УДК 517.9, 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОУСОНА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Е.В. Игонина, О.Н. Масина
Елецкий государственный университет имени И.А.Бунина

APPLICATION OF THE METHOD OF LAWSON OF THE SOLUTION OF THE LINEAR AND QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS RIGHT PART FOR RESEARCH OF PENDULAR SYSTEM MODEL

E.V. Igonina, O.N. Masina

Описано применение численного метода Лоусона решения линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для исследования устойчивости маятниковой системы с логическим регулятором. Представлены результаты численного эксперимента по стабилизации маятниковых систем на примере перевернутого маятника, описываемого моделью Такаги – Суджено.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, перевернутый маятник, логический регулятор, устойчивость, стабилизация.

Application of a numerical method of Lawson of the solution of the linear and quasilinear differential equations with discontinuous right part for stability research of pendular system with the logical controller is described. Results of numerical experiment of process of stabilization of pendular systems on the example of the turned pendulum described by Takagi – Sugeno model are presented.

Keywords: differential equations with discontinuous right part, inverted pendulum, logic controller, stability, stabilization.

Введение. Построение и исследование моделей управляемых маятниковых систем является актуальной проблемой современной науки и техники. Указанные системы встречаются в задачах управления шагающими роботами, техническими средствами (пожарные вертолеты с водосбросным ковшом, портальные краны, самобалансирующиеся самокаты с гироскопическим устройством), а также при управлении стратегически важными объектами – космическими и баллистическими ракетами. В связи с многообразием задействованных физических эффектов, нестационарностью объекта и наличием неконтролируемых возмущающих воздействий процессы, протекающие в маятниковых системах, являются сложными для получения их адекватного математического описания с помощью классических методов моделирования.

Эффективным методом для исследования устойчивости управляемых маятниковых систем является построение модели Такаги – Суджено, базирующейся на правилах вида [1]:

Π_i: если $z_1(t)$ есть M_{i1} и … и $z_p(t)$ есть M_{ip},

$$\text{то}\quad \begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t),\\ &y(t) = C_i x(t),\\ &i = 1, 2, \dots r, \end{aligned} \tag{1}$$

где $z(t) = (z_1(t), ..., z_p(t))$ – вектор предпосылок, M_{ip} – терм-множество, $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u(t) \in R^m$ – входящий вектор, $y(t) \in R^q$ – выходящий вектор, r – число правил, $A_i \in R^{n\times n}$, $B_i \in R^{n\times m}$, $C_i \in R^{q\times n}$. Применяемые правила являются нечеткими в части «если», в части «то» содержатся дифференциальные уравнения, описывающие динамику процесса и претерпевающие разрыв в правой части в зависимости от текущего состояния процесса. Логический регулятор вырабатывает управление $u(t)$, которое делает состояние равновесия системы устойчивым. Указанный регулятор обладает свойством, при котором возможно разделение фазового пространства на области, от которых зависят его параметры и структура [2].

Для нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений используются известные численные методы разного порядка точности (методы Рунге – Кутты, метод Адамса и др.) или их модификации на случай разрывной правой части [3, 4]. В [5] дана классификация дифференциальных уравнений и изложены аспекты применения численных методов в зависимости от их вида. Для проведения численного интегрирования дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, описывающих динамику управляемых систем, применение традиционных методов оказывается неэффективным. Это обусловлено ограниченной областью устойчивости используемых численных методов и быстротой протекания процессов в системах управления. В этом случае целесообразным является применение численных методов с неограниченной областью устойчивости [5].

В настоящей статье рассматривается применение численного метода Лоусона к решению линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для исследования устойчивости маятниковой системы с логическим регулятором. Представлены результаты численного эксперимента процесса стабилизации маятниковой системы на примере переверну-того маятника, описываемого моделью Такаги – Суджено.

Предварительные сведения. Метод Лоусона является одношаговой процедурой и используется для нахождения решения задачи Коши для квазилинейной системы, заданной в общем виде [6]

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

или в виде

$$y' = Ay + u(x, y), \tag{3}$$

где $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \text{const}$.

На каждом частичном сегменте $x_n \le x \le x_n + h$, длина которого равна шагу интегрирования h, исходная система уравнений $y' = g(x, y)$ с помощью замены искомой функции $y(x)$ по формуле

$$y(x) = e^{A^\circ (x - x_n)} z(x), \tag{4}$$

где A° – некоторая постоянная матрица, преобразуется в систему уравнений относительно новой неизвестной функции $z(x)$:

$$z'(x) = G(x, z). \tag{5}$$

Матрица Якоби $\frac{\partial G}{\partial z}$ системы (5) и матрица Якоби $\frac{\partial g}{\partial y}$ правой части $g(x, y)$ исходной системы связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial G}{\partial z} = e^{-(x - x_n)A^\circ}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - A^\circ\right)e^{(x - x_n)A^\circ}. \tag{6}$$

Для нелинейной системы (2) – соотношением $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, для квазилинейной системы (3) соотношением $\frac{\partial g}{\partial y} = A + \frac{\partial u}{\partial y}$.

Преобразование (4) позволяет уменьшить характеристические корни матрицы Якоби $\frac{\partial G}{\partial z}$ по сравнению с характеристическими корнями матрицы Якоби исходной системы, что приводит к уменьшению константы Липшица системы (5) по сравнению с константой Липшица исходной системы (2) или (3). Приведенные выше преобразования автоматически выполняются программой, представленной в виде расширения для Matlab, после чего полученная система может быть решена традиционными методами численного интегрирования. Алгоритм Лоусона решает систему методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности, причем одновременно с интегрированием приводится обратное преобразование от функции $z(x)$ к функции $y(x)$. Отметим, что метод Лоусона применим и в случаях, когда нелинейную систему дифференциальных уравнений можно достаточно близко аппроксимировать линейными системами с постоянной матрицей на исследуемых областях [5].

Стабилизация системы управления перевернутым маятником. Эффективность алгоритма Лоусона для исследования управляемых маятниковых систем (на примере системы управления обычным маятником) с ПИД-регуляторами показана в [7]. В настоящей работе для исследования модели управления перевернутым маятником выполнена модификация метода Лоусона.

Перевернутый маятник представляет собой механизм, состоящий из каретки и прикрепленного к ней сверху с помощью жесткого стержня маятника. Задача управления заключается в удержании маятника в верхнем неустойчивом положении за счет горизонтального перемещения тележки.

Дифференциальные уравнения, описывающие поведение перевернутого маятника на каретке под действием управляющей силы, имеют вид [8]:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g\sin(x_1(t)) - \frac{amlx_2^2(t)\sin(2x_1(t))}{2}}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1(t))} - \frac{a\cos(x_1(t))u(t)}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1(t))}, \tag{7}$$

где $x_1(t)$ – угол (в радианах) отклонения маятника от вертикальной оси, $x_2(t)$ – угловая скорость, $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$ – гравитационная постоянная, m – масса маятника, M – масса каретки, 2 l длина маятника, u – сила, прикладываемая к каретке (в Ньютонах), $a = 1/(m+M)$.

Для построения модели Такаги – Суджено перевернутого маятника использован метод локальной аппроксимации нелинейных членов уравнения рационально выбранными линейными членами. Заметим, что в работе [8] дается подробное описание построения указанной модели. Модель Такаги – Суджено перевернутого маятника задается двумя правилами вида:

П$_1$: если x_1 приблизительно равно 0,

то $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$;

П$_2$: если x_1 приблизительно равно (8)

$$\pm\frac{\pi}{2}\left(|x_1| < \frac{\pi}{2}\right), \text{ то } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t),$$

где $x(t) = (x_1 \quad x_2)^T$ – вектор состояния, включающий в себя соответственно угол отклонения маятника от вертикали и угловую скорость,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{\pi\left(4l/3 - aml\beta^2\right)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix},$$

$\beta = \cos 88^0$.

Логический регулятор, построенный с помощью процедуры параллельно распределенного выравнивания, для модели (8) представляет собой сочетание линейных регуляторов, определяемых правилами вида:

П$_1$: если x_1 приблизительно равно 0,

то $u(t) = F_1 x(t)$;

П$_2$: если x_1 приблизительно равно

$$\pm\frac{\pi}{2}\left(|x_1| < \frac{\pi}{2}\right), \text{ то } u(t) = -F_2 x(t),$$

где F_1 и F_2 – матрицы коэффициентов усиления.

Общий логический регулятор представим в виде $u(t) = -h_1(x_1(t))F_1 x(t) - h_2(x_1(t))F_2 x(t)$, где h_1 и h_2 – функции, определяющие принадлежность угла отклонения правилам П$_1$ и П$_2$ соответственно, причем $h_1 + h_2 = 1$.

Исследование эффективности синтезированной модели управления (8) проведено с помощью программы, реализованной в компьютерной среде Matlab. Программа содержит модули для ввода данных, для вывода результатов, для графической иллюстрации результатов, модуль основной программы, объединяющей работу двух правил, а также две подпрограммы и модуль-справки, в котором дается описание используемых обозначений. Нахождение решений дифференциальных уравнений, описывающих модель Такаги – Суджено перевернутого маятника, осуществляется с помощью алгоритма Лоусона, представленного в виде расширения для Matlab, и использующего подпрограммы: right.m – вычисляет значение функции в правой части (8), rightj.m – вычисляет матрицу Якоби правой части (8). При проведении численного анализа использованы следующие значения параметров $m = 2$ кг, $M = 8$ кг, $2\ l = 1$ м и начальные условия $x(0) = [\pi/6 \quad 0]^T$, $x(0) = [\pi/3 \quad 0]^T$. Коэффициенты усиления матриц F_1 и F_2 найдены с учетом условий устойчивости модели (8), изложенных в работе [8]. Значения функций принадлежности h_1, h_2 найдены с помощью редактора функций принадлежности Membership Function Editor пакета Fuzzy Logic Toolbox среды Matlab [9].

Численное моделирование процесса стабилизации системы управления перевернутым маятником при конкретных начальных условиях представлено на рисунках 1 и 2.

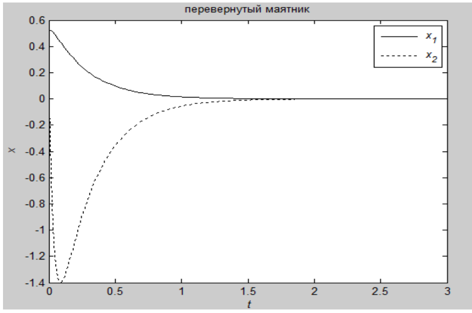

Рис. 1. Процесс стабилизации перевернутого маятника при $x(0) = [\pi/6\ 0]^T$

Компьютерная программа, разработанная на основе численного метода Лоусона, показывает, что при заданных начальных условиях можно построить логический регулятор, стабилизирующий маятниковую систему (8).

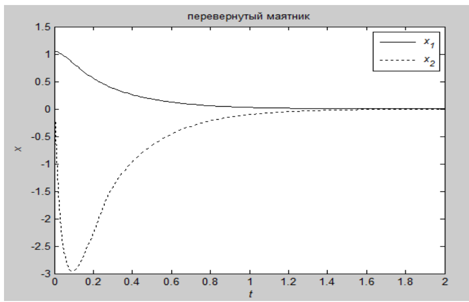

Рис. 2. Процесс стабилизации перевернутого маятника при $x(0) = [\pi/3\ 0]^T$

Результаты работы могут быть использованы в задачах исследования устойчивости управляемых маятниковых систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-08-00710).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Takagi T., Sugeno M**. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man and Cyber. – 1985.–Vol. 15. – P. 116–132.
2. **Масина О.Н., Дружинина О.В.** Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. – М.: ВЦ РАН, 2011.
3. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985.
4. **Коробицын В.В., Маренич В.Б., Фролова Ю.В..** Исследование поведения явных методов Рунге – Кутты при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Математические структуры и моделирование. – 2007. – Вып. 17. – С. 19–25.
5. **Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.** Общее описание подпрограмм решения обыкновенных дифференциальных уравнений библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ // Вычислительные методы и программирование. – 2003. – Т. 4. – С. 7–15.
6. **Douglas Lawson J.** Generalized Runge–Kutta processes for stable systems with large Lipshitz constants // SIAM J. Numer. Anal. – 1967. – Vol. 4. – № 3. – P. 372–380.
7. **Николаев С.Ф., Тонков Е.Н.** О некоторых задачах, связанных с существованием и построением неупреждающего управления для нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. – 2000. – Т.1. – С. 11–32.
8. **Масина О.Н., Игонина Е.В.** Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих движение перевернутого маятника, с помощью функции Ляпунова и логического регулятора // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 13. – № 4. – С. 58–62.
9. **Игонина Е.В.** Исследование устойчивости и компьютерное моделирование маятниковой системы управления // Материалы школы-семинара молодых ученых. Фундаментальные проблемы системной безопасности. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. – С. 93–99.

Игонина Елена Викторовна – ассистент кафедры прикладной математики и информатики Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28
тел.: +7 (47467) 6-92-71, e-mail: elenaigonina7@mail.ru