УДК 517.929

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А.И. Зубов, В.И. Зубов, А.Ф. Зубова
Санкт-Петербургский государственный университет

THE INVESTIGATION OF SYSTEMS CONTROL

A.I. Zubov, V.I. Zubov, A.F. Zubova

В настоящей статье открывается широкое поле для исследования систем управления, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных. С помощью этого подхода легко изучить поведение решений на многообразиях различных форм и тем самым сделать выводы о всей качественной картине, создаваемой системой. Можно предложить также различные стратегии выбора фазовых многообразий, позволяющие быстро проанализировать поведение решений системы.

Ключевые слова: функция, управление, решение, матрица, число, ветвь, волна.

In giving article is opens wild field for investigation of systems controlling, is describes systems differential equations in practical derivatives. With help this approaches easy to learn behavior of solutions on multitudes same forms and to make conclusions about all qualitative picture, is building of system. Is may be to suppose so same strategies of choose faze multitudes, is allows quickly to analyze behavior of solutions systems.

Keywords: function, controlling, solution, matrix, number, branch, wave.

Введение

Особый интерес представляет изучение условной устойчивости не нулевых, а равновесных решений системы дифференциальных уравнений с частными производными. Действительно, если нас интересует близость к нулю лишь части компонент вектора U, то в этом случае естественно рассматривать эту задачу как задачу об устойчивости по части переменных. Мы можем рассматривать вопросы устойчивости уходящих движений в функциональных пространствах решений систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Постановка задачи

Перейдем теперь к вопросам стабилизации решений систем дифференциальных уравнений в частных производных с помощью релейных управлений. Рассмотрим теперь управляемую систему, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{j=1}^{k}A_j\frac{\partial U}{\partial x_j}=AU+BV+G(U), \qquad (1)$$

где $U=(u_1,...,u_n)^*$; $A, A_1,...,A_k$ – постоянные матрицы размерности $n\times n$; B – постоянная матрица размерности $n\times r$; $V=(v_1,...,v_r)$ – вектор управления; G – голоморфная векторная функция.

Будем считать, что управления $v_1,...,v_r$ могут принимать только два возможных значения: +1 и –1. Мы будем рассматривать также случаи $r>1$. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(X)$:

$$\varphi(X)=\begin{cases}-1 \text{ при } X<L,\\ +1 \text{ при } X>-L.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь систему (1) с управлением v, задаваемым соотношением [1] $v=\varphi(\sum_{s=1}^{n}c_s u_s)$.

Правая часть системы (1) при этом управлении является многозначной функцией. По определению мы будем называть простую волну $U=U(\omega)$, являющуюся решением системы (1), ударной волной, если частная производная $\frac{\partial U}{\partial \omega}$ терпит разрыв. Мы будем рассматривать вопрос об условной стабилизации системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{j=1}^{k}A_j\frac{\partial U}{\partial x_j}=AU+BV, \qquad (2)$$

где $U=(u_1,...,u_n)^*$; $A_1,...,A_k$ – постоянные матрицы размерности $n\times n$; B – постоянная матрица размерности $n\times r$; $V=(v_1,...,v_r)^*$ – вектор управления [2].

Рассмотрим множество переключательных функций $\varphi_i(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } x<l_i,\\ +1 \text{ при } x>l_i,\end{cases}$ $i=1,...,r$, где l_i – положительные числа. Пусть положительные числа l_i удовлетворяют соотношениям $l_i<l \quad (i=1,...,r)$.

Компоненты вектора V будем искать в виде [3]

$$v_i = \varphi_i(c_i U), \quad i = 1,...,r, \tag{3}$$

где $c_1,..,c_r$ – постоянные векторы. Пусть C – матрица размерности $n \times r$, столбцами которой являются векторы $c_1,...,c_r$. Поскольку правая часть системы (2) при выборе управления в виде (3) является многозначной функцией, то это обстоятельство может повлечь за собой математически неопределимое состояние системы. Но физически такое состояние невозможно, поэтому для определения состояния системы необходимо в начальный момент указывать не только множество начальных условий, но и ветвь многозначной функции (которой является правая часть), определяющую в начальный момент состояние системы [4].

Будем искать решение системы (2) в виде простой волны $U(\omega)$. Потребуем, чтобы фаза ω и матрицы $A_j \quad (j = 1,...,k)$ удовлетворяли следующему условию [5]: $\det(E + \sum_{j=1}^{k} A_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) \neq 0$. Тогда простая волна U удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial U}{\partial \omega} = A'U + B'V$, где

$$\begin{aligned} A' &= (E + \sum_{j=1}^{k} A_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j})^{-1} A, \\ B' &= (E + \sum_{j=1}^{k} A_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j})^{-1} B. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $B_1,...,B_r$ – столбцы матрицы B'.

Теорема. Если среди векторов $A^m B_i$ $(m = 0,...,n-1, \; i = 1,...,r)$ имеется n линейно независимых, то существует управление V, определяемое соотношениями (3), при котором система (2) может быть условно стабилизирована. В системе при этом управлении в сколь угодно малой окрестности решения $U = 0$ возникнет стабильное колебание, если l достаточно мало [6].

Доказательство. Положим в системе (4) $V = CU$. Тогда система может быть приведена к виду $\frac{dU}{d\omega} = (A' + B'C)U$.

Можно показать, что элементы матрицы C могут быть выбраны таким образом, чтобы решение $U = 0$ было асимптотически устойчивым. Будем считать, что матрица C выбрана именно таким образом. Тогда для любой отрицательно определенной квадратичной формы W_- переменных $u_1,...,u_n$ можно указать положительно определенную квадратичную форму W_+ этих же переменных такую, что будет выполняться соотношение $\frac{dW_+}{dU}(A' + B'C)U = W_-$ [7].

Положим теперь, что

$$v_j = \varphi_j(\frac{\partial W_+}{\partial U} B_j). \tag{5}$$

Подставим в (4) выражение (5). Найдем полную производную функции W_+ в силу полученной системы: $\frac{dW_+}{d\omega} = W_- + \frac{\partial W_+}{\partial U} B'(V - CU)$, где V – вектор, компоненты которого определяются формулами (5). В достаточно малой окрестности решения $U = 0$ соответствующие компоненты векторов $V - CU$ и V имеют одинаковые знаки, следовательно, функция $\frac{\partial W_+}{\partial U} B'(V - CU)$ может быть неотрицательной лишь в зоне неоднозначности правой части, то есть при выполнении условий [8] $-l_j < \frac{\partial W_+}{\partial U} B_j < l_j$.

Следовательно, число l можно выбрать таким образом, чтобы для любых $\varepsilon > 0$ выполнялось соотношение $W_- + \frac{\partial W_+}{\partial U} B'(V - CU) < -\alpha < 0$ $\delta > 0, \delta < \varepsilon$, когда $\delta \leq |U| \leq \varepsilon$; при этом ε выбрано так, чтобы максимальный по модулю элемент вектора CU не превосходил по абсолютной величине единицы. Отсюда следует, что в системе (4) имеется стабильное колебание, расположенное в окрестности решения $U = 0$, причем все движения этой системы, начинающиеся в окрестности этого решения, стремятся к стабильному колебанию, а степень их отклонения от него может быть сделана сколь угодно малой. Этим и доказывается возможность условной стабилизации системы (2).

Доказательство закончено.

Отметим, что при переходе решений системы (2) с ветви на ветвь в момент переключения управлений происходит разрыв частной производной волнового процесса, хотя сам процесс остается непрерывным. Это и приводит к возникновению ударных волн, и волновые поверхности разрыва определяются переключениями в законе управления [9]. Исследуем вопрос о нахождении общего решения системы дифференциальных уравнений в частных производных в виде простой волны.

Волновое уравнение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Будем искать решение как функцию фазовой переменной ω. Подставив $U = U(\omega)$ в последнее выражение, получим

$$U''A + U'B = 0, \tag{7}$$

где $U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2}$, $U' = \frac{\partial U}{\partial \omega}$, $A = (\frac{\partial \omega}{\partial t})^2 - a^2 (\frac{\partial \omega}{\partial x})^2$, $B = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Для того чтобы множество решений $U(\omega)$ представляло собой множество произвольных функций фазовой переменной, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (7) не накладывало ограничений на $U(\omega)$, а это возможно лишь при выполнении требований $A \equiv B \equiv 0$. Если выполнено лишь условие $B \equiv 0, A \not\equiv 0$, то необходимо выполняется $U'' = 0$, то есть $U(\omega)$ представляет собой линейную функцию фазовой переменной, удовлетворяющей волновому уравнению, а это не меняет поставленной задачи [1]. Изучим подробнее случай $A \equiv 0, B \equiv 0$:

$$\begin{aligned} &(\frac{\partial \omega}{\partial t})^2 - a^2 (\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 \equiv 0, \\ &\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \equiv 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

При этом фаза ω является линейной функцией переменных t, x и имеет вид $\omega_{1,2} = x \pm at$. Возможный случай $\omega = -x \pm at$ не рассматривается, так как $U(\omega)$ является произвольной функцией фазовой переменной. Общее решение $U(\omega)$ можно представить в виде линейной комбинации произвольных функций фазовых переменных $\omega_1 = x + at$ и $\omega_2 = x - at$:

$$U = U_1(x + at) + U_2(x - at). \qquad (9)$$

Произвольные функции U_1, U_2 подлежат определению из начальных и граничных условий.

Замечание. Пусть $A \not\equiv 0, B \not\equiv 0$ и отношение B/A при некоторой фазе ω является интегрируемой функцией ω: $B/A = f(\omega)$. Тогда уравнение (7) определяет некоторое частное решение $U(\omega)$ при данном ω. Это частное решение обязательно должно получаться из (9) [10].

Выводы

Рассмотренные примеры показывают, что подход, использующий представление решений систем дифференциальных уравнений с частными производными в виде совокупности простых волн, может быть с успехом применен не только для качественного исследования, но и для интегрирования таких систем, для решения начальных и граничных задач. Отметим также то важное обстоятельство, что форма волны зависит от фазы в общем случае. При рассмотрении нелинейных задач метод простых волн также может быть применен для качественного исследования решений на многообразиях различных форм. В этом случае для определения $U(\omega)$ получаются также нелинейные дифференциальные уравнения, исследование которых можно проводить как численно, так и аналитически [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Адамов Н.В.** О колебаниях интегралов уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и некоторых условиях устойчивости // Математический сборник. – 1935. – Т. 42. – № 6. – С. 647–668.
2. **Бабаков И.М.** Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560с.
3. **Беллман Р.** Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.
4. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Физматгиз, 1954. – 576 с.
5. **Жуковский Н.Е.** Условия конечности интегралов уравнения // Математический сборник. – 1892. – Т. 16. – № 3. – С. 582–591.
6. **Зубов А.В., Зубов С.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений. ВВМ, СПб. 2011. 323 с.
7. **Зубов А.В., Шабурова О.А.** Управление динамическими системами. – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2005. – 83 с.
8. **Зубова А.Ф.** Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий. – СПб.: СПбГУ, 2004. – 472 с.
9. **Зубов А.В., Зубов Н.В., Зубов С.В., Зубова А.Ф.** Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем. – СПб.: ВВМ, 2011. – 362 с.
10. **Зубов И.В., Зубов Н.В., Стрекопытова М.В.** Анализ управляемых систем и равновесных движений. – СПб.: ВВМ, 2012. – 322 с.
11. **Зубов А.В., Зубов Н.В**. Динамическая безопасность управляемых систем. – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2009. – 172 с.

Зубов Алексей Иванович, аспирант кафедры теории управления факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета
191024, ул. Конная, д. 22/5, кв. 4, г. Санкт-Петербург, Россия
Тел. (812) 274-80-11. e-mail: ddemidova@mail.ru