УДК 517.925

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В.А. Ковалёв
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

ABOUT ONE ITERATION METOD OF FORMATION OF PERIODIC SOLUTION OF SYSTEMS, UNSOLVED RELATIVELY TO THE DERIVATION

V.A. Kovalev

Исследуется вопрос о нахождении достаточных условий существования ненулевого периодического решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Используется метод итераций для доказательства существования периодического решения и его приближенного построения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, решение, система, условия, матрица.

The article deals with the problem of finding adequate conditions of the existence of nonzero, periodic solution for the system of differential equations of the first order, unsolved relatively to the derivative. The method of iterations is used to prove the existence of the periodic solution and its approximate formation.

Keywords: differential equation, solution, system, conditions, matrix.

В проблеме существования периодических решений систем неавтономных дифференциальных уравнений представляет интерес задача нахождения ненулевых решений систем, не разрешенных относительно производной. Данная работа рассматривает применение метода итераций для получения достаточных условий существования и построения периодического решения таких систем.

Рассмотрим не разрешенную относительно производной систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, \dot{x}), \qquad (1)$$

где $x,\ f \in R^{\ell}$, t – время.

Обозначим $\dot{x} = y$.

Предположим, что $A(t)$ – матрица размерности $\ell \times \ell$, непрерывна и периодична по t с периодом ω. Вектор-функция $f(t,x,y)$ определена, непрерывна по совокупности переменных $(t,x,y) \in R \times R^{\ell} \times R^{\ell}$, периодична по t с периодом ω и удовлетворяет условию Липшица по переменным x и y с постоянными L_1 и L_2 соответственно.

Рассмотрение системы (1) будем проводить в предположении, что интегральная средняя матрица для матрицы линейного приближения системы является нулевой, то есть $\int\limits_0^{\omega} A(t)dt = 0$.

Введем обозначение $B(\omega) = \int\limits_0^{\omega} A^2(t)dt$ и предположим, что эта матрица неособенная.

Пусть нелинейная часть системы удовлетворяет условию $f(t,x,0) \equiv 0$.

Рассмотрение системы (1) будем проводить в области $D = \{t, x, y : t \in [0;\omega],\ |x| \le \rho,\ |y| \le \rho\}$; ω, ρ – положительные постоянные.

Предположим, что в области D выполнены оценки

$$|A(t)| \le K, \left|(B(\omega))^{-1}\right| \le \beta \quad \text{и} \quad \left|A(t)x + f(t,x,y)\right| \le M ,$$

где K, M, β – положительные постоянные, и что множество $D - M\omega$ не пусто. Под $D - M\omega$ понимаем множество точек, входящих во множество D вместе со своей $M\omega$ окрестностью, причем под $M\omega$ окрестностью точки $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_\ell})$ понимается множество точек $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ таких, что $\left|\overline{x_i} - x_i\right| < M\omega \quad (i = \overline{1,\ell})$.

Обозначим

$$q = \beta\left[L_2 M\omega + (\frac{K^2}{2} + \frac{L_1 M}{2})\omega + (\frac{1}{4} + \frac{K^2}{3})\omega^3\right].$$

Будем рассматривать систему (2), эквивалентную системе (1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ y &= A(t)x + f(t,x,y). \end{aligned} \tag{2}$$

Для нахождения решения системы (2) составим следующую систему последовательных приближений:

$$x_0(t) = x_0,$$

$$x_k(t) = x_k(0) + \int_0^t \left[y_k(\tau) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_k(\sigma)d\sigma \right] d\tau,$$

$$y_{k+1}(t) = A(t)x_k(t) + f(t, x_k(t), y_k(t)),$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Функции $x_k(t)$ по построению ω-периодические приближения решения системы (1). Их начальные значения $x_k(0)$ будем находить такими, чтобы выполнялись равенства:

$$\int_0^\omega [A(t)x_k(t) + f(t, x_k(t), y_k(t))]dt = 0. \tag{3}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в равенстве (3), получим: $\int_0^\omega A(\tau)d\tau \cdot x_k(0) -$

$$-\int_0^\omega\int_0^t A(\tau)d\tau \cdot y_k(t)dt + \int_0^\omega f(t, x_k(t), y_k(t))dt = 0.$$

Первое слагаемое в силу сделанного предположения равно нулю: $\int_0^\omega A(t)dt = 0.$ Интегрируя по частям второй интеграл, приходим к равенству

$$-\int_0^\omega A^2(t)dt \cdot x_k(0) +$$

$$+ \int_0^\omega\int_0^t A(\tau)d\tau \left[A(t)x_k(t) + \int_0^t A(\tau)d\tau \cdot y_k(t) \right] dt +$$

$$+ \int_0^\omega f(t, x_k(t), y_k(t))dt = 0. \tag{4}$$

Учитывая введенное ранее обозначение $B(\omega) = \int_0^\omega A^2(t)dt$, равенство (4) запишем в виде

$$B(\omega) \cdot x_k(0) =$$

$$= \int_0^\omega\int_0^t A(\tau)d\tau \left[A(t)x_k(t) + \int_0^t A(\tau)d\tau \cdot y_k(t) \right] dt +$$

$$+ \int_0^\omega f(t, x_k(t), y_k(t))dt.$$

Построим оператор P, определяемый равенством:

$$\begin{aligned} Px_k(0) = B^{-1}(\omega) \cdot \int_0^\omega\int_0^t A(\tau)d\tau \cdot A(t)(x_k(0) + \\ + \int_0^t (y_k(\tau) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_k(\sigma)d\sigma)d\tau) \cdot dt + \\ + \int_0^\omega\int_0^t A(\tau)d\tau \int_0^t A(\tau)d\tau \cdot y_k(t)dt + \\ + \int_0^\omega f(t, x_k(0) + \int_0^t (y_k(\tau) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_k(\sigma)d\sigma)d\tau, y_k(t))dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $q < 1$, тогда оператор P является сжимающим оператором и уравнение (5) имеет единственное решение. Решением является вектор $x_k(0) = \left(x_k^{(1)}(0), \ldots, x_k^{(l)}(0)\right)$.

Из ω-периодичности $x_k(t)$, учитывая лемму 1 из работы $[1]$, легко убедиться, что будут выполняться неравенства $|x_k(t) - x_k(0)| \le 2M\omega(1 - \frac{t}{\omega}) \le \frac{M\omega}{2}.$

Таким образом, для всех $x_k(0) \in D - \frac{M\omega}{2}$ соответствующие приближения $x_k(t)$ не выходят из области D. Следовательно, множество функций последовательных приближений $\{x_k(t, x_k(0))\}$ равномерно ограничено.

Кроме того, функции этого множества периодичны по переменной t с периодом ω и равностепенно непрерывны. Действительно, неравенства

$$|x_k(t_2, x_k(0)) - x_k(t_1, x_k(0))| \le M\omega|t_2 - t_1|$$

выполняются для любых $t_1, t_2 \in [0, \omega]$. Таким образом, множество $\{x_k(t, x_k(0))\}$ компактно. Из него можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_n}(t, x_{k_n}(0))\}$, которая при $k_n \to \infty$ равномерно на промежутке $[0, \omega]$ сходится к непрерывному пределу $x(t, x_0)$. Предельная функция $x(t, x_0)$ будет ω-периодической по переменной t.

Доказательство того, что функция $x(t, x_0)$ является решением системы (1), повторяет доказательство теоремы Пеано в работе $[2]$.

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений вида (1) при некоторых предположениях относительно линейной части системы и ограничении $q < 1$ получено достаточное условие существования ненулевого периодического решения, которое может быть найдено как равномерный предел последовательности периодических приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самойленко А.М.** Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // УМЖ. – 1965. – Т. 17. – № 4. – С. 82–94.
2. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1939. – 384 с.
3. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
4. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Ковалев Виктор Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.:+7(4912) 28-05-74, e-mail: v.kovalev@rsu.edu.ru