УДК 517.95

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДИВЕРГЕНТНОГО И НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

А.Н. Конёнков
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

A RELATION BETWEEN FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF PARABOLIC EQUATIONS WITH ONE SPACE VARIABLE OF DIVERGENT AND NON-DIVERGENT FORM

A.N. Konenkov

Получена формула, связывающая фундаментальные решения для равномерно-параболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной дивергентного и недивергентного видов.

Ключевые слова: параболические уравнения, фундаментальное решение , анизотропные пространства Гёльдера.

We obtain a formula relating fundamental solutions for uniformly parabolic second-order equations with one space variable of divergent and non-divergent form.

Keywords: parabolic equations, fundamental solution, anisotropic Hölder spaces.

Хорошо известны оценки фундаментальных решений (ф.р.) для параболических уравнений второго порядка, если коэффициенты удовлетворяют условию Гёльдера [1]. М.И. Матийчук и С.Д. Эйдельман [2] построили классическое ф.р. для случая, когда модуль непрерывности коэффициентов уравнения дважды удовлетворяет условию Дини.

Для параболических уравнений дивергентного вида существуют ф.р., удовлетворяющие уравнению в обобщенном смысле, при меньших требованиях на гладкость коэффициентов. В случае, когда уравнение содержит только главную часть, Д. Аронсон [3] установил двусторонние оценки ф.р., зависящие от размерности пространства и константы параболичности, но не зависящие от характера гладкости коэффициентов. Ф.О. Порпером и С.Д. Эйдельманом [4] подробно изучены ф.р. при наличии младших членов в уравнении. В частности, ими получены различные оценки ф.р., в том числе двусторонние, при различных предположениях относительно младших коэффициентов.

В настоящей работе рассматриваются фундаментальные решения для параболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной. Получена формула, связывающая первые производные для ф.р. дивергентного и недивергентного видов. Явный вид зависимости позволяет делать заключения о гладкости ф.р. для уравнений дивергентного вида, если есть соответствующая оценка для ф.р. недивергентного вида и наоборот. В качестве примера мы получаем оценку для разности первой производной по пространственной переменной ф.р. для уравнения дивергентного вида. Коэффициенты предполагаются принадлежащими анизотропному пространству Гёльдера. Кроме константы параболичности, постоянные в неравенстве зависят от норм коэффициентов в пространстве Гельдера.

Обозначим через D полосу в R^2: $D=\{(x,t)\in\mathsf{R}^2 \mid 0<t<T<\infty\}$ и для $\tau\in[0,T)$ положим $D_\tau = D\cap\{t>\tau\}$.

Будем рассматривать анизотропные пространства Гёльдера $C^{0,\alpha}(\overline{D})$, $0<\alpha<1$, с нормой

$$\| f,D\|^{(0,\alpha)} = \sup_{(x,t)\in D} |f(x,t)| +$$

$$+ \sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in D\\ |\Delta x|+|\Delta t|\neq 0}} \frac{|(f(x+\Delta x,t+\Delta t)-f(x,t))|}{|\Delta x|^{\alpha}+|\Delta t|^{\alpha/2}}.$$

В полосе D рассмотрим параболический оператор

$$L=\partial_t - a(x,t)\partial_x^2 - b(x,t)\partial_x, \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

$$a(x,t)\ge\delta>0,\quad \forall (x,t)\in\overline{D}; \tag{2}$$

$$a,b\in C^{0,\alpha}(\overline{D}). \tag{3}$$

Как известно [5], при этих условиях существует единственное фундаментальное решение задачи Коши $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ для оператора L.

Для фундаментального решения имеет место представление [5]:

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau) = Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)) + W(x,t,\xi,\tau),$$

$$Z(x,t;a) = (4\pi t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{4at}\right\}\theta(t),$$

где θ – функция Хевисайда, W – слагаемое, имеющее слабую особенность по сравнению с Z [5], выбирается так, чтобы Γ удовлетворяло уравнению (1) по (x,t) при $t>\tau$.

Нам понадобятся следующие оценки при $0\le\tau<t\le T, \forall x,\xi\in\mathbb{R}$ [1, с. 409]:

$$\left|\partial_x^k Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)))\right| \le$$

$$\le C_k(t-\tau)^{-(|k|+1)/2}\exp\left\{-c_k\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}; \quad (4)$$

$$\left|\Delta_y\partial_x^k Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)))\right| \le$$

$$\le C_k\,|\Delta y|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-(|k|+1)/2}\exp\left\{-c_k\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}. \quad (5)$$

Обозначим

$$K(x,t,\xi,\tau) = -L_{(x,t)}Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)).$$

Из (4) вытекает, что для $K(x,t,\xi,\tau)$ имеет место оценка

$$\left|K(x,t,\xi,\tau)\right| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{(\alpha-3)/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}. \quad (6)$$

Лемма 1. Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (2) и (3). Тогда имеют место равенства:

$$W(x,t,\xi,\tau) =$$

$$= \int_\tau^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x,t,y,\lambda)K(y,\lambda,\xi,\tau)dyd\lambda. \quad (7)$$

Доказательство. Зафиксируем точку (ξ,τ), $\xi\in\mathbb{R}, \tau\in[0,T)$. Для $\varepsilon\in(0,T-\tau)$ в полосе $D\cap\{\tau+\varepsilon<t<T\}$ рассмотрим задачу Коши по переменным (x,t):

$$\begin{cases} Lu(x,t) = -K(x,t,\xi,\tau), (x,t)\in D_{\tau+\varepsilon}, \\ u|_{t=\tau+\varepsilon} = Z(x-\xi,\varepsilon;a(\xi,\tau)). \end{cases} \quad (8)$$

Единственным ограниченным решением этой задачи является функция $u(x,t) = Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau))$. Поэтому для Z имеет место представление в виде суммы объемного потенциала и потенциала типа Пуассона при $t\in(\tau+\varepsilon,T]$:

$$Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\Gamma(x,t,y,\tau+\varepsilon)Z(y-\xi,\varepsilon;a(\xi,\tau))dy =$$

$$= -\int_{\tau+\varepsilon}^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x,t,y,\lambda)K(y,\lambda,\xi,\tau)dyd\lambda.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получаем

$$Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x,t,y,\tau+\varepsilon)Z(y-\xi,\varepsilon;a(\xi,\tau))dy -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\tau+\varepsilon}^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x,t,y,\lambda)K(y,\lambda,\xi,\tau)dyd\lambda =$$

$$= \Gamma(x,t,\xi,\tau) - \int_\tau^t\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x,t,y,\lambda)K(y,\lambda,\xi,\tau)dyd\lambda.$$

Откуда и следует (7).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (2) и (3). Тогда для фундаментального решения $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ этого оператора имеет место оценка

$$|\Gamma(x,t,\xi+\Delta\xi,\tau) - \Gamma(x,t,\xi,\tau)| \le$$

$$\le C\,|\Delta\xi|^{\alpha/2}\,(t-\tau)^{-\alpha/4-1/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}, \quad (9)$$

\`где ξ' – ближайшая точка к x из $\xi, \xi+\Delta\xi$.

Доказательство. Для Z эта оценка вытекает из (4) и (5). Докажем ее для W. Покажем сначала, что

$$|\Delta_\xi K(x,t,\xi,\tau)| \le$$

$$\le C\,|\Delta\xi|^{\alpha/2}\,(t-\tau)^{\alpha/4-3/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}. \quad (10)$$

Оценка (10) при $|\Delta\xi| > (t-\tau)^{1/2}$ следует из оценки (6) для K. Пусть $|\Delta\xi| \le (t-\tau)^{1/2}$. Представим K в виде $K = K^0 + K^1$, где

$$K^0(x,t,\xi,\tau) =$$

$$= [a(x,t) - a(\xi,t)]\partial_x^2 Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)),$$

$$K^1(x,t,\xi,\tau) = b(x,t)\partial_x Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau)).$$

Для $\Delta_\xi K^0$ имеем

$$|\Delta_\xi K^0(x,t,\xi,\tau)| \le$$

$$\le |[a(\xi+\Delta\xi,t) - a(\xi,t)]\times$$

$$\times\partial_x^2 Z(x-\xi-\Delta\xi,t-\tau;a(\xi+\Delta\xi,\tau))| +$$

$$+ |[a(x,t) - a(\xi,t)]\times$$

$$\times[\partial_x^2 Z(x-\xi-\Delta\xi,t-\tau;a(\xi+\Delta\xi,\tau)) -$$

$$-\partial_x^2 Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau))]| \le$$

$$\le C|\Delta\xi|^{\alpha}\,[(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}+$$
$$+|x-\xi|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-(3+\alpha)/2}\times$$
$$\times\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}], \qquad (11)$$

где ξ' – ближайшая к x точка из $\xi,\xi+\Delta\xi$. Меняя местами точки $\xi,\xi+\Delta\xi$, получаем

$$|\Delta_{\xi}K^0(x,t,\xi,\tau)|\le$$
$$\le C|\Delta\xi|^{\alpha}\,[(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}+$$
$$+|x-\xi-\Delta\xi|^{\alpha}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-(3+\alpha)/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}]. \qquad (12)$$

Из оценок (11) и (12) делаем вывод, что

$$|\Delta_{\xi}K^0(x,t,\xi,\tau)|\le$$
$$\le C|\Delta\xi|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}+$$
$$+C|\Delta\xi|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-(3+\alpha)/2}\times$$
$$\min(|x-\xi|^{\alpha},|x-\xi-\Delta\xi|^{\alpha})\times$$
$$\times\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}\le$$
$$\le C|\Delta\xi|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}+$$
$$+C|\Delta\xi|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-\frac{(3+\alpha)}{2}}\times$$
$$\times|x-\xi'|^{\alpha}\,\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}\le$$
$$\le C|\Delta\xi|^{\alpha}\,(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}\le$$
$$\le C|\Delta\xi|^{\alpha/2}\,(t-\tau)^{\alpha/4-3/2}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}.$$

Оценим $|\Delta_{\xi}K^1|$. Используя оценку (5) и учитывая, что, по предположению, $|\Delta\xi|\le$ $\le(t-\tau)^{1/2}$, имеем

$$|\Delta_{\xi}K^1(x,t,\xi,\tau)|\le$$
$$\le|b(x,t)\Delta_{\xi}\partial_x Z(x-\xi,t-\tau;a(\xi,\tau))|\le$$
$$\le C|\Delta\xi|^{\alpha/2}\,(t-\tau)^{\alpha/4-1}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi'|^2}{t-\tau}\right\}.$$

Оценка (10) доказана.

Лемма доказана.

Рассмотрим параболический оператор дивергентного вида

$$Mu=\partial_t u-\partial_x(a(x,t)\partial_x u)-\partial_x(b(x,t)u).$$

Если коэффициенты a, b непрерывны в $\overline{D}$ и выполнено условие равномерной параболичности, то для L существует [3] фундаментальное решение $H(x,t,\xi,\tau)$ в D, удовлетворяющее для фиксированных (ξ,τ) уравнению по (x,t) в слабом смысле при $t>\tau$.

Теорема 3. Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (2) и (3). Тогда

$$\partial_x\Gamma(x,t,\xi,\tau)=-\partial_{\xi}H(x,t,\xi,\tau),$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad x,\xi\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Достаточно установить теорему для $a\in C^{\infty}(\overline{D})\cap C^{\alpha}(\overline{D})$. Приближая затем коэффициенты из класса $C^{\alpha}(\overline{D})$ гладкими, получим утверждение в общем случае.

Пусть $\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$. Для фиксированных $\xi\in\mathbb{R}$, $\tau\in[0,T)$ и $\varepsilon>0$ положим $\varphi_{\varepsilon}(x)=\varepsilon^{-1}\varphi((x-\xi)/\varepsilon)$ и рассмотрим ограниченные решения u_{ε} и v_{ε} задач Коши

$$\begin{cases}Lu=0 \text{ в } D_{\tau},\\ u_{\varepsilon}|_{t=0}=\varphi_{\varepsilon},\end{cases}$$
$$\begin{cases}Mv=0 \text{ в } D_{\tau},\\ v_{\varepsilon}|_{t=0}=\partial_x\varphi_{\varepsilon}.\end{cases}$$

Так как $\partial_x Lu_{\varepsilon}=L\partial_x u_{\varepsilon}$, то в силу единственности ограниченного решения задачи Коши $\partial_x u_{\varepsilon}=v_{\varepsilon}$ в D_{τ}. Используя представление решения в виде потенциала Пуассона, имеем:

$$\partial_x u_{\varepsilon}(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\Gamma(x,t,y,\tau)\varphi_{\varepsilon}(y)dy,$$
$$v_{\varepsilon}(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,t,y,\tau)\partial_y\varphi_{\varepsilon}(y)dy=$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\partial_y\Gamma(x,t,y,\tau)\varphi_{\varepsilon}(y)dy.$$

Переходя к пределу $\varepsilon\to+0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\partial_x u_{\varepsilon}(x,t)=\partial_x\Gamma(x,t,\xi,\tau),$$
$$\lim_{\varepsilon\to+0}v_{\varepsilon}(x,t)=-\partial_{\xi}H(x,t,\xi,\tau).$$

Теорема доказана.

Объединяя лемму 2 и теорему 3, заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (2) и (3). Тогда для производной по ξ фундаментального решения H справедлива оценка

$$|\Delta_\xi \partial_\xi H(x,t,\xi,\tau)| \le$$

$$\le C\,|\Delta\xi|^{\alpha/2}\,(t-\tau)^{-1/2-\alpha/4}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\},$$

где ξ' – ближайшая точка к x из $\xi, \xi+\Delta\xi$, а постоянные C, c зависят от T, константы параболичности δ и норм $\|a,D\|^{(0,\alpha)}$, $\|b,D\|^{(0,\alpha)}$.

Следствие. Если в условиях предыдущей теоремы $b \equiv 0$, то есть $Lu = \partial_t - \partial_x(a(x,t)\partial_x u)$, то оценка справедлива также для производной по x:

$$|\Delta_x \partial_x H(x,t,\xi,\tau)| \le$$

$$\le C\,|\Delta x|^{\alpha/2}\,(t-\tau)^{-1/2-\alpha/4}\exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ладыженская О.А., Солонников С.Д., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1968.
2. **Матийчук М.И., Эйдельман С.Д.** О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1967. – Т. 9. – С. 54–83.
3. **Aronson D.G.** Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 73. – № 6. – С. 890–896.
4. **Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д.** Свойства решений параболических уравнений второго порядка с младшими членами // Труды Московского математического общества. – 1992. – Т. 54. – С. 118–159.
5. **Фридман А.** Уравнения в частных производных параболического типа. – М.: Мир, 1968.

Конёнков Андрей Николаевич, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru