы.

Обозначим $D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$ – матрицу Якоби вектор-функции $Qp(\zeta_0, \Delta\zeta)$, вычисленную при $\Delta\zeta_0$, удовлетворяющем одному из условий I или II; $(QD\widetilde{s}_k(\zeta_0) \mid D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0))$ – матрицу, составленную приписыванием к матрице $QD\widetilde{s}_k(\zeta_0)$ столбцов матрицы $D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$, $S_{\Delta\zeta_0}(\delta)$ – множество, определенное условием $S_{\Delta\zeta_0}(\delta) = \{\Delta\zeta \in \mathbf{R}^{m+3} : \|\Delta\zeta - \Delta\zeta_0\| < \delta\}$,

Теорема 6. Если для вектора $\Delta\zeta_0$, удовлетворяющего одному из условий I или II, справедливо $\operatorname{rank}(QD\widetilde{s}_k(\zeta_0) \mid D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)) = 2$, то существует такое число $\delta \in (0; \min\{\delta', \delta_0, \delta_1\})$, при котором на множестве $S_{\zeta_0}(\delta) \oplus S_{\Delta\zeta_0}(\delta)$ система (2) имеет семейство ненулевых T_0-периодических решений $\bar{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$, удовлетворяющих начальным условиям $\bar{x}(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$. Начальные значения $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$ решений семейства определяются соотношениями $(\alpha, \nu, \mu) = \rho(\zeta_0 + (\Delta\zeta_0 \oplus \oplus \Delta\xi))$, $(\zeta_0 + (\Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi)) \in S_{\zeta_0}(\delta) \oplus S_{\Delta\zeta_0}(\delta)$.

Доказательство. Пусть существует вектор $\Delta\zeta_0$, удовлетворяющий одному из условий I или II. Разложим вектор-функцию $Qp(\zeta_0, \Delta\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности $\Delta\zeta_0$. Тогда система (13) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_1\widetilde{s}_k(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}\Delta\zeta + D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)\Delta\xi + \sum_{i=1}^{j} q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi) + \widetilde{o}\left(\|\Delta\zeta\|^2\right) + \widetilde{O}(\rho) = 0, \quad (14)$$

в котором $D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$ – матрица Якоби вектор-функции $Qp(\zeta_0, \Delta\zeta)$, вычисленная при $\Delta\zeta_0$, удовлетворяющем одному из условий I или II; $q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi)$ – вектор-форма порядка i относительно $\Delta\xi = \Delta\zeta - \Delta\zeta_0$. Так как выполняется условие $\operatorname{rank}(QD\widetilde{s}_k(\zeta_0) \mid D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)) = 2$, то справедливо представление

$$\begin{pmatrix} D_1\widetilde{s}_k(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}\Delta\zeta + D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)\Delta\xi = S_1\overline{w} + S_2\overline{\overline{w}}. \quad (15)$$

где S_1, S_2 – матрицы размерностей 2×2 и $2 \times (m+1)$ соответственно, векторы $\overline{w}$ и $\overline{\overline{w}}$ имеют размерности 2 и $(m+1)$ соответственно и выбраны так, чтобы $\|\overline{w}\| \ne 0$ и $\det S_1 \ne 0$. Дальнейшее доказательство теоремы основано на применении принципа неподвижной точки нелинейного оператора и аналогично доказательству теоремы 2 в [7] для каждого фиксированного вектора $\Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$.

Далее для каждого произвольного, но фиксированного вектора $(\alpha, \nu, \mu) \in K(\delta_0)$ ($\nu = \sqrt[r]{\frac{h(\mu)}{2\omega^2}}$) и соответствующего ему вектора $\zeta_0 \in Z_1$ получаем, что каждый вектор $\Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$, удовлетворяющий теореме 5, порождает семейство векторов $\Delta\xi = \Delta\zeta - \Delta\zeta_0$, а следовательно, и семейство ненулевых T_0-периодических решений $\bar{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$ с начальными условиями $\bar{x}(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$. При этом начальные значения $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$ решений семейства имеют вид $(\alpha, \nu, \mu) = \rho(\zeta_0 + \Delta\zeta_0 + \Delta\xi)$, $(\zeta_0 + \Delta\zeta_0 + \Delta\xi) \in S_{\zeta_0}(\delta) \oplus S_{\Delta\zeta_0}(\delta)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Подставляя выражение $t = (1+\lambda)\bar{t}$ в решение $\bar{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$ системы (2), а решение $\bar{x}(\bar{t}, \alpha, \nu, \mu)$ – в выражение $x = (E + M)\bar{x}$, получим, что существует окрестность состояния равновесия $x \equiv 0$ системы (1), через каждую точку $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$ которой проходит ненулевое T-периодическое решение системы (1) $x(t, \alpha) = x(t, \alpha, \nu, \mu)$ с начальными условиями $x(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$, $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$. Период решений T системы (1) имеет вид $T = (1 + \nu(\mu))T_0$, $\nu = \sqrt[r]{\frac{h(\mu)}{2\omega^2}}$. В силу произвольности выбора $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$ и независимости α от параметров ν и μ условия теорем 4–6 определяют центр системы (1).

Замечание 2. В первом случае (когда вектор-функция $f(x)$ содержит ровно одну вектор-форму нечетного порядка не ниже третьего, и $\operatorname{rank} D\widetilde{s}_k(\zeta_0)=1$) вектор начальных значений $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$, удовлетворяющий теореме 2, порождает семейства векторов $\zeta_0 \in Z_0$, $\Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$, удовлетворяющих теореме 3 (множество $V_{\zeta_0}(\delta_1)$. Согласно замечанию к теореме 4) определяется и семейство векторов $\Delta\xi = \Delta\zeta - \Delta\zeta_0$, а следовательно, и семейство ненулевых T_0-периодических решений $\overline{x}(\overline{t}, \alpha, \nu, \mu)$ с начальными условиями $\overline{x}(0, \alpha, \nu, \mu) = \alpha$, $\alpha \in U_{\overline{\alpha}}(\delta')$, зависимость $\nu(\alpha, \mu)$ определяется соотношением (9). Период решений T системы (1) имеет вид $T = (1+\nu(\alpha, \mu))T_0$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие изложенную теорию.

Пример 1 [11, с. 40]. Рассмотрим классическую систему «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1 x_2, \end{cases} \qquad (16)$$

в котором $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Состояние равновесия $x \equiv 0$ является решением системы (16). Так как $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$, то имеет место второй случай, $F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $\omega = 1$, $T = 2\pi$, $G(\alpha) \equiv 0$. Пусть $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $h(\mu) = -\mu^2$. Положим, $\lambda(\nu) = -\nu^2$. Получим: $s_k(\alpha, \nu, \mu) = (\mu^2 - 2\nu^2)E\alpha$, $\nu = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2}}$, $r = 2$, $k = 3$. В силу определения нормы матрицы M и периода T системы (1) число $\delta_0 \in (0; 2)$. Система уравнений $s_3(\alpha, \nu, \mu) = 0$ имеет бесконечное множество вещественных решений вида $\left(\alpha_1, \alpha_1, \pm\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \mu\right) \in K(\delta_0)$. Выберем произвольный вектор $\alpha_0 \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$, зафиксируем число $\mu_0 \in [0; \delta_0]$, вычислим $\nu_0 = \pm\frac{\mu_0}{\sqrt{2}}$, $\rho = \max\left\{\|\alpha_0\|, \left|\frac{\mu_0}{\sqrt{2}}\right|, \mu_0\right\}$, вектор $\zeta_0 = \left(\frac{\alpha_{01}}{\rho}, \frac{\alpha_{02}}{\rho}, \pm\frac{\mu_0}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\mu_0}{\rho}\right)$, найдем матрицу Якоби вектор-функции $\widetilde{s}_3(\zeta)$. Построим множество Z_1. Заметим, что при любом $\zeta_0 \in Z_1$ матрица Якоби имеет вид

$$D\widetilde{s}_3(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{2}\zeta_{0\alpha 1}\zeta_{0\mu} & 2\zeta_{0\alpha 1}\zeta_{0\mu} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2}\zeta_{0\alpha 2}\zeta_{0\mu} & 2\zeta_{0\alpha 2}\zeta_{0\mu} \end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} D\widetilde{s}_3(\zeta_0) = 1$. Разложим $\widetilde{s}_3(\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности выбранного произвольного, но фиксированного $\zeta_0 \in Z_1$. Условие существования ненулевого периодического решения системы (16) приведем к виду (12), а затем умножим слева на неособенную матрицу Q. Тогда непосредственными вычислениями получим:

$$QD\widetilde{s}_3(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{2}\zeta_{0\alpha 1}\zeta_{0\mu} & 2\zeta_{0\alpha 1}\zeta_{0\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Qp(\zeta_0, \Delta\zeta) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\left(\left(1-\sqrt{2}\right)\zeta_{0\mu}\Delta\zeta_\mu\Delta\zeta_{\alpha 1} - \zeta_{0\alpha 1}\Delta\zeta_\nu^2 + \frac{\zeta_{0\alpha 2}\Delta\zeta_\mu^2}{2}\right) \\ 4\left(1-\sqrt{2}\right)\zeta_{0\mu}\Delta\zeta_\mu\left(\Delta\zeta_{\alpha 2} - \frac{\zeta_{0\alpha 2}}{\zeta_{0\alpha 1}}\Delta\zeta_{\alpha 1}\right) \end{pmatrix}.$$

Из явного вида вектор-функции $Qp(\zeta_0, \Delta\zeta)$ следует, что для функции $\widetilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta)$ выполняется условие I теоремы 5. Выберем число $\delta_1 \in (0, \delta_0]$, построим множество $V_{\zeta_0}(\delta_1)$, зафиксируем вектор $\Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$, удовлетворяющий теореме 5, $\Delta\zeta_0 = \left(\Delta\zeta_{0\alpha 1}, \frac{\zeta_{0\alpha 2}}{\zeta_{0\alpha 1}}\Delta\zeta_{0\alpha 1}, \Delta\zeta_{0\nu}, \Delta\zeta_{0\mu}\right)$, вычислим $D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$ – матрицу Якоби вектор-функции $Qp(\zeta_0, \Delta\zeta)$ при значении $\Delta\zeta_0$, удовлетворяющем условию I. Условие существования ненулевого периодического решения системы (16) приведем к виду (14). Составим матрицу $\left(QD\widetilde{s}_3(\zeta_0) \mid D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)\right)$, непосредственно с помощью вычислений убедимся, что ее ранг равен 2. Следовательно, для системы уравнений (14) выполняются все условия теоремы 6. Выберем число $\delta'' = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Матрицу S_1, определенную формулой (15), можно сформировать несколькими способами, например, из третьего столбца матрицы $QD\widetilde{s}_3(\zeta_0)$ и второго столбца матрицы $D\widetilde{p}(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$. Тогда

$$S_1 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\zeta_{0\alpha 1}\zeta_{0\mu} & 0 \\ 0 & 4\left(1-\sqrt{2}\right)\zeta_{0\mu}\Delta\zeta_{0\mu} \end{pmatrix}.$$

Из проведенных рассуждений следует, что система (17) в окрестности состояния равновесия $x \equiv 0$ имеет множество ненулевых T-периодических решений $x(t, \alpha) = x(t, \alpha, \nu(\mu), \mu)$ с начальными условиями $x(0, \alpha, \nu(\mu), \mu) = \alpha$ при всех $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$, $T = \left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right)T_0$, $\delta_0 \in (0; 2)$, $\mu \in [0; \delta_0]$. Состояние равновесия $x \equiv 0$ является центром системы (16).

Пример 2 [2, с. 74]. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + 2x_1 x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 + 3x_1^2 x_2, \end{cases} \qquad (17)$$

в котором $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $\omega = 1$, $T = 2\pi$. Состояние равновесия $x \equiv 0$ является решением системы (17). Так как вектор-функция $f(x)$ представляет собой сумму форм второго и третьего порядков, $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ -x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix}$, то в силу утверждения 4) имеет место первый случай. Матрицу $F(x)$ можно представить двумя способами: $F(x) = \begin{pmatrix} -x_1^2 & 0 \\ 0 & 3x_1^2 \end{pmatrix}$ и $F(x) = \begin{pmatrix} -x_1^2 & 0 \\ 3x_1x_2 & 0 \end{pmatrix}$. Для обоих представлений уравнение (8) обращается в верное равенство при всех $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$, и $G(\alpha)\alpha \equiv 0$. Пусть $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $h(\mu) = -\mu^2$. Положим, $\lambda(\nu) = -\nu^2$. Получим: $s_k(\alpha, \nu, \mu) = (\mu^2 - 2\nu^2)E\alpha$. Дальнейшие рассуждения выполним так же, как в примере 1. Тогда система (17) в окрестности состояния равновесия $x \equiv 0$ имеет множество ненулевых T-периодических решений $x(t, \alpha) = x(t, \alpha, \nu(\mu), \mu)$ с начальными условиями $x(0, \alpha, \nu(\mu), \mu) = \alpha$ при всех $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$, $T = \left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right)T_0$, $\delta_0 \in (0; 2)$, $\mu \in [0; \delta_0]$. Состояние равновесия $x \equiv 0$ является центром системы (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амелькин В.В., Лукашевич Л.А., Садовский А.П.** Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
2. **Андреев А.Ф.** Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. – 160 с.
3. **Садовский А.П.** Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний // Дифференциальные уравнения. 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 236–244.
4. **Лискина Е.Ю.** О существовании периодических решений нелинейной системы дифференциальных уравнений // Математика. Компьютер. Образование: сб. науч. тр. / под ред. Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 2000. – Вып. 7. – Ч. II. – С. 460–465.
5. **Лискина Е.Ю**. Достаточные условия существования семейства периодических решений системы дифференциальных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2001. – № 5. – С.78–85.
6. **Лискина Е.Ю**. Задача о нахождении числа семейств малых периодических решений неавтономной системы дифференциальных уравнений // Математика. Компьютер. Образование: сб. науч. тр. / под ред. Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 2004. – Вып. 11. – Ч. II. – С. 474–480.
7. **Лискина Е.Ю.** О достаточных условиях существования центра нелинейной динамической системы второго порядка // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2007. № 12. С. 32–38.
8. **Лискина Е.Ю.** Достаточные условия существования центра нелинейной динамической системы второго порядка // Математика. Компьютер. Образование: сб. науч. тр. / под редакцией Г.Ю. Ризниченко. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. – Т. 2. – С. 38–45.
9. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
10. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
11. **Базыкин А.**Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.

Лискина Екатерина Юрьевна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: e.liskina@rsu.edu.ru