УДК 517.929

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

А.И. Зубов, В.И. Зубов, А.Ф. Зубова
Санкт-Петербургский государственный университет

THE INVESTIGATION OF CVAZYLINEAR DYNAMICS SYSTEMS WITH AFTERACTION

A.I. Zubov, V.I. Zubov, A.F. Zubova

Статья посвящена развитию математического аппарата, позволяющего осуществлять общий и прикладной системный анализ устойчивости систем управления с последействием, включающего новые аналитические методы и численные алгоритмы решения задач исследования устойчивости по первому нелинейному приближению и задач робастной устойчивости для этих систем.

Ключевые слова: формула, функционал, постоянная, условие, неравенство, система, решение, интегральное уравнение, аргумент.

This work is supposes development of mathematical apparatus, allowing to realize base and applied system analysis of stability systems controlling with after action, including new analytical methods and calculating algorithms of solution the tasks investigation stability on first no linear approaches and the tasks robust stability for this systems.

Keywords: form, functional, constant, condition, inequality, system, solution, integral equation, argument.

Введение

В настоящее время развитие методов системного анализа динамики управляемых систем с последействием обусловлено как широким кругом прикладных задач, среди которых основными являются задачи управления сложными техническими объектами и технологическими процессами, так и бурным развитием компьютерной техники. Появляющиеся все новые возможности использования компьютеров, развитие их аппаратной части и программного обеспечения, систем сбора данных на базе микропроцессорных систем в задачах управления позволяют математикам пересматривать существующие и создавать новые, имеющие большую практическую направленность аналитические, качественные и численные методы исследования систем с последействием. Эти методы позволяют осуществлять более точное прогнозирование функционирования систем и определять границы динамической безопасности функционирования на всех этапах жизненного цикла (от этапа проектирования – до этапа эксплуатации).

Итерационные методы построения решений краевых задач

Пусть дана квазилинейная динамическая система с последействием

$$\dot{X} = P(t)X + F(t) + \mu S(t, X(t+\theta)) \tag{1}$$

и квазилинейные краевые условия

$$B_1 \le \int_0^T dG(\cdot)X(\cdot) + \mu K(X(\theta)) \le B_1, \tag{2}$$

где компоненты векторных функционалов $S(t,\Phi(\theta))$ и $K(\Phi(\theta))$ являются вещественными и непрерывными функционалами, определенными при $\theta \in [-h,0], \Phi(\theta) \in C[0,T], t \in [0,T]$; $h > 0$ – положительная постоянная, μ – малый параметр [1].

Пусть, кроме того, эти функционалы удовлетворяют условиям Липшица так, что справедливы неравенства:

$$\| S(t,\Psi_1) - S(t,\Psi_2) \| \le L_1 \| \Psi_1 - \Psi_2 \|_0^{-h},$$

$$\| K(\Psi_1) - K(\Psi_2) \| \le L_2 \| \Psi_1 - \Psi_2 \|_0^{-h},$$

где $\Psi_i = (\varphi_{i1},\dots,\varphi_{in})^*$, L_1 и L_2 – положительные постоянные,

$$\| W_1 - W_2 \|_0^{-h} = \max_t \sup_{\theta\in[-h,0]} | w_{1i}(\theta) - w_{2i}(\theta) | .$$

Введем вспомогательные краевые условия

$$\int_0^T dG(\cdot)X(\cdot) + \mu K(X(t+\theta)) = \Gamma . \tag{3}$$

Предположим, что решение квазилинейной динамической системы (1) $X = X(t)$ удовлетворяет краевым условиям (2), то есть система (1) при некоторой начальной функции $X(\theta) = \Phi(\theta)$, $\theta \in [-h,0]$ имеет решение $X = X(t)$, удовлетворяющее вспомогательным краевым условиям (3) при $\Gamma = \Gamma_0$. Используя формулу Коши, подставим это решение, как и ранее, в краевые условия (3) при $\Gamma = \Gamma_0$. Получим тождество

$$\int_0^T dG(\cdot)Z(\cdot)X_0 + \int_0^T dG(\tau)Z(\tau)\int_0^\tau Z^{-1}(\theta)F(\theta)d\theta +$$
$$+\mu\int_0^T dG(\cdot)Z(\theta)\int_0^T Z^{-1}(\tau)S(\tau, X(\tau))d\tau + \tag{4}$$
$$+\mu K(X(t+\cdot) = \Gamma_0.$$

Тождество (4) можно переписать в виде

$$A_1X_0 + H + \mu H_1(X(\cdot)) = \Gamma_0, \tag{5}$$

$$H_1 = \int_0^T dG(\theta)Z(\theta)\int_0^\theta Z^{-1}(\tau)S(\tau, X(\tau+\cdot))d\tau + K(X(\cdot)),$$

$X_0 = \Phi(0)$. Отсюда вытекает, что если задача (1), (2) имеет решение, то оно удовлетворяет интегральным уравнениям (5) и формуле Коши

$$X(t) = Z(t)\{X_0 + \int_0^t Z^{-1}(\tau)(F(\tau) + \tag{6}$$
$$+\mu S(\tau, X(\tau+\cdot)))d\tau\}.$$

Для случая $n \geq m$ справедливы следующие теоремы [2].

Теорема 1. Пусть матрица A_1 размера $(n\times n)$ – неособенная. Тогда для любого вещественного вектора $\Gamma = \Gamma_0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого μ, удовлетворяющего условию $|\mu| < \mu_0$, существует совокупность решений задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$, причем некоторые из этих решений могут быть получены как предел последовательных приближений [3].

Доказательство. Представляя решение задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$ в форме Коши и исключая величину X_0 с помощью тождества (6), получим, что оно удовлетворяет соответствующей системе интегральных уравнений

$$X(t) = X_0(t) + \mu H_2(t, X(t+\theta)), \tag{7}$$

где $X_0(t)$ является решением линейной задачи (1), (2) при $\Gamma = \Gamma_0$. Отметим, что $H_2(t, X(t+\theta))$ – вещественный непрерывный функционал, удовлетворяющий условиям Липшица по всем своим аргументам, кроме первого:

$$H_2 = -Z(t)A_1^{-1}H_1(X(\cdot)) + Z(t)\int_0^t Z^{-1}(\tau)S(\tau, X(\tau+\cdot))d\tau.$$

Организуем последовательные приближения по формуле

$$X_{k+1}(t) = X_0(t) + \mu H_2(t, X_k(t+\theta)), \tag{8}$$

$k = 0,1,2,\ldots,\quad t\in[0,T],\ X_k(\theta) = X_0,\ \theta\in[-h,0]$. Отметим, что начальную функцию при таких последовательных приближениях можно задавать различными способами, например, $X_k(\theta) = X_0(1-q\theta)$, где q – некоторая постоянная [4].

Легко заметить, что $\| X_0(t)\}\| < m_1$, $m_1 > 0$ – *const* при $t\in[0,T]$. Пусть $m_2 > m_1$ некоторое число. Так как функционал H_2 является непрерывной функцией своих аргументов, то при любой непрерывной функции $X(t)$, такой, что $\| X(t)\| < m_2$, $t\in[-h,T]$, имеем $\| H_2(t, X(t+\cdot))\| \leq m_3$, где m_3 – некоторая положительная постоянная [5].

Выберем такое число μ_1, чтобы при любой величине $|\mu| \leq \mu_1$ выполнялось неравенство $\| X_0(t) + \mu H_2(t, X(t+\cdot))\| \leq m_2$, где $t\in[0,T]$, а $X(t)$ – любая непрерывная функция, при которой $\| X_0(t)\| \leq m_2$, $t\in[-h,T]$. Для этого достаточно, чтобы $\mu_1 = (m_2 - m_1)\setminus m_3$. Отсюда следует, что все приближения (8) являются непрерывными и ограниченными функциями при $|\mu| \leq \mu_1$, $t\in[-h,T]$.

Докажем теперь, что существует такое число $\mu_0 \leq \mu_1$, что ряд

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \ldots$$

равномерно сходится на промежутке $[-h,T]$ при любом значении μ, удовлетворяющем условию $|\mu| \leq \mu_0$.

Так как функционалы S и K удовлетворяют условиям Липшица, то, как легко показать, существует такая положительная величина L, что

$$\| H_2(t, X(t+\cdot)) - H_2(t, Y(t+\cdot))\|_0^T \leq$$
$$\leq L\| X(\cdot) - Y(\cdot)\|_{-h}^T,$$

$\mu \leq \mu_1$.

Вычтем из неравенства (8) при $k = m$ его же при $k = m-1$ и получим

$$\| X_{m+1}(t) - X_m(t)\| \leq \mu L\| X_m(\cdot) - X_{m-1}(\cdot)\|_{-h}^T.$$

Отсюда следует очевидное неравенство

$$\| X_{m+1}(\cdot) - X_m(\cdot)\|_{-h}^T \leq (\mu L)^m m_2.$$

Из этой оценки вытекает, что упомянутый выше ряд равномерно сходится при $t\in[-h,T]$ и любом выборе $\mu: |\mu| < \mu_2$, где $\mu_2 L = 1$. При значениях μ, удовлетворяющих условию $|\mu| \leq \mu_0 = \min(\mu_1, \mu_2)$, построение последовательных приближений оказывается возможным, каждая функция $X_m(t)$ непрерывна и последовательность $\{X_m(t)\}, m = 1,2,\ldots$ равномерно сходится на промежутке $[-h,T]$ [6].

Обозначив предел этой последовательности через $X(t)$, непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что эта функция является решением системы (1), а так как она удовлетворяет и равенству (4), то данная функция и есть одно из решений задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$. Теорема доказана [7].

Замечание 1. При выполнении условий теоремы, используя метод последовательных приближений (8) и различные способы задания начальных функций $\Phi(\cdot) = X_m(\cdot),\ \theta \in [-h, 0]$, можно найти различные решения задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$.

Теорема 2. Пусть ранг матрицы A_1 равен m. Тогда для любого вещественного вектора $\Gamma = \Gamma_0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого μ, удовлетворяющего условию $|\mu| \le \mu_0$, существует совокупность решений задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$, зависящая от ($n - m$) произвольных постоянных, причем некоторые из этих решений могут быть получены как предел последовательных приближений [8].

Доказательство. Пусть существует решение задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$. Тогда оно удовлетворяет тождеству (5).

Не ограничивая общности, будем считать, что первые m строк матрицы A_1 линейно независимы и образуют неособенную матрицу A_2, а остальные $(n-m)$ строк образуют матрицу A_3. Разрешим равенство (5) относительно m первых компонент вектора $X_0 : \overline{X}_0 = (x_1, ..., x_m)^*$, считая, что остальные $(n-m)$ компонент определены постоянным вектором $C = (c_{n-m+1}, ..., c_n)^*$. Получим тождество

$$\overline{X}_0 = A_2^{-1}(\Gamma_0 - H - \mu H_1(X(\cdot)) - A_3 C). \quad (9)$$

Итак, решение задачи (1), (3) удовлетворяет интегральному уравнению (6) при $X_0 = \{\overline{X}_0, C\}$. Организуем, как и ранее, последовательные приближения

$$X_{k+1}(t) = \overline{X}_0(t) + \mu H_3(t, X_k(t+\theta)), \quad (10)$$

$k = 0,1,2,...,\ t \in [0,T],\ , X_k(\theta) = \overline{X}_0(0),\ \theta \in [-h, 0]$, где $\overline{X}_0(t)$ – одно из решений линейной задачи (1), (2) при $\Gamma = \Gamma_0$, имеющее вид (6), где постоянный вектор $\overline{X}_0$ удовлетворяет равенству (7) при $\mu = 0$ [9].

Отметим, что начальную функцию при таких последовательных приближениях можно задавать различными способами, например, положить, что $X_k(\theta) = \overline{X}_0(0)(1 - q\theta)$, где $\theta \in [-h, 0]$, q – некоторая постоянная.

Точно так же как и в теореме 1, можно доказать, что существует $\mu_0 > 0$ такое, что при любом значении μ, удовлетворяющем условию $|\mu| \le \mu_0$, ряд, определяемый соотношениями (10), равномерно сходится на промежутке $[-h, T]$ к решению задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$. Теорема доказана.

Замечание 2. При выполнении условий теорем 1, 2 для любого вектора $\Gamma_0 \in D$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для всех $\mu : |\mu| \le \mu_0$ решение задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$ существует и может быть получено методом последовательных приближений [10].

С другой стороны, легко доказать, что если точка Γ_0 является внутренней точкой параллелепипеда D, то решение линейной задачи при $\Gamma = \Gamma_0, X = X_0(t)$ дает другой способ построения решений квазилинейной задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$ и достаточно малых μ. Для этого достаточно построить решение уравнения (1) при $X(0) = X_0(0)$ и произвольной непрерывной начальной функции $\Phi(\theta),\ \ \theta \in [-h, 0],\ \ \Phi(0) = X_0(0)$. Справедливость данного утверждения вытекает из ограниченности этого решения при $t \in [-h, T] : \| X(t) \| \le m_1$, тождества $A_1 X_0 + H = \Gamma_0$, формулы (5) и очевидного неравенства $\| \mu H_1(X(\theta)) \|_{-h}^{T} \le \mu \overline{L} \, \| X(\theta) \|_{-h}^{T}$, где $\overline{L}$ – постоянная Липшица для функционала H_1.

Замечание 3. Очевидно, что проблема существования и построения решения задачи (1), (3) эквивалентна проблеме определения такой начальной функции для системы (1), чтобы решение системы (1) с этой начальной функцией, удовлетворяло краевым условиям (3).

Для общего случая, когда ранг матрицы A_1 равен $k\ (k < m)$, справедлива теорема [6].

Теорема 3. Если гиперплоскость *W*, описываемая уравнением

$$\Gamma_0 = H + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \Gamma_j, \quad (11)$$

имеет с параллелепипедом D общую внутреннюю точку Γ_0, то существует $\mu_0 > 0$ такое, что при всех μ, удовлетворяющих условию $|\mu| \le \mu_0$, задача (1), (3) имеет решение.

Доказательство этой теоремы полностью повторяет замечание 2. Другими словами, если взять начальную функцию линейной задачи (1), (3) при $\Gamma = \Gamma_0$ в качестве начальной функции для системы (1), то при достаточно малых μ получим решение, удовлетворяющее краевым условиям (3).

Выводы

Результаты статьи применены в задачах системного анализа управляемых космических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, в том числе и с последействием, при синтезе законов управления и построения эффективных численных алгоритмов теории управления. На основе результатов статьи созданы эффективные алгоритмы исследования устойчивости систем первого приближения и конструктивные критерии изучения границ этой устойчивости в пространстве параметров исследуемых систем. Полученные авторами новые прикладные методы системного анализа позволяют решить проблему динамической безопасности изучаемого объекта, то есть определить допустимые границы изменения параметров самой системы так, чтобы сохранялась устойчивость изучаемой системы. При этом возникает возможность строить более эффективные системы управления, так как разработанные методы позволяют рассматривать сразу целое семейство математических моделей динамики функционирования управляемых систем, определяемое множеством их допустимых параметров. Это дает возможность значительно снизить затраты материальных ресурсов, денежных средств и времени на отработку вновь создаваемых актуальных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Азбелев Н.В., Максимов В.Л., Рахматуллина Л.Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 384 с.
2. **Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.** Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
3. **Андреев Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976.
4. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
5. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967.
6. **Зубов С.В., Стрекопытова М.В.** Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость. – СПб.: СПбГУ, 2010. – 446 с.
7. **Зубов И.В.** Анализ систем управления и способы представления программных управлений. – СПб.: ВВМ, 2014. – 150 с.
8. **Зубов А.В., Шабурова О.А.** Управление динамическими системами. – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2005. – 83 с.
9. **Зубов Н.В., Зубов А.В., Зубов С.В., Зубова А.Ф.** Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем. – СПб.: ВВМ, 2011. – 362 с.
10. **Зубов С.В., Зубов А.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений. – СПб.: Мобильность-плюс, 2012. – 357 с.

Зубов Алексей Иванович, аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета
191024, г. Санкт-Петербург, ул. Конная, д. 22/5, кв. 4
тел. (812) 274-80-11, e-mail: ddemidova@mail.ru