УДК 517.977

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБРИДНЫХ ФУНЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ГФДСП). III

А.С. Ларионов, П.М. Симонов
Братский государственный университет,
Пермский государственный национальный исследовательский университет

STABILITY OF HYBRID FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT (HFDSA). III

A.S. Larionov, P.M. Simonov

Рассматривается гибридная система фунционально-дифференциальных уравнений. Получены условия её разрешимости в парах пространств. Рассмотрены простые примеры.

Ключевые слова: гибридная система фунционально-дифференциальных уравнений, устойчивость, метод модельных уравнений.

The hybrid system of the functional differential equations is considered. Conditions of its resolvability in couple of spaces are received. Simple examples are considered.

Keywords: hybrid system of functional differential equations, stability, model equations' method.

1. Введение

Исследование продолжает работы [1–3].

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [4] позволила дать ясное и лаконичное описание их основных свойств. В то же время широкие и актуальные для приложений классы ГФДСП, а именно, гибридных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГФДУП), формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости.

2. Постановка задачи: одно уравнение – линейное разностное, определенное на полуоси, а другое – линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием (ЛФДУП) на полуоси. Сводим к ЛФДУП на полуоси.

Запишем гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x+\mathcal{L}_{12}y&=\dot{x}-F_{11}x-F_{12}y=f,\\ \mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}y&=\Delta y-F_{21}x-F_{22}y=g. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов $\alpha=\mathrm{col}\{\alpha^1,...,\alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f,g,y:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]}=\int\limits_0^T\|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}dt$ для всех $T>0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]}=\|\dot{x}\|_{L[0,T]}+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T>0$. Операторы $\mathcal{L}_{11},F_{11}:D\to L$, $\mathcal{L}_{12},F_{12}:L\to L$, $\mathcal{L}_{21},F_{21}:D\to L$, $\mathcal{L}_{22},F_{22}:L\to L$ предполагаются линейными, непрерывными и вольтерровыми.

Обозначим $(\Delta y)(t)=y(t)-y(t-h)$, где $t\ge h>0$, и $(\Delta y)(t)=y(t), t\in[0,h)$.

Пусть модельное уравнений [4–7] $\mathcal{L}_{11}x=z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B\subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Например, $\sup\limits_{t\ge0}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$. Тогда, полагая, что $\mathcal{L}_{11}x\overset{def}{=}\dot{x}+x=z$, принимаем в качестве банахова пространства B банахово пространство L_∞ измеримых и ограниченных в существенном функций $z:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\ge0}\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$. Пространство $D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (\mathcal{W}z)(t) + (\mathcal{U}\alpha)(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} z(s)ds + \alpha e^{-t}$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}^n,\ z \in L_\infty).$$

Эти решения ограничены ($\sup_{t\ge 0} \| x(t) \|_{\mathbb{R}^n} < \infty$) и их производная $\dot{x} = -x + z$ принадлежит пространству L_∞. Все решения этого уравнения образуют банахово пространство с нормой $\| x \|_{D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty)} = = \operatorname{vrai}\sup_{t\ge 0} \| \dot{x}(t) + x(t) \|_{\mathbb{R}^n} + \| x(0) \|_{\mathbb{R}^n} < \infty$, которое линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_\infty^{(1)}[0,\infty)$ с нормой $\| x \|_{W_\infty^{(1)}[0,\infty)} = \sup_{t\ge 0} \| x(t) \|_{\mathbb{R}^n} + + \operatorname{vrai}\sup_{t\ge 0} \| \dot{x}(t) \|_{\mathbb{R}^n}$. Дальше будем это пространство обозначать как W_∞, при этом $W_\infty \subset D$, и это вложение непрерывно. Аналогично для банахова пространства $B \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ с нормой $\| x \|_{D(\mathcal{L}_{11}, B)} = = \| \dot{x} + x \|_B + \| x(0) \|_{\mathbb{R}^n}$, где вложение $B \subset L$ непрерывно.

Допустим, оператор $\mathcal{W}$ действует из пространства B в пространство B и оператор $\mathcal{U}$ действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство B. Это условие эквивалентно тому [4–7], что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}[0,\infty)$ с нормой $\| x \|_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = =\| \dot{x} \|_B + \| x \|_B$. Дальше будем это пространство обозначать как W_B, при этом, $W_B \subset D$ и это вложение непрерывно.

Операторы $\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{21}, F_{11}, F_{12} : D \to L$ рассматриваются как приведения на пару (W_B, B): $\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{21}, F_{11}, F_{21} : W_B \to B$. Операторы

$$\Delta y, \mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{22}, F_{12}, F_{22} : L \to L$$

также рассматриваются как приведения на пару (B, B): $\Delta y, \mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{22}, F_{12}, F_{22} : B \to B$, предполагаются линейными, вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11}x = f$ для $f \in L$ принадлежит пространству D и представляется формулой Коши:

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s) f(s) ds.$$

Будем считать, что оператор $\mathcal{L}_{22} : L \to L$ вольтеррово обратим, то есть существует $\mathcal{L}_{22}^{-1} : L \to L$ и оператор $\mathcal{L}_{22}^{-1} : L \to L$ вольтерров.

Поставим задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times B$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times B$.

Рассмотрим второе уравнения $\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = g$. Предположим, что оператор $\mathcal{L}_{22} : B \to B$ вольтеррово обратим. Тогда это уравнение запишется в виде $\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x + y = \mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Выразим y: $y = = -\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}^{-1}g$ и подставим в первое уравнение $\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = f$: $(\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$.

Обозначим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}$ и $f_1 = f - -\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Получили уравнение $\mathcal{L}x = f_1$. Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L} : W_B \to B$ вольтеррово обратим, то есть если для уравнения $\mathcal{L}x = f_1$ при любом $f_1 \in B$ его решения $x \in W_B$ и оператор $\mathcal{L}^{-1} : B \to W_B^0$ вольтерров, где $W_B^0 = \{x \in W_B, x(0) = 0\}$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times B$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times B$.

Пример 1. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) + (\mathcal{L}_{12}x)(t) = \dot{x}(t) + ax(t-\tau) + by(t) = f(t),$$
$$t \ge 0,\ \ x(\xi) = 0,\ \ \xi < 0,$$
$$x_\tau(t) = x(t-\tau),\ t > \tau,\ x_\tau(t) = 0,\ 0 \le t < \tau,$$
$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) + (\mathcal{L}_{12}y)(t) =$$
$$= \dot{x}(t) + ax_\tau(t) + by(t) = f(t),\ t \ge 0,$$
$$f \in L_\infty,\ x, \dot{x} \in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty) \cong W_{L_\infty} \Leftrightarrow 0 < a\tau < \pi/2, \tag{2}$$
$$y(t) - dy(t-h) + cx(t) = g(t),\ y \in L_\infty,\ g \in L_\infty,\ t \ge 0,$$
$$y(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0),$$
$$(Sy)(t) = dy(t-h),\ t \ge h,\ (Sy)(t) = 0,\ t \in [0, h).$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t) + (\mathcal{L}_{22}y)(t) =$$
$$= cx(t) + y(t) - (Sy)(t) = g_1(t),\ t \ge 0,$$
$$g_1(t) = g(t) + d\varphi(t-h)\chi_{[0,h)},\ t \ge 0.$$

Рассмотрим оператор $S : L_\infty \to L_\infty$. Известно, что оператор $(I - S) : L_\infty \to L_\infty$ вольтеррово обратим тогда и только тогда, если спектральный радиус оператора $\rho_{L_\infty}(S)$ в пространстве L_∞ меньше единицы: $\rho_{L_\infty}(S) < 1$ [8 (4.2.3, 4.4.3), 9]. Для оператора S условие $\rho_{L_\infty}(S) < 1$ эквивалентно неравенству $|d| < 1$ [9].

Введем обозначения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) = \dot{x}(t) + ax_\tau(t),\ (\mathcal{L}_{12}y)(t) = by(t),$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t) = cx(t),\ (\mathcal{L}_{22}y)(t) = y(t) - (Sy)(t).$$

Выполним преобразование

$$\mathcal{L}x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g_1 = f_1.$$

Запишем в исходных терминах

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) + ax_\tau(t) - bc((I-S)^{-1}x)(t) =$$
$$= f(t) - b((I-S)^{-1}g_1)(t) = f_1(t),\ t \in [0, \infty). \tag{3}$$

Подействуем оператором $(I - S) : L_\infty \to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t) - (S\dot{x})(t) + ax_\tau(t) - bcx(t) - -a(Sx_\tau)(t) = f_2(t) = f_1(t) - (Sf_1)(t)$, $t \in [0, \infty)$. Соответствующий характеристический многочлен имеет вид $\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 e^{-\lambda\tau} + \alpha_3\lambda e^{-\lambda(h+\tau)} + \alpha_4\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1 = -bc$, $\alpha_2 = a$, $\alpha_3 = -ad$, $\alpha_4 = -d$.

Возьмем уравнение (3) $(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)-$ $-bc((I-S)^{-1}x)(t)=f_1(t)$. Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0x)(t)=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)=z(t)$, применим для него формулу Коши

$$x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)z(s)ds\,.$$

Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc(I-S)^{-1}x$. Тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)((I-S)^{-1}x)(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора

$$\| C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sup_{t\geq 0}\int_0^t |C_{a,\tau}(t,s)|ds\,|.$$

Из результатов С.А. Гусаренко [10] следует $\| C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sigma(\tau)/a \Leftrightarrow 0<a\tau<\pi/2$, $\sigma(\tau)=$ $=\| C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}$, при этом, $\sigma(\tau)=\| C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0<\tau<1/e$. Получим, что при $0<a\tau<\pi/2$ уравнение (3) будет $D(\mathcal{L}_0,L_\infty)$-устойчиво, если $|bc|<a(1-|d|)/\sigma(\tau)$. Отсюда следует, что для любого $f_1\in L_\infty$ решение $x\in L_\infty$ и его производная $\dot{x}\in L_\infty$, то есть $x\in W_\infty$.

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (2) при любом $\{f,g\}\in L_\infty\times L_\infty$ ее решения $\{x,y\}\in W_\infty\times L_\infty$.

Пример 2. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}x)(t)=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+$$
$$+by(t)=f(t),\ t\geq 0,\ x(\xi)=0,\ \xi<0,$$
$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}x)(t)=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)+$$
$$+by(t)=f(t),\ t\geq 0,$$
$$f\in L_\infty,\ x,\dot{x}\in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow\{a_1,a_2\}\in\Delta$$

(Δ – угол Андронова – Майера на комплексной плоскости [11]),

$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\geq 0.$$

Введем обозначения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)\,,\ (\mathcal{L}_{12}y)(t)=by(t)\,,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)=cx(t)\,,\ (\mathcal{L}_{22}y)(t)=y(t)-(Sy)(t)\,.$$

Выполним преобразование

$$\mathcal{L}x=(\mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x=f-\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g_1=f_1\,.$$

Запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)-bc((I-S)^{-1}x)(t)$$
$$=f(t)-b((I-S)^{-1}g_1)(t)=f_1(t)\,,\ t\in[0,\infty)\,.$$

Подействуем оператором $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}(t-h)+(a_1-bc)x(t)+$ $+a_2x_\tau(t)-a_1dx_h(t)-a_2dx_{h+\tau}(t)=f_2(t),\ t\geq 0$. Соответствующий характеристический многочлен имеет вид $\lambda+\alpha_1+\alpha_2e^{-\lambda\tau}+\alpha_3e^{-\lambda h}+\alpha_4e^{-\lambda(h+\tau)}+$ $+\alpha_5\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a_1-bc$, $\alpha_2=a_2$, $\alpha_3=-a_1d$, $\alpha_4=-a_2d$, $\alpha_4=-d$.

Примем за модельное уравнение

$$(\mathcal{L}_0x)(t)=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)=z(t),\ t\geq 0.$$

Обозначим через $C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)$ функцию Коши модельного уравнения. Сделаем в модельном уравнении подстановку $x(t)=y(t)e^{-a_1t}$, $z(t)=g(t)e^{-a_1t}$, $a_1>0$. Тогда модельное уравнение примет вид $\dot{y}(t)+a_2e^{a_1\tau}y_\tau(t)=g(t),\ t\geq 0$. Возьмем $p=a_2e^{a_1\tau}$, обозначим через $W_{p,\tau}(t,s)$ функцию Коши этого уравнения. Из результатов С.А. Гусаренко [10] следует, что $\| W_{p,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sigma(\tau)/p\Leftrightarrow 0<p\tau<\pi/2$. Отсюда получим

$$\| C_{a_1,a_2,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\| W_{p,\tau}\|_{L_\infty\to C}/a_1=\sigma(\tau)/(a_1p)\,.$$

Положим $x(0)=0$, $z=f_1+bc(I-S)^{-1}x$, тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)((I-S)^{-1}x)(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора, стоящего справа. Она меньше 1, если $0<p=a_2e^{a_1\tau}<\pi/2$ и $a_1>0$, и выполняется неравенство

$$|bc|<a_1p(1-|d|)/\sigma(\tau)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow|bc|<a_1a_2e^{a_1\tau}(1-|d|)/\sigma(\tau)\,.$$

Пример 3. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+ax(t)+by_\tau(t)=f(t),\ t\geq 0,$$
$$f\in L_\infty,\ x,\dot{x}\in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow a>0,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\geq 0,$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax(t)-$$
$$-bc((I-S)^{-1}x)_\tau(t)=f_1(t),\ t\geq 0. \qquad (4)$$

С помощью оператора $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}_h(t)+ax(t)-bcx_\tau(t)-$ $-adx_h(t)=f_2(t),\ t\geq 0$. Соответствующий характеристический многочлен (квазиполином) имеет вид $\lambda+\alpha_1+\alpha_2e^{-\lambda\tau}+\alpha_3e^{-\lambda h}+\alpha_4\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a$, $\alpha_2=-bc$, $\alpha_3=-ad$, $\alpha_4=-d$.

Рассмотрим уравнение (4)

$$(\mathcal{L}x)(t)\ =\ \dot{x}(t)+ax(t)-bc((I-S)^{-1}x)_\tau(t)=f_1(t)\,.$$

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0x)(t)=$ $=\dot{x}(t)+ax(t)=z(t)$, применим для него формулу Коши $x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C(t,s)z(s)ds$, где $C(t,s)=e^{-a(t-s)}$, $X(t)=e^{-at}$. Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc((I-S)^{-1}x)_\tau$. Тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C(t,s)((I-S)^{-1}x)_\tau(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора, стоящего справа, она будет меньше 1, если $|bc|< a(1-|d|)$.

Пример 4. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+ax(t)+by(t)=f(t),\ t\geq 0,$$
$$f\in L_\infty, x,\dot{x}\in L_\infty, D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow a>0,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx_\tau(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\geq 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax(t)-$$
$$-bc((I-S)^{-1}x_\tau)(t)=f_1(t),t\geq 0. \qquad (5)$$

Подействуем оператором $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}_h(t)+ax(t)-bcx_\tau(t)-$ $-adx_h(t)=f_2(t),\ t\geq 0.$ Соответствующий характеристический многочлен (квазиполином) имеет вид $\lambda+\alpha_1+\alpha_2e^{-\lambda\tau}+\alpha_3e^{-\lambda h}+\alpha_4\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a$, $\alpha_2=-bc$, $\alpha_3=-ad$, $\alpha_4=-d$.

Уравнение (5) исследуется так же, как и уравнение (4). Оценим норму оператора, стоящего справа: она будет меньше 1 при $|bc|< a(1-|d|)$.

Пример 5. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+ax(t)+by_{\tau_1}(t)=f(t),\ t\geq 0,$$
$$f\in L_\infty, x,\dot{x}\in L_\infty, D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow a>0,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx_{\tau_2}(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\geq 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax(t)-$$
$$-bc((I-S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}(t)=f_1(t),t\geq 0. \qquad (6)$$

Подействуем оператором $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}_h(t)+ax(t)-adx_h(t)-$ $-bcx_{\tau_1+\tau_2}(t)=f_2(t),\ t\geq 0.$ Соответствующий характеристический многочлен (квазиполином) имеет вид $\lambda+\alpha_1+\alpha_2e^{-\lambda h}+\alpha_3e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}+\alpha_4\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a$, $\alpha_2=-ad$, $\alpha_3=-bc$, $\alpha_4=-d$.

Рассмотрим уравнение (6)

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax(t)-bc((I-S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}(t)=f_1(t).$$

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0x)(t)=$ $=\dot{x}(t)+ax(t)=z(t),$ используем для него формулу Коши $x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C(t,s)z(s)ds$, где $X(t)=e^{-at}$, $C(t,s)=e^{-a(t-s)}$. Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc((I-S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}$, тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C(t,s)((I-S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора, стоящего справа: она будет меньше 1, если $|bc|< a(1-|d|)$.

Пример 6. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)+by_{\tau_1}(t)=f(t),\ t\geq 0,$$
$$f\in L_\infty,\ x,\dot{x}\in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow 0< a\tau<\pi/2,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\geq 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)-$$
$$-bc((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}(t)=f_1(t),t\geq 0. \qquad (7)$$

Подействуем оператором $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}_h(t)+ax_\tau(t)-bcx_{\tau_1}(t)$ $-adx_{\tau+h}(t)=f_2(t),\ t\geq 0.$ Соответствующий характеристический многочлен (квазиполином) имеет вид $\lambda+\alpha_1e^{-\lambda\tau}+\alpha_2e^{-\lambda\tau_1}+\alpha_3e^{-\lambda(\tau+h)}+\alpha_4\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a$, $\alpha_2=-bc$, $\alpha_3=-ad$, $\alpha_4=-d$.

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0x)(t)=$ $=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)=z(t),$ используем для него формулу Коши $x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)z(s)ds$.

Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}$. Тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора

$$\|C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sup_{t\geq 0}\int_0^t|C_{a,\tau}(t,s)|ds|.$$

Из результатов С.А. Гусаренко [10] следует $\|C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sigma(\tau)/a \Leftrightarrow 0< a\tau<\pi/2,$ $\sigma(\tau)=$ $=\|C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}$, при этом $\sigma(\tau)=\|C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}=1$ $\Leftrightarrow 0<\tau<1/e$. Получаем, что уравнение (7) при $0< a\tau<\pi/2$ будет $D(\mathcal{L}_0,L_\infty)$-устойчиво, если $|bc|< a(1-|d|)/\sigma(\tau)$.

Пример 7. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)+by(t)=f(t),\ t\geq 0,$$
$$f\in L_\infty,\ x,\dot{x}\in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow 0< a\tau<\pi/2,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx_{\tau_1}(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\geq 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)-$$
$$-bc((I-S)^{-1}x_{\tau_1})(t)=f_1(t),t\geq 0. \qquad (8)$$

Подействуем оператором $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}_h(t)+ax_\tau(t)-$ $-bcx_{\tau_1}(t)-adx_{\tau+h}(t)=f_2(t),t\geq 0.$ Соответствующий характеристический многочлен имеет вид

$\lambda+\alpha_1 e^{-\lambda\tau}+\alpha_2 e^{-\lambda\tau_1}+\alpha_3 e^{-\lambda(\tau+h)}+\alpha_4\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a$, $\alpha_2=-bc$, $\alpha_3=-ad$, $\alpha_4=-d$.

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0 x)(t)=$ $=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)=z(t),$ используем для него формулу Коши $x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)z(s)ds$.

Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc(I-S)^{-1}x_{\tau_1}$. Тогда

$$=bc\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)((I-S)^{-1}x_{\tau_1})(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора

$$\| C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sup_{t\ge 0}\int_0^t |C_{a,\tau}(t,s)|ds.$$

Из результатов С.А. Гусаренко [10] следует $\| C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sigma(\tau)/a \Leftrightarrow 0<a\tau<\pi/2,$ $\sigma(\tau)=$ $=\| C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}$, при этом $\sigma(\tau)=\| C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0<\tau<1/e$. Получим, что уравнение (8) при $0<a\tau<\pi/2$ будет $D(\mathcal{L}_0,L_\infty)$-устойчиво, если $|bc|<a(1-|d|)/\sigma(\tau)$.

Пример 8. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)+by_{\tau_1}(t)=f(t),\ t\ge 0,$$
$$f\in L_\infty,\ x,\dot{x}\in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow 0<a\tau<\pi/2,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx_{\tau_2}(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\ge 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)-$$
$$-bc((I-S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}(t)=f_1(t), t\ge 0. \quad (9)$$

Подействуем оператором $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}_h(t)+ax_\tau(t)-adx_{\tau+h}(t)-$ $-bcx_{\tau_1+\tau_2}(t)=f_2(t),\ t\ge 0.$ Соответствующий характеристический многочлен (квазиполином) имеет вид $\lambda+\alpha_1 e^{-\lambda\tau}+\alpha_2 e^{-\lambda(\tau+h)}+\alpha_3 e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}+\alpha_4\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a$, $\alpha_2=-ad$, $\alpha_3=-bc$, $\alpha_4=-d$.

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0 x)(t)=$ $=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)=z(t),$ используем для него формулу Коши $x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)z(s)ds$.

Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc((I-S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}$. Тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C_{a,\tau}(t,s)((I-S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора

$$\| C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sup_{t\ge 0}\int_0^t |C_{a,\tau}(t,s)|ds.$$

Из результатов С.А. Гусаренко [10] следует $\| C_{a,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sigma(\tau)/a \Leftrightarrow 0<a\tau<\pi/2,$ $\sigma(\tau)=$ $=\| C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}$, при этом $\sigma(\tau)=\| C_{1,\tau}\|_{L_\infty\to C}=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0<\tau<1/e$. Получим, что уравнение (9) при $0<a\tau<\pi/2$ будет $D(\mathcal{L}_0,L_\infty)$-устойчиво, если $|bc|<a(1-|d|)/\sigma(\tau)$.

Пример 9. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)+by_{\tau_1}(t)=f(t),\ t\ge 0,$$
$$f\in L_\infty,\ x,\dot{x}\in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Leftrightarrow\{a_1,a_2\}\in\Delta,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)(t)=$$
$$=cx(t)+y(t)-(Sy)(t)=g_1(t),\ t\ge 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t)=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)-$$
$$-bc((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}(t)=f_1(t), t\ge 0.$$

Подействуем оператором $(I-S):L_\infty\to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t)-d\dot{x}_h(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)-$ $-a_1dx_h(t)-a_2dx_{h+\tau}(t)-bcx_{\tau_1}(t)=f_2(t),\ t\ge 0.$ Соответствующий характеристический многочлен имеет вид $\lambda+\alpha_1+\alpha_2 e^{-\lambda\tau}+\alpha_3 e^{-\lambda h}+\alpha_4 e^{-\lambda(h+\tau)}+$ $+\alpha_5 e^{-\lambda\tau_1}+\alpha_6\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1=a_1$, $\alpha_2=a_2$, $\alpha_3=-a_1d$, $\alpha_4=-a_2d$, $\alpha_5=-bc$, $\alpha_6=-d$.

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0 x)(t)=$ $=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)=z(t),$ используем для этого уравнения формулу Коши $x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)z(s)ds$. Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}$. Тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора

$$\| C_{a_1,a_2,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sup_{t\ge 0}\int_0^t |C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)|ds.$$

Из результатов С.А. Гусаренко [10] и вышеизложенного следует: $p=a_2e^{a_1\tau}$, $W_{p,\tau}(t,s)$, $\| W_{p,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\sigma(\tau)/p \Leftrightarrow 0<p\tau<\pi/2,$

$$\| C_{a_1,a_2,\tau}\|_{L_\infty\to C}=\| W_{p,\tau}\|_{L_\infty\to C}/a_1=\sigma(\tau)/(a_1p).$$

Положим, $x(0)=0$, $z=f_1+bc((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}$. Тогда

$$x(t)=bc\int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)((I-S)^{-1}x)_{\tau_1}(s)ds+f_3(t).$$

Оценим норму оператора, стоящего справа: она будет меньше 1, если $0<p=a_2e^{a_1\tau}<\pi/2$, $a_1>0$ и выполняется неравенство

$$|bc|<a_1p(1-|d|)/\sigma(\tau)\Leftrightarrow|bc|<a_1a_2e^{a_1\tau}(1-|d|)/\sigma(\tau).$$

Пример 10. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)(t)=$$
$$=\dot{x}(t)+a_1x(t)+a_2x_\tau(t)+by(t)=f(t),\ t\ge 0,$$

$$f \in L_\infty,\, x, \dot{x} \in L_\infty,\, D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty) \cong W_{L_\infty} \Leftrightarrow \{a_1, a_2\} \in \Delta,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t) + (\mathcal{L}_{22}y)(t) =$$
$$= cx_{\tau_1}(t) + y(t) - (Sy)(t) = g_1(t),\ t \ge 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах:
$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) -$$
$$- bc((I - S)^{-1}x_{\tau_1})(t) = f_1(t),\ t \ge 0.$$

Подействуем оператором $(I - S): L_\infty \to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t) - d\dot{x}_h(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) - a_1dx_h(t) - a_2dx_{h+\tau}(t) - bcx_{\tau_1}(t) = f_2(t),\ t \ge 0$. Соответствующий характеристический многочлен имеет вид $\lambda + \alpha_1 + \alpha_2e^{-\lambda\tau} + \alpha_3e^{-\lambda h} + \alpha_4e^{-\lambda(h+\tau)} + \alpha_5e^{-\lambda\tau_1} + \alpha_6\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, $\alpha_3 = -a_1d$, $\alpha_4 = -a_2d$, $\alpha_5 = -bc$, $\alpha_6 = -d$.

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0x)(t) = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) = z(t)$, применим для этого уравнения формулу Коши $x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)z(s)ds$.

Оценим норму оператора
$$\| C_{a_1,a_2,\tau} \|_{L_\infty \to C} = \sup_{t \ge 0} \int_0^t | C_{a_1,a_2,\tau}(t,s) | ds .$$

Из результатов С.А. Гусаренко [10] и вышеизложенного следует: $p = a_2e^{a_1\tau}$, $W_{p,\tau}(t,s)$, $\| C_{a_1,a_2,\tau} \|_{L_\infty \to C} = \| W_{p,\tau} \|_{L_\infty \to C} / a_1 = \sigma(\tau)/(a_1p)$. Положим, $x(0) = 0$, $z = f_1 + bc(I - S)^{-1}x_{\tau_1}$. Тогда $x(t) = bc\int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)((I - S)^{-1}x_{\tau_1})(s)ds + f_3(t)$. Оценим норму оператора, стоящего справа: она будет меньше 1, если $0 < p = a_2e^{a_1\tau} < \pi/2$, $a_1 > 0$ и выполняется неравенство $|bc| < a_1p(1 - |d|)/\sigma(\tau) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |bc| < a_1a_2e^{a_1\tau}(1 - |d|)/\sigma(\tau)$.

Пример 11. Рассмотрим два уравнения:
$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) + (\mathcal{L}_{12}y)(t) =$$
$$= \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) + by_{\tau_1}(t) = f(t),\ t \ge 0,$$
$$f \in L_\infty,\, x, \dot{x} \in L_\infty,\, D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty) \cong W_{L_\infty} \Leftrightarrow \{a_1, a_2\} \in \Delta,$$
$$(\mathcal{L}_{21}x)(t) + (\mathcal{L}_{22}y)(t) =$$
$$= cx_{\tau_2}(t) + y(t) - (Sy)(t) = g_1(t),\ t \ge 0.$$

Как и ранее, запишем в исходных терминах: $(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) - bc((I - S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}(t) = f_1(t),\ t \ge 0$. Подействуем оператором $(I - S)$: $L_\infty \to L_\infty$, получим уравнение $\dot{x}(t) - d\dot{x}_h(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) - a_1dx_h(t) - a_2dx_{h+\tau}(t) - bcx_{\tau_1+\tau_2}(t) = f_2(t)$, $t \ge 0$. Соответствующий характеристический многочлен имеет вид $\lambda + \alpha_1 + \alpha_2e^{-\lambda\tau} + \alpha_3e^{-\lambda h} + \alpha_4e^{-\lambda(h+\tau)} + \alpha_5e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)} + \alpha_6\lambda e^{-\lambda h}$, где $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, $\alpha_3 = -a_1d$, $\alpha_4 = -a_2d$, $\alpha_5 = -bc$, $\alpha_6 = -d$.

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_0x)(t) = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) = z(t)$, применим для этого уравнения формулу Коши $x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)z(s)ds$.

Оценим норму оператора
$$\| C_{a_1,a_2,\tau} \|_{L_\infty \to C} = \sup_{t \ge 0} \int_0^t | C_{a_1,a_2,\tau}(t,s) | ds .$$

Из результатов С.А. Гусаренко [10] и вышеизложенного следует: $p = a_2e^{a_1\tau}$, $W_{p,\tau}(t,s)$,
$$\| W_{p,\tau} \|_{L_\infty \to C} = \sigma(\tau)/p \Leftrightarrow 0 < p\tau < \pi/2,$$
$$\| C_{a_1,a_2,\tau} \|_{L_\infty \to C} = \| W_{p,\tau} \|_{L_\infty \to C} / a_1 = \sigma(\tau)/(a_1p) .$$
Положим, $x(0) = 0$, $z = f_1 + bc((I - S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}$. Тогда тогда
$$x(t) = bc\int_0^t C_{a_1,a_2,\tau}(t,s)((I - S)^{-1}x_{\tau_2})_{\tau_1}(s)ds + f_3(t).$$
Оценим норму оператора, стоящего справа: она будет меньше 1, если $0 < p = a_2e^{a_1\tau} < \pi/2$, $a_1 > 0$ и выполняется неравенство
$$|bc| < a_1p(1 - |d|)/\sigma(\tau) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |bc| < a_1a_2e^{a_1\tau}(1 - |d|)/\sigma(\tau).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ларионов А.С., Симонов П.М.** Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Тематический номер «Дифференциальные уравнения». – 2013. – Т. 13. – № 4. – С. 34–37.
2. **Симонов П.М.** Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18. – Вып. 5. – С. 2670–2672.
3. **Ларионов А.С., Симонов П.М**. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II // Вестник РАЕН. Тематический номер «Дифференциальные уравнения». – 2014. – Т. 14. – № 5. – С. 38–45.
4. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.

5. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 4. – С. 555–562.
6. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 196–204.
7. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 6/421. – С. 3–16.
8. **Курбатов В.Г.** Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. – 168 с.
9. **Курбатов В.Г.** О спектре оператора суперпозиции. – Воронеж, 1979. – 21 с. Деп. в ВИНИТИ 05.12.79, № 4317–79.
10. **Гусаренко С.А.** Признаки разрешимости задач о накоплении возмущений для функционально-дифференциальных уравнений // Функционально-дифференциальные уравнения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1987. – С. 30–40.
11. **Андронов А.А., Майер А.Г.** Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1946. – Т. 7. – № 2, 3. – С. 95–106.

Ларионов Александр Степанович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики Братского государственного университета
665709, Иркутская область, г. Братск, ул. Макаренко, д. 40.
тел.: +7(3953)32-53-84, e-mail: larios84@yandex.ru