УДК 517.929

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

А.И. Зубов, В.И. Зубов, А.Ф. Зубова
Санкт-Петербургский государственный университет

THE INVESTIGATION OF DYNAMICS SAFETY

A.I. Zubov, V.I. Zubov, A.F. Zubova

В статье на основе теоремы Харитонова и метода допустимых линейных преобразований коэффициентов получены линейные преобразования коэффициентов интервальных многочленов Гурвица, оставляющие эти многочлены интервальными многочленами Гурвица. Такими преобразованиями удается расширить множество всех значений коэффициентов характеристического многочлена, при которых исследуемая система асимптотически устойчива. Тем самым облегчается решение общей задачи робастной устойчивости.

Ключевые слова: многочлен, положительное число, коэффициент, неравенство, критерий, необходимые и достаточные условия, доказательство, интервал.

In present article on base theorem Haritonov's and the method of admitting linear reorganizations coefficients is gives linear reorganization of coefficients interval multitudes Gurvich is leaves this multitudes interval multitudes Gurvich. This reorganizations is successes to widen the multitude all coefficients characteristical multitude, by that investigating system asymptotical stability. Thereby is reduces the solution of common task robust stability.

Keywords: multitude, positive number, coefficient, inequality, criteria, necessary and sufficient conditions, proof, interval.

Введение

Задача исследования робастной устойчивости заключается в выяснении тех областей технических параметров изучаемой системы, которые соответствуют заданному типу устойчивости или неустойчивости системы, а точнее областям расположения корней характеристического многочлена на комплексной плоскости [1]. Понятие динамической безопасности по отношению к изучаемому явлению заключается в асимптотической устойчивости стационарного или расчетного режима при любых значениях допустимых параметров, принадлежащих множеству D. Иными словами, исследование динамической безопасности изучаемого процесса – одна из частных задач робастной устойчивости.

Исследование многочленов Гурвица

Приведем вначале несколько определений и докажем известный результат Харитонова с помощью критерия Михайлова.

Рассмотрим некоторые допустимые линейные преобразования коэффициентов многочлена Гурвица,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad (1)$$

оставляющие эти многочлены многочленами Гурвица [2].

Теорема 1. Если многочлен Гурвица (1) является многочленом нечетной степени $n = 2k+1$, то линейные преобразования его коэффициентов

$$b_{2i} = \alpha a_{2i},\, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1} + \gamma a_{2i},\, (i = 0,1,\ldots), \qquad (2)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ – произвольные числа, являются допустимыми линейными преобразованиями.

Доказательство. Пусть годограф Михайлова многочлена (1), являющегося многочленом Гурвица, имеет вид

$$f(i\omega) = g(\omega) + i\,h(\omega), \qquad (3)$$

$$g(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \ldots,$$

$$h(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \ldots,$$

тогда годограф Михайлова многочлена

$$F(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n, \qquad (4)$$

коэффициенты которого находятся по формулам (2), имеет вид

$$F(i\omega) = G(\omega) + iH(\omega) = \\ = \alpha g(\omega) + i(\beta h(\omega) + \gamma\omega g(\omega)). \qquad (5)$$

Так как многочлен (1) является многочленом Гурвица, то многочлены $g(\omega)$ и $h(\omega)$ имеют в сумме n неотрицательных корней, которые не совпадают и перемежаются $0 = \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$. Покажем, что корни многочленов $G(\omega)$ и $H(\omega)$ обладают теми же свойствами [3].

Действительно, многочлен $G(\omega) = \alpha g(\omega)$ имеет те же корни ω_{2i}^*, что и многочлен $g(\omega)$:

$$\omega_2 = \omega_2^* < \omega_4 = \omega_4^* < \ldots < \omega_{2k} = \omega_{2k}^*. \qquad (6)$$

Заметим, что многочлен $\beta h(\omega)$ также имеет те же корни, что и многочлен $h(\omega)$, а многочлен $\gamma\omega g(\omega)$ имеет те же корни, что и многочлен $g(\omega)$ с добавлением корня $\omega_1 = 0$. Так как многочлены $g(\omega)$ и $h(\omega)$ принимают поочередно положительные и отрицательные значения, то

$$H(\omega_1) = 0, H(\omega_2) = \beta > 0, H(\omega_3) = \gamma\omega_3 g(\omega_3) < 0,$$

$$H(\omega_4) = \beta h(\omega_4) < 0, \quad H(\omega_5) = \gamma\omega_5 g(\omega_5) > 0,$$
$$H(\omega_6) = \beta h(\omega_6) > 0, ..., H(\omega_{2k}) = \beta h(\omega_{2k}),$$
$$H(\omega_{2k+1}) = \gamma\omega_{2k+1} g(\omega_{2k+1}),$$

где знаки последних величин зависят от четности k. Таким образом, корни ω^*_{2k+1} многочлена $H(\omega)$ расположены в интервалах

$$0 = \omega_1 = \omega_1^*, \omega_2 < \omega_3^* < \omega_3,$$
$$\omega_4 < \omega_5^* < \omega_5, ..., \omega_{2k} < \omega^*_{2k+1} < \omega_{2k+1},$$

так как на границах этих промежутков многочлен $H(\omega)$ имеет значения разных знаков. Из последних неравенств и неравенств (6) следует, что многочлены $G(\omega)$ и $H(\omega)$ имеют в сумме $n = 2k+1$ неотрицательных корня $0 = \omega_1^* < \omega_2^* < ... < \omega^*_{2k+1}$, которые не совпадают и перемежаются. Отсюда вытекает, что преобразованный многочлен $F(z)$ является многочленом Гурвица и, следовательно, линейное преобразование коэффициентов (2) является допустимым. Теорема доказана [4].

Теорема 2. Если многочлен Гурвица (1) является многочленом четной степени $n = 2k$, то линейные преобразования его коэффициентов

$$b_{2i} = \alpha a_{2i} + \gamma a_{2i-1}, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1}, (i = 0,1,...), a_{-1} = 0, \quad (7)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ – произвольные числа, являются допустимыми преобразованиями [5].

Доказательство этой теоремы проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 с введением соответствующих многочленов

$$G(\omega) = \alpha g(\omega) + \gamma\omega h(\omega), \quad H(\omega) = \beta h(\omega),$$

являющихся действительной и мнимой частями годографа многочлена (4), коэффициенты которого получаются из коэффициентов исходного многочлена (1) по формулам (7).

Рассмотрим случай, когда коэффициенты характеристического многочлена изучаемой системы зависят от технических параметров изучаемой многокомпонентной системы или технологического процесса, то есть $a_i = a_i(\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Обычно допустимые технические параметры системы или процесса принадлежат некоторому k-мерному параллелепипеду:

$$D = (\overline{\alpha}_1 < \alpha_1 < \underline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_k < \alpha_k < \underline{\alpha}_k), \quad (8)$$

который порождает некоторое n-мерное множество Ω коэффициентов характеристического многочлена $a_i = a_i(\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \Omega$ [6].

Определение 1. Интервальным многочленом называется множество многочленов вида

$$P = \{f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\}, \quad (9)$$

где a_i – действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $\underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i, 0 \le i < n$.

Определение 2. Интервальный многочлен является многочленом Гурвица, если любой многочлен, принадлежащий этому множеству, является многочленом Гурвица.

Рассмотрим четыре «угловых» многочлена

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda) &= \overline{a}_0 + \underline{a}_1\lambda + \underline{a}_2\lambda^2 + \overline{a}_3\lambda^3 + \overline{a}_4\lambda^4 + ... + \lambda^n,\\
f_2(\lambda) &= \underline{a}_0 + \overline{a}_1\lambda + \overline{a}_2\lambda^2 + \underline{a}_3\lambda^3 + \underline{a}_4\lambda^4 + ... + \lambda^n,\\
f_3(\lambda) &= \overline{a}_0 + \overline{a}_1\lambda + \underline{a}_2\lambda^2 + \underline{a}_3\lambda^3 + \overline{a}_4\lambda^4 + ... + \lambda^n,\\
f_4(\lambda) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1\lambda + \overline{a}_2\lambda^2 + \overline{a}_3\lambda^3 + \underline{a}_4\lambda^4 + ... + \lambda^n.
\end{aligned} \quad (10)$$

Теорема Харитонова. Для того чтобы интервальный многочлен был многочленом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы четыре «угловых» многочлена (10) являлись многочленами Гурвица [7].

Доказательство. Необходимость. Так как четыре «угловых» многочлена (10) принадлежат множеству многочленов (9), то они являются многочленами Гурвица, если интервальный многочлен (9) является многочленом Гурвица.

Достаточность. Покажем, что доказательство непосредственно вытекает из критерия Михайлова. Рассмотрим годограф Михайлова (3) для любого многочлена, представимого в виде (9). По критерию Михайлова для того чтобы стандартный многочлен $f(\lambda)$ степени n с положительными коэффициентами являлся многочленом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы многочлены $g(\omega)$ и $h(\omega)$ имели в сумме n неотрицательных корней, которые не совпадают и перемежаются

$$0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < ... < \omega_n, \quad (11)$$

где $p(\omega_n) = 0,\ p(\omega_n) = \begin{cases} h(\omega_n), n = 2k+1, \\ g(\omega_n), n - 2k. \end{cases}$

Покажем, что если четыре «угловых» многочлена (10) являются многочленами Гурвица, то любой многочлен $f^*(\lambda)$ степени n, принадлежащий множеству (9) обладает этим свойством, то есть многочлены $g^*(\omega)$ и $h^*(\omega)$ имеют в сумме n неотрицательных корней, которые не совпадают и перемежаются. Тогда $f^*(\lambda)$ – многочлен Гурвица и, следовательно, интервальный многочлен (9) также будет являться многочленом Гурвица [8].

Действительно, введем в рассмотрение многочлены

$$\underline{h}(\omega), \overline{h}(\omega), \underline{g}(\omega), \overline{g}(\omega): \quad (12)$$
$$\overline{h}(\omega) = \overline{a}_1\omega - \underline{a}_3\omega^3 + \overline{a}_5\omega^5 - \underline{a}_7\omega^7 + ...$$
$$\underline{h}(\omega) = \underline{a}_1\omega - \overline{a}_3\omega^3 + \underline{a}_5\omega^5 - \overline{a}_7\omega^7 + ...$$
$$\overline{g}(\omega) = \overline{a}_0 - \underline{a}_2\omega^2 + \overline{a}_4\omega^4 - \underline{a}_6\omega^6 + ...$$
$$\underline{g}(\omega) = \underline{a}_0 - \overline{a}_2\omega^2 + \underline{a}_4\omega^4 - \overline{a}_6\omega^6 + ...$$

Нетрудно увидеть, что в силу покомпонентных неравенств в многочленах (9) для любых многочленов $g^*(\omega)$ и $h^*(\omega)$, определяемых формулами (3), где $\underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i, 0 \le i < n$ при $\omega \ge 0$, выполняются неравенства

$$\underline{g}(\omega) \le g^*(\omega) \le \overline{g}(\omega), \underline{h}(\omega) \le h^*(\omega) \le \overline{h}(\omega). \quad (13)$$

Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда $n = 2k$. Так как многочлены $f_1(\lambda)$,

$f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ и $f_4(\lambda)$ являются многочленами Гурвица, то для многочленов $\underline{h}(\omega)$, $\overline{h}(\omega)$, $\underline{g}(\omega)$, $\overline{g}(\omega)$ справедливо следующее расположение их неотрицательных корней:

$$\begin{gathered}
0=\underline{\omega}_1<\overline{\omega}_2<\underline{\omega}_3<\overline{\omega}_4<\ldots<\overline{\omega}_n,\\
\underline{h}(0)=0,\ \overline{g}(\overline{\omega}_2)=0,\ \underline{h}(\underline{\omega}_3)=0,\ \overline{g}(\overline{\omega}_4)=0,\ldots,\overline{g}(\overline{\omega}_n)=0,\\
0=\overline{\omega}_1<\underline{\omega}_2<\overline{\omega}_3<\underline{\omega}_4<\ldots<\underline{\omega}_n,\\
\overline{h}(0)=0,\ \underline{g}(\underline{\omega}_2)=0,\ \overline{h}(\overline{\omega}_3)=0,\ \underline{g}(\underline{\omega}_4)=0,\ldots,\underline{g}(\underline{\omega}_n)=0,\\
0=\underline{\omega}_1<\underline{\omega}_2<\underline{\omega}_3<\underline{\omega}_4<\ldots<\underline{\omega}_n,\\
\underline{h}(0)=0,\ \underline{g}(\underline{\omega}_2)=0,\ \underline{h}(\underline{\omega}_3)=0,\ \underline{g}(\underline{\omega}_4)=0,\ldots,\underline{g}(\underline{\omega}_n)=0,\\
0=\overline{\omega}_1<\overline{\omega}_2<\overline{\omega}_3<\overline{\omega}_4<\ldots<\overline{\omega}_n,\\
\overline{h}(0)=0,\ \overline{g}(\overline{\omega}_2)=0,\ \overline{h}(\overline{\omega}_3)=0,\ \overline{g}(\overline{\omega}_4)=0,\ldots,\overline{g}(\overline{\omega}_n)=0.
\end{gathered}\tag{14}$$

Обозначая корни многочленов $g^*(\omega)$, $h^*(\omega)$ через ω_i^* и используя неравенства (13) и (14), а также последовательную смену знаков многочленов $\underline{h}(\omega)$, $\overline{h}(\omega)$, $\underline{g}(\omega)$, $\overline{g}(\omega)$, получим следующие соотношения для этих корней:

$$\begin{gathered}
0=\underline{\omega}_1=\omega_1^*=\overline{\omega}_1<\underline{\omega}_2\le\omega_2^*\le\overline{\omega}_2<\underline{\omega}_3\le\\
\le\omega_3^*\le\overline{\omega}_3<\overline{\omega}_4\le\omega_4^*\le\underline{\omega}_4<\overline{\omega}_5\le\omega_5^*\le\underline{\omega}_5,\ldots
\end{gathered}\tag{15}$$

Итак, мы показали, что n неотрицательных корней ω_i^* многочленов $g^*(\omega)$ и $h^*(\omega)$ не совпадают и перемежаются, что и доказывает теорему.

Замечание 1. Очевидно, теорема Харитонова справедлива и для многочленов, у которых $a_n \neq 1$.

Из теоремы Харитонова и теорем 1, 2 вытекает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть интервальный многочлен (9) является многочленом Гурвица. Тогда при допустимых линейных преобразованиях его коэффициентов (2), (7) он также останется интервальным многочленом Гурвица.

Доказательство. Так как угловые многочлены интервального многочлена (9) при допустимых линейных преобразованиях их коэффициентов остаются многочленами Гурвица и являются угловыми многочленами преобразованного интервального многочлена, то этот интервальный многочлен, согласно теореме Харитонова, является интервальным многочленом Гурвица. Теорема доказана.

Сформулируем полученные ранее результаты в более общем виде.

Теорема 4. Пусть: 1) $\widetilde{A}$ – произвольное выпуклое множество коэффициентов многочленов Гурвица; 2) D – матрица допустимого линейного преобразования. Тогда множество коэффициентов $\widetilde{B}$ преобразованных многочленов, являющихся многочленами Гурвица $\widetilde{B}=\bigcup\limits_{A\in\widetilde{A}} DA$, есть выпуклое множество.

Доказательство. Пусть заданы два произвольных вектора $A_1\in\widetilde{A}$ и $A_2\in\widetilde{A}$. Тогда для произвольного числа $\alpha\in[0,1]$ вектор $A_1+\alpha(A_2-A_1)\in\widetilde{A}$. Отсюда вытекает, что $D(A_1+\alpha(A_2-A_1))=DA_1+\alpha(DA_2-DA_1)\in\tilde{B}$, значит для любых векторов $B_1=DA_1$ и $B_2=DA_2$ любая точка, лежащая на соединяющем их отрезке является элементом множества $\widetilde{B}$, то есть $\widetilde{B}$ выпукло. Теорема доказана.

Замечание 2. Заметим, что построенные выше допустимые линейные преобразования коэффициентов многочленов Гурвица (2), (7) зависят от одного, двух или трех произвольных положительных параметров. Варьируя эти параметры, мы будем получать различные выпуклые множества коэффициентов многочленов Гурвица.

Выводы

Метод допустимых линейных преобразований коэффициентов позволяет без всяких вычислительных затрат существенно расширить любое выпуклое множество значений коэффициентов многочлена Гурвица с помощью линейных преобразований этих коэффициентов, что существенно облегчает решение как задач динамической устойчивости, так и задач робастной устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Барабанов А.Т.** Полное решение проблемы Рауса в теории регулирования // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 301. – № 5. – С. 1061–1065.
2. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
3. **Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.** Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. – Т. 86. –№ 3. – С. 453–456.
4. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.
5. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967.
6. **Зубов С.В., Стрекопытова М.В.** Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость. – СПб.: СПбГУ, 2010. – 446 с.
7. **Зубов И.В.** Анализ систем управления и способы представления программных управлений. – СПб.: ВВМ, 2014. – 150 с.
8. **Зубов А.В., Шабурова О.А.** Управление динамическими системами. – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2005. – 83 с.

Зубов Алексей Иванович, аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета
191024, г. Санкт-Петербург, ул. Конная, д. 22/5, кв. 4,
тел. (812) 274-80-11, e-mail: ddemidova@mail.ru