УДК 517.91

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА

И.В. Ионова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

NUMERICAL AND ANALYTICAL APPROACH TO THE CONSTRUCTION FIELD OF PRIMARY LOOP CONDITION THE SECOND KIND

I.V. Ionova

Для системы дифференциальных уравнений получены условия существования циклов второго рода. Предложено численное расширение области параметров системы дифференциальных уравнений для циклов второго рода.

Ключевые слова: предельный цикл второго рода, вращение векторного поля.

For a system of differential equations is proved the existence of cycles of the second kind. Propose a numerical expansion of the range of parameters of the system of differential equations for the cycles of the second kind.

Keywords: limit cycle of the second kind, the rotation of the vector field.

Введение. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= c^T x, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x, b, c \in R^n$, $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Система (1) является математической моделью системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) [1, 2, 3]. Изучению системы (1) посвящены многочисленные работы [1–11]. В статье предложен численно-аналитический подход определения начальных условий бифуркаций циклов второго рода системы (1). Анализ системы (1) производится с использованием вращения векторного поля и результатов работ [9–12].

Теоретические исследования. Условия существования циклов второго рода определяются результатами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma < 0$, $l^T = c^T A$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $rang\|c, l\| = 2$, $l^T b = \nu > 0$;

2) существуют $\varepsilon_2 > 0$, $d_2 > 0$ такие, что при $\mu_1 > \dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{\Gamma}}$ система

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\mu_1 y - \varphi(\sigma) - \frac{d_2}{\Gamma}, \\ \dot{\sigma} &= y \end{aligned} \tag{2}$$

имеет предельный цикл второго рода, определяющий функцию $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$;

3) существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что справедливы неравенства $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \geq 0$,

$$\delta_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_1 - \alpha_1) + \beta_1 > 0, \tag{3}$$

$$F_1(\sigma) + \frac{(\varepsilon_1 \Gamma - \nu)}{\delta_1 \sqrt{\Gamma_1}} \varphi(\sigma) > 0 \tag{4}$$

для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$;

4) система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\mu_2 y - \varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= y \end{aligned} \tag{5}$$

при $\mu_2 < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{\Gamma}}$, $\varepsilon_1 > 0$, имеет предельный цикл второго рода, определяющий функцию $F_2(\sigma) > 0$, $F_2(\sigma) > F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$;

5) выполняются неравенства

$$\delta_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_2 - \alpha_1) + \beta_1 > 0, \tag{6}$$

$$\delta_2 \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) + (\varepsilon_2 \Gamma - \nu)\varphi(\sigma) < d_2(\alpha_1 - \varepsilon_2) \tag{7}$$

для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma)$, $V_2(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma)$, $W_1(z) = l^T x + \varepsilon_1 c^T x$, $W_2(z) = l^T x + \varepsilon_2 c^T x + d_2$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ удовлетворяют соответственно условиям 2), 4) теоремы.

Пусть $\Omega_1 = \{z : V_1(z) \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{z : V_2(z) \leq 0\}$, $\Omega_3 = \{z : W_1(z) \leq 0\}$, $\Omega_4 = \{z : W_2(z) \geq 0\}$. Множество $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcap \ \bigcap \Omega_3 \bigcap \Omega_4$ не является пустым. Действительно, рассмотрим точку A, определяемую соотношениями $A: \begin{cases} c^T x = \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma), \\ l^T x = -\varepsilon_2 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - d_2. \end{cases}$

Найдем значения функций $V_1(z)$, $V_2(z)$, $W_1(z)$, $W_2(z)$ в точке A:

$$V_1(A) = \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) = 0 \geq 0,$$

$$V_2(A) = \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) = \sqrt{\Gamma}(F_1(\sigma) - -F_2(\sigma)) < 0,$$

$$W_1(A) = -\varepsilon_2 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - d_2 + \varepsilon_1 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) == (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - d_2 < 0,$$

$$W_2(A) = -\varepsilon_1 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - d_2 + \varepsilon_1 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) + d_2 \geq 0.$$

Из полученных соотношений следует, что точка $A \in \Omega$. Таким образом, множество Ω непустое. Граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \bigcup \bigcup \partial\Omega_2 \bigcup \partial\Omega_3 \bigcup \partial\Omega_4$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\},$$
$$\partial\Omega_2 = \{z : V_2(z) = 0, W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\},$$
$$\partial\Omega_3 = \{z : W_1(z) = 0, V_1(z) \geq 0, V_2(z) \leq 0\},$$
$$\partial\Omega_4 = \{z : W_2(z) = 0, V_1(z) \geq 0, V_2(z) \leq 0\}.$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_1$. Пусть $z \in \partial\Omega_1$. Тогда справедливы соотношения

$$c^T x - \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) = 0,$$
$$-\varepsilon_2 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - d_2 \leq l^T x \leq -\varepsilon_1 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma). \quad (8)$$

Используя (8) и условия 1), 2) теоремы, получим, что производная функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_1(z) = c^T \dot{x} - \sqrt{\Gamma} \dot{F}_1(\sigma) = c^T Ax + c^T b\varphi(\sigma) - -\sqrt{\Gamma} \frac{\partial F_1(\sigma)}{\partial \sigma} c^T x = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \Gamma F_1(\sigma) \times$$
$$\times \frac{\partial F_1(\sigma)}{\partial \sigma} = l^T x - \Gamma F_1(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_1(\sigma)} + \frac{\partial F_1(\sigma)}{\partial \sigma}\right) \geq$$
$$\geq -\varepsilon_2 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) - d_2 - \Gamma F_1(\sigma)\left(-\mu_1 - \frac{d_2}{\Gamma F_1(\sigma)}\right) =$$
$$= -\varepsilon_2 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) + +\Gamma F_1(\sigma)\mu_1 = \left(\mu_1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\Gamma}}\right) \times$$
$$\times \Gamma F_1(\sigma) > 0. \quad (9)$$

Пусть $z \in \partial\Omega_2$. Тогда справедливы соотношения

$$c^T x - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) = 0,$$
$$-\varepsilon_2 \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) - d_2 \leq l^T x \leq -\varepsilon_1 \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma). \quad (10)$$

Применяя (10) и условия 1), 4) теоремы, получим, что производная функции $V_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_2(z) = c^T \dot{x} - \sqrt{\Gamma} \dot{F}_2(\sigma) = c^T Ax + c^T b\varphi(\sigma) -$$
$$-\sqrt{\Gamma} \frac{\partial F_2(\sigma)}{\partial \sigma} c^T x = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \Gamma F_2(\sigma) \times$$
$$\times \frac{\partial F_2(\sigma)}{\partial \sigma} = l^T x - \Gamma F_2(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_2(\sigma)} + \frac{\partial F_2(\sigma)}{\partial \sigma}\right) \leq$$
$$\leq -\varepsilon_1 \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) + +\Gamma F_2(\sigma)\mu_2 =$$
$$= \left(\mu_2 - \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\Gamma}}\right)\Gamma F_2(\sigma) < 0. \quad (11)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3$. Тогда для любого $z \in \partial\Omega_3$ справедливы соотношения

$$l^T x + \varepsilon_1 c^T x = 0, \ \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) \leq c^T x \leq \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma). \quad (12)$$

В силу (3), (12) и условия 1), 3) теоремы, получим, что производная функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_3$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_1(z) = l^T \dot{x} + \varepsilon_1 c^T \dot{x} = l^T Ax + l^T b\varphi(\sigma) +$$
$$+ \varepsilon_1 c^T Ax + \varepsilon_1 c^T b\varphi(\sigma) = l^T Ax + \nu\varphi(\sigma) +$$
$$+ \varepsilon_1 l^T x - \varepsilon_1 \Gamma\varphi(\sigma) = -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x +$$
$$+ \varepsilon_1 l^T x + (\nu - \varepsilon_1\Gamma)\varphi(\sigma) = (\varepsilon_1 - \alpha_1) l^T x -$$
$$- \beta_1 c^T x + (\nu - \varepsilon_1\Gamma)\varphi(\sigma) = -(\varepsilon_1 - \alpha_1)\varepsilon_1 c^T x -$$
$$- \beta_1 c^T x + (\nu - \varepsilon_1\Gamma)\varphi(\sigma) = -(\varepsilon_1 - \alpha_1)\varepsilon_1 c^T x -$$
$$- \beta_1 c^T x + (\nu - \varepsilon_1\Gamma)\varphi(\sigma) = -((\varepsilon_1 - \alpha_1)\varepsilon_1 + \beta_1) \times$$
$$\times c^T x + (\nu - \varepsilon_1\Gamma)\varphi(\sigma) \leq -\delta_1 \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) +$$
$$+ (\nu - \varepsilon_1\Gamma)\varphi(\sigma) < 0. \quad (13)$$

Для любого $z \in \partial\Omega_4$ справедливы соотношения

$$l^T x + \varepsilon_2 c^T x + d_2 = 0,$$
$$\sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) \leq c^T x \leq \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma). \quad (14)$$

Используя (6), (14) и условие 1) теоремы получим, что производная функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_4$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_2(z) = l^T \dot{x} + \varepsilon_2 c^T \dot{x} = l^T Ax + l^T b\varphi(\sigma) +$$
$$+ \varepsilon_2 c^T Ax + \varepsilon_2 c^T b\varphi(\sigma) = l^T Ax + \nu\varphi(\sigma) +$$
$$+ \varepsilon_2 l^T x - \varepsilon_2 \Gamma\varphi(\sigma) = -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x +$$
$$+ \varepsilon_2 l^T x + (\nu - \varepsilon_2\Gamma)\varphi(\sigma) = (\varepsilon_2 - \alpha_1) l^T x -$$
$$- \beta_1 c^T x + (\nu - \varepsilon_2\Gamma)\varphi(\sigma) = (\varepsilon_2 - \alpha_1) \times$$
$$\times (-\varepsilon_2 c^T x - d_2) - \beta_1 c^T x + (\nu - \varepsilon_2\Gamma)\varphi(\sigma) =$$
$$= -(\varepsilon_2 - \alpha_1)\varepsilon_2 c^T x - d_2(\varepsilon_2 - \alpha_1) - \beta_1 c^T x +$$
$$+ (\nu - \varepsilon_2\Gamma)\varphi(\sigma) = -((\varepsilon_2 - \alpha_1)\varepsilon_2 + \beta_1) c^T x -$$
$$- d_2(\varepsilon_2 - \alpha_1) + (\nu - \varepsilon_2\Gamma)\varphi(\sigma) \geq -\delta_2 \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) -$$
$$- d_2(\varepsilon_2 - \alpha_1) + (\nu - \varepsilon_2\Gamma)\varphi(\sigma) > 0. \quad (15)$$

Таким образом, неравенства (9), (11), (13), (15) обеспечивают положительную инвариантность множества Ω, множество $\Omega_0 = \Omega \bigcap \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ является выпуклым замкнутым и ограниченным. Пусть T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (1). В силу положительной инвариантности множества Ω и соотношения (14) оператор T_1 отображает множество Ω_0 в множество $T_1(\Omega_0)$, $T_1(\Omega_0) \subset \Omega_\Delta = \Omega \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0 + \Delta\}$. Обозначим через T_2 оператор, определяемый соотношением $T_2\begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sigma - \Delta \end{pmatrix}$. Пусть $U = T_2 \circ T_1$, тогда $U(\Omega_0) \subset \Omega_0$. По теореме Брауэра оператор U имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия предельного цикла второго рода [4, 5, 6].

Практические исследования. Рассмотрим систему (1), где $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\alpha_1, \beta_1, \nu, \Gamma, \gamma \in R^+$.

Для системы (1) проверим условие 1) теоремы и найдем $c^T b = -\Gamma < 0$, $l^T = c^T A = (0;1)$, $rang\|c, l\| = rang\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$, $l^T b = \nu > 0$, $l^T A = = (-\alpha_1; -\beta_1) = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$.

Пусть $D = \alpha_1^2 - 4\beta_1 < 0$. Тогда матрица A имеет комплексно сопряженные собственные значения $\lambda_1 = 2^{-1}\left(-\alpha_1 + i\sqrt{|D|}\right)$, $\lambda_2 = 2^{-1} \times \times\left(-\alpha_1 - i\sqrt{|D|}\right)$

В условиях 2), 3) теоремы возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\nu}{\Gamma}$. Рассмотрим систему (1) со значениями параметров $\alpha_1 = 1$, $\nu = 2$, $\Gamma = 9$, $\gamma = 0{,}8$. Пусть $\beta_1 = \beta_{12} = 0.3235$. Тогда для системы (5) при $\mu_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{\Gamma}} - 10^{-6} = 0.07407307407 < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{\Gamma}}$ численно доказывается, что она имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\max\limits_{\sigma} F_2(\sigma) = M_2 = 10.8947599315$.

Используя условие 3) теоремы, найдем $d_2 > \dfrac{\delta_2\sqrt{\Gamma}M_2}{(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1})} = 6.331152514$. Численно доказывается, что система (2) при $\mu_1 = 0.07407507407 > > \dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{\Gamma}}$, $d_2 = 6.331152514 + 10^{-9}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$, $F_2(\sigma) > F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$. Для системы (1) выполнены условия теоремы, следовательно, она имеет предельный цикл второго рода. Численно определяются начальные условия цикла $x_1(0) = = -7.314259697$, $x_2(0) = 17.830187747$, $\sigma(0) = 0$.

Условие теоремы позволяет определить область начальных условий цикла. На рисунке 1 изображено множество Ω_0, ограниченное линиями:

$$L_1 : c^T x = \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow x_2 = 3 \cdot 2.01,$$
$$L_2 : l^T x + \varepsilon_1 c^T x = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot 9^{-1} = 0,$$
$$L_3 : c^T x = \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow x_2 = 3 \cdot 10.89,$$
$$L_4 : l^T x + \varepsilon_2 c^T x + d_2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot 9^{-1} + 6.33 = 0.$$

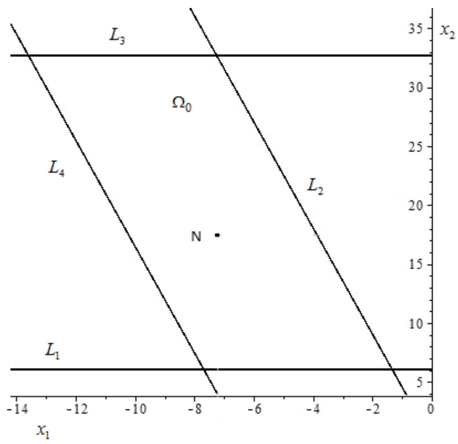


Рис. 1

Точка N на рисунке 1 соответствует начальным условиям цикла второго рода.

Изменение значения ε_1 позволяет расширить область параметров существования циклов системы (1). Рассмотрим в условиях 2), 3) теоремы $\varepsilon_1 = \dfrac{\nu}{\Gamma} + \varepsilon_{01}$, $\varepsilon_{01} = 0.05$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\nu}{\Gamma}$. Пусть $\beta_1 = \beta_{12} = 0.3446$. Тогда доказывается, что система (5) при $\mu_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{\Gamma}} - 10^{-6} = 0.09073974073 < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{\Gamma}}$ имеет такой предельный цикл второго рода $F_2(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, что $\max\limits_{\sigma} F_2(\sigma) = M_2 = = 8.93093366131$. Используя условие 5) теоремы, найдем $d_2 > \dfrac{\delta_2\sqrt{\Gamma}M_2}{(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1})} = 5.916786077$. Численно доказывается что система (2) при $\mu_1 = = 0.07407507407 > \dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{\Gamma}}$, $d_2 = 5.916786077 + 10^{-9}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$, $F_2(\sigma) > F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Для системы (1) выполнены условия теоремы. Следовательно, она имеет предельный цикл второго рода. Численно определяются начальные условия цикла $x_1(0) = -7.321677411$, $x_2(0) = = 16.804528610$, $\sigma(0) = 0$.

Условие теоремы позволяет определить область начальных условий цикла. На рисунке 2 изображено множество Ω_0, ограниченное линиями:

$$L_1 : c^T x = \sqrt{\Gamma F_1(0)} \Leftrightarrow x_2 = 3 \cdot 2.42,$$

$$L_2 : l^T x + \varepsilon_1 c^T x = 0 \Leftrightarrow x_1 + 0.272 \cdot x_2 = 0,$$

$$L_3 : c^T x = \sqrt{\Gamma F_2(0)} \Leftrightarrow x_2 = 3 \cdot 8.93,$$

$$L_4 : l^T x + \varepsilon_2 c^T x + d_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot 9^{-1} + 5.92 = 0.$$

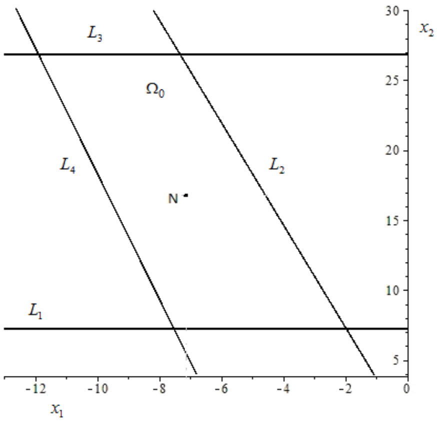


Рис. 2

Точка N на рисунке 2 соответствует начальным условиям цикла второго рода.

Произведем расширение области параметров системы (1), при которых она имеет цикл второго рода. Для этого рассмотрим оператор $U = T_2 \circ T_1$, определенный в теореме, где T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (1), T_2 – параллельный перенос. На рисунке 3 показано множество $U(\Omega_0)$.

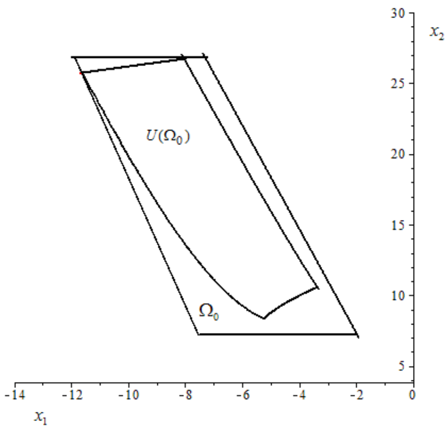


Рис. 3

Оставим положительно инвариантное множество Ω_0 без изменений, будем увеличивать значение β_1 системы (1), обозначим U_{β_1} оператор, определяемый значением β_1. При увеличении β_1 множество Ω_0 перестает быть положительно инвариантным, но множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ содержится во множестве Ω_0. Численными методами доказывается, что дальнейшее увеличение значения β_1 до $\beta_{13} = 0.972$ приводит к тому, что множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ перестает быть частью множества Ω_0, $U_{\beta_1}(\Omega_0) \not\subset \Omega_0$, $U_{\beta_1}(\Omega_0) \bigcap \Omega_0 \neq \varnothing$. В этом случае не выполняются условия теоремы Брауэра о неподвижной точке. Для анализа неподвижных точек оператора U_{β_1} определим непрерывное векторное поле $Q(x) = x - U_{\beta_1}(x)$. Если вращение векторного поля $Q(x)$ на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то согласно теореме 5.15 [12] оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку. Пусть $\beta_1 = \beta_{14} = 0.972$. Тогда с помощью численных методов находим $U_{\beta_1}(\Omega_0)$.

На рисунке 4 изображено множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$, а на рисунке 5 вращение $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$.

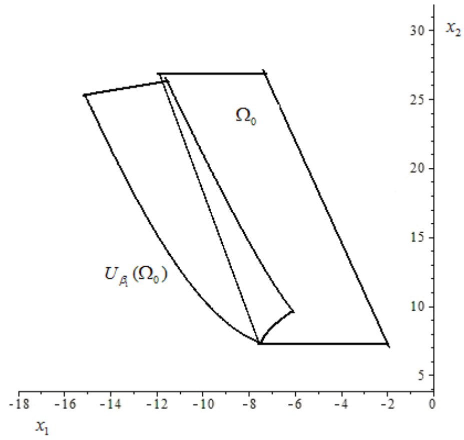


Рис. 4

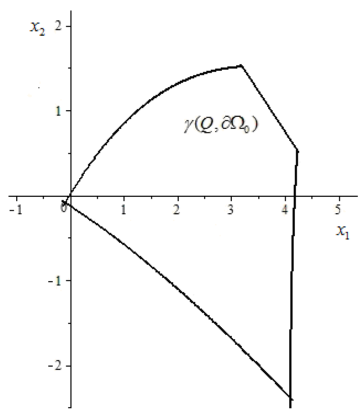


Рис. 5

Таким образом, при $\beta_1 < 0.972$ начальное условие цикла второго рода находится во множестве Ω_0 и определяется точкой N^* с координатами $x_1(0) = -7.55958$, $x_2(0) = 7.40611$. Проекция цикла на плоскость (x_1, x_2) изображена на рисунке 6.

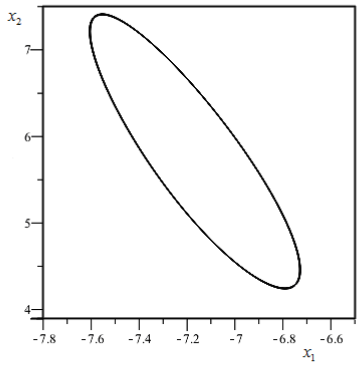


Рис. 6

Для дальнейшего численного анализа системы (1) найдем окрестность $\omega_1(N^*, r)$ точки N^* такую, что оператор U отображает ее в плоскость $\Delta_{4\pi} = \{z : \sigma = 4\pi\}$. Численно определяется, что максимальный радиус этой окружности $r = 1.66$. На рисунке 7 изображены множества Ω_0 и $\omega_1(N^*, r)$.

Рассмотрим часть множества $\omega_1(N^*, r)$ и окрестность $\overline{\omega}_1(N^*, 0.833)$. Изменение параметра β_1 до $\beta_1 = \beta_{15} = 1.31$ приводит к тому, что множество $\overline{\omega}_1$ не отображается само в себя через 4π, но при этом $U(\overline{\omega}_1) \bigcap \overline{\omega}_1 \neq \varnothing$ и вращение $\gamma(Q, \overline{\omega}_1) \neq 0$. Следовательно, при $\beta_1 \leq 1.31$ начальные условия цикла второго рода, определяемые координата- ми точки K^*: $x_1(0) = -7.720501470$, $x_2(0) = \; = 6.5929543601$, находятся во множестве $\overline{\omega}_1$. На рисунке 9 изображены множества $U(\overline{\omega}_1)$ и вращение $\gamma(Q, \overline{\omega}_1)$.

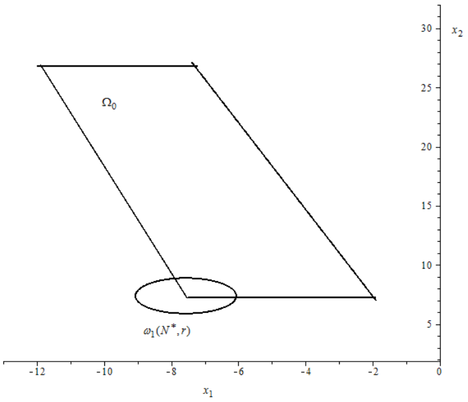
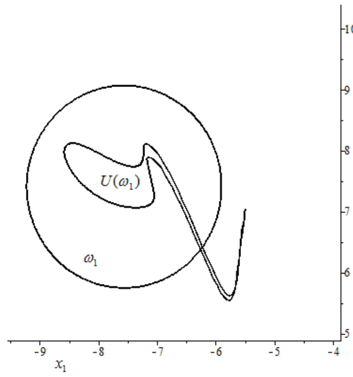
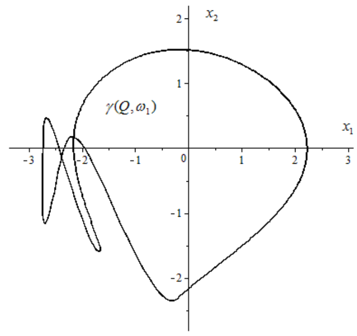


Рис. 7

Отображение множества $\omega_1(N^*, r)$ оператором U и вращение $\gamma(Q, \omega_1) \neq 0$ показано на рисунках 8a и 8b.

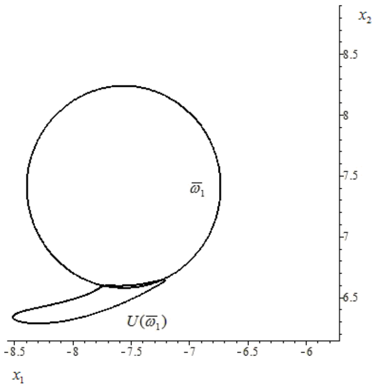


a)

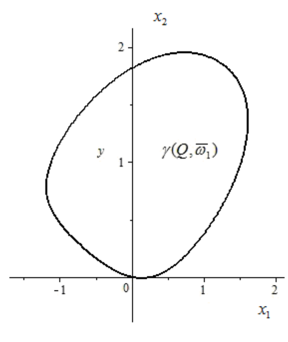


b)

Рис. 8



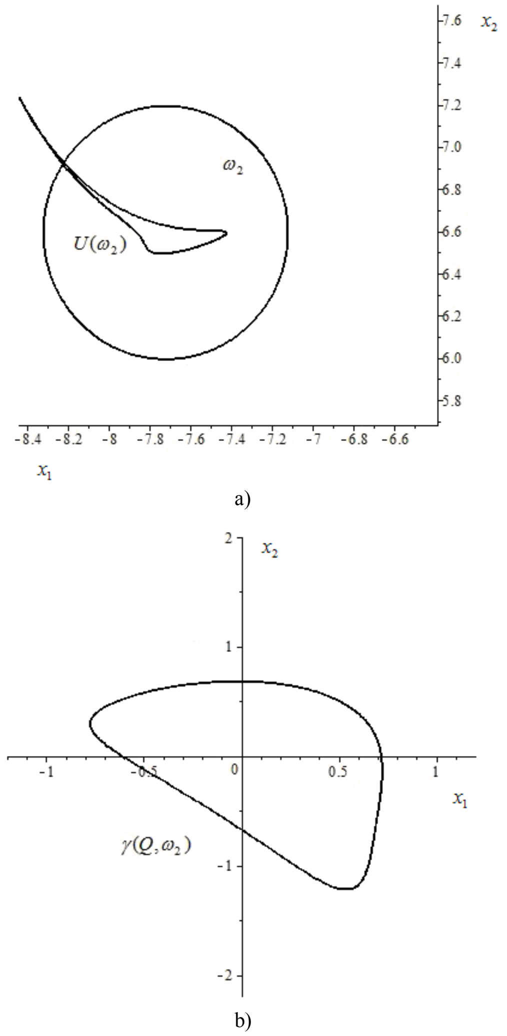
a)



b)

Рис. 9

Для расширения области параметра β_1 определим окрестность $\omega_2(K^*, r)$ точки K^* с максимальным радиусом $r = 0.6$, такую, что оператор U отображает ее в плоскость $\Delta_{4\pi} = \{z : \sigma = 4\pi\}$. На рисунке 10 изображены множества $U(\omega_2)$ и вращение $\gamma(Q, \omega_2)$.



a)

b)

Рис. 10

Рассмотрим часть множества ω_2 и окрестность $\overline{\omega}_2(K^*, 0.3)$. При изменении параметра β_1 до $\beta_1 = \beta_{16} = 1.465$ отображение множества $\overline{\omega}_2$ оператором U на плоскость $\Delta_{4\pi} = \{z : \sigma = 4\pi\}$ перестает быть его частью, но $U(\overline{\omega}_2) \cap \overline{\omega}_2 \neq \varnothing$ и $\gamma(Q, \overline{\omega}_2) \neq 0$. Следовательно, область содержит начальные условия цикла второго рода, определяемые координатами точки $\overline{K}^*$: $x_1(0) = -7.773944188$, $x_2(0) = 6.4753065254$. Проекция цикла на плоскость (x_1, x_2) изображена на рисунке 11.

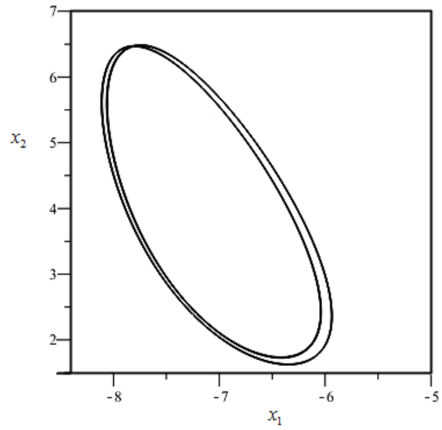
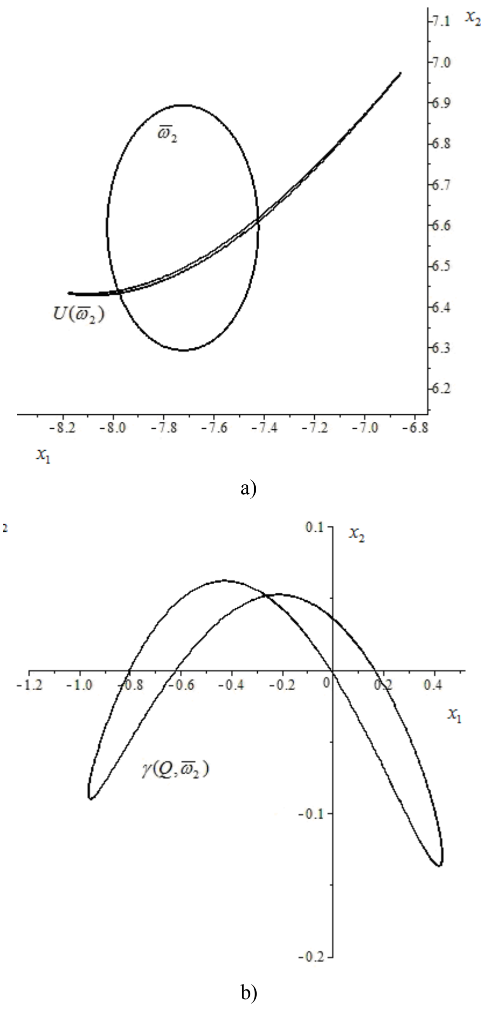


Рис. 11

На рисунке 12 показаны множества $\overline{\omega}_2$, $U(\overline{\omega}_2)$ и вращение $\gamma(Q, \overline{\omega}_2) \neq 0$.



a)

b)

Рис. 12

Таким образом, численно доказано что система (1) имеет цикл удвоенного периода, начальные условия которого находится в области $\overline{\omega}_2$.

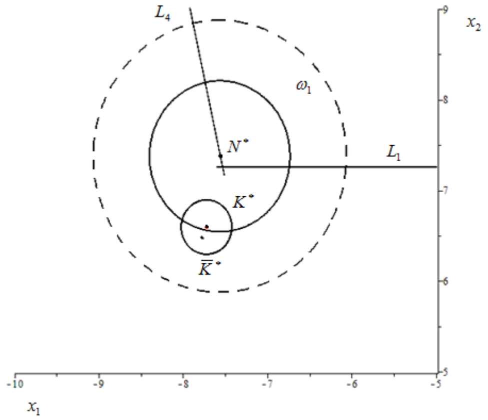


Рис. 13

На рисунке 13 представлена схема последовательного приближения к начальных условиям цикла второго рода с удвоенным периодом по переменной σ.

Таким образом, с помощью численно-аналитического подхода определена область начальных условий удвоения периода циклов второго рода для систем дифференциальных уравнений, которое имеет практическое применение при изучении модулированных колебаний радиотехнических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Матросов В.В.** Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Известия вузов. Радиофизика. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 267–278.
2. **Шахтарин Б. И.** Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. – М.: Машиностроение, 1991. – 192 с.
3. **Шахгильдян В.В., Белюстина Л.Н.** Системы фазовой синхронизации. – М.: Радио и связь, 1982. – 288 с.
4. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. **Леонов Г.А., В.Б. Смирнова В.Б.** Математические проблемы теории фазовой синхронизации. – СПб.: Наука, 2000. – 400 с.
6. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. – СПб., 1992. – 368 с.
7. **Мамонов С.С.** Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 5. – С. 637–646.
8. **Мамонов С.С.** Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. II // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 8. – С. 1075–1084.
9. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Существование циклов второго рода системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 13. – № 4. – С. 45–50.
10. **Мамонов С.С., Ионова И.В**. Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода // Вестник РАЕН. – 2014. – Т. 14.– № 5. – С. 46–54.
11. **Мамонов С.С., Ионова И.В**. Исследование биений поисковой системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. – № 48. – С. 52–59.
12. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

Ионова Ирина Викторовна, аспирант кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: i.ionova@rsu.edu.ru