УДК 517.91

О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.Н. Зубкова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

BIFIRCFTION PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF NONAUTONOMOUS DIFFTRENTIAL EGUATIONS

O.N. Zybkova

Рассматривается система неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия существования бифуркационного значения параметра, равного нулю и связного множества начальных значений периодических ненулевых решений системы.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, бифуркация, периодические решения.

The systems of nonautonomous ordinarily differential eguations is considered. Conditions of existence of bifurcation valuation parameter egual zero and connected set of initial values of periodic nonzero solutions of systems are received.

Keywords: system differential eguations, bifurcations, periodic solutions.

Вопросу исследования существования бифуркационного значения параметра системы обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены многие работы, среди них [1–4]. Настоящая работа продолжает ранее опубликованные исследования [2].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = (A(t,\lambda) + B(t,\lambda) + \Phi(t,x,\lambda))x, \qquad (1)$$

$V(\varepsilon) = \{x \in E^n, \|x\| \le \varepsilon\}$, $m,n \in N$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, E^m – m-мерное векторное пространство. Определим норму вектора как евклидову и согласно равенству $\|A\| = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$. Обозначим $K(\delta,\nu) = \{u = (\lambda;\gamma), \lambda \in W(\delta), \gamma \in P(\nu)\}$, $\gamma \in P(\nu) = \{\gamma \in E^n, \|\gamma\| \le \nu\}$, $\lambda \in W(\delta) = \{\lambda \in E^m, \|\lambda\| \le \delta\}$.

Будем считать, что выполнены следующие условия:

1.1. Система дифференциальных уравнений (1) удовлетворяет условиям теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра на множестве определения.

1.2. Матрицы $A(t;\lambda), B(t,\lambda), \Phi(t;\lambda;x)$ периодические по t, λ, x на множествах $R \times W(\delta)$, $R \times W(\delta) \times V(\varepsilon)$ соответственно, ω-периодичны по t на прямой $(-\infty,+\infty)$, матрица $\Phi(t;\lambda;0)$ нулевая.

Пусть $x(t;\lambda;\gamma)$ – нетривиальное решение системы (1), $x(\omega;\lambda;\gamma) = \gamma$.

Следуя [4], перейдем к исследованию линейной системы дифференциальных уравнений. Далее будем рассматривать линейную систему

$$\dot{y} = C(t;\lambda;x)y, \qquad (2)$$

где $C(t;\lambda;x) = A(t;\lambda) + B(t,\lambda) + \Phi(t;\lambda;x(t;\lambda;\gamma))$. Укажем связь между ω-периодическими решениями систем (1) и (2). Пусть N – множество начальных значений ω-периодических решений системы (2).

Теорема [4]. Для того чтобы решение системы (1) при выполнении условий 1.1, 1.2 было ω-периодическим необходимо и достаточно, чтобы начальное значение этого решения принадлежало множеству N.

Также рассмотрим укороченную систему

$$\dot{z} = (A(t;\lambda) + B(t,\lambda))z. \qquad (3)$$

Известна следующая связь между решениями систем (2) и (3) [2]:

$$Y(t;\lambda;\gamma;E) = Z(t;\lambda;E) + Q(t;\lambda;\gamma;0). \qquad (4)$$

E – единичная матрица, $Z(t;\lambda;E)$ – фундаментальная матрица решений системы дифференциальных уравнений (3), $Q(t;\lambda;\gamma;0)$ – матрица решений системы дифференциальных уравнений

$$\dot{Q}(t;\lambda;\gamma;0) = C(t;\lambda;\gamma)Q(t;\lambda;\gamma;0) + \Phi(t;\lambda;x(t;\lambda;\gamma))Z(t;\lambda;E). \qquad (5)$$

Очевидно, что матрица $Q(t;\lambda;\gamma;0) \to 0$ при $\gamma \to 0$ при любом λ в силу условия 1.1,

$Q(t;\lambda;0;0)=0$ – нулевая матрица. Обозначим $Q(t;\lambda;\gamma;0))=(\varphi_{ij}(t,\lambda,\gamma))_1^n$.

Для дальнейших рассуждений необходимо сохранение вида нормальной жордановой формы матрицы, поэтому введем определение.

Определение 1. Консервативной на некотором множестве будем называть матрицу, сохраняющую вид своей нормальной жордановой формы на этом множестве относительно любого неособенного и непрерывного преобразования.

Положим

$$D(\omega;\lambda)=\int_0^{\omega}(\exp D_1(t;\lambda)A(t;\lambda)\times$$

$$\times\exp(-D_1(t;\lambda))+B(t;\lambda))dt,\ D_1(t;\lambda)=\int_0^t B(t_1;\lambda)dt_1.$$

Пусть выполнены условия:

1.3. На множестве $W(\delta)$ собственные числа матрицы $D(\omega;\lambda)$ имеют кратность, равную единице.

1.4. Матрица $D(\omega;\lambda)$ консервативна на множестве $[0;\omega]\times W(\delta)$.

Лемма 1. Решение системы уравнений

$$b_{i1}\overline{\gamma_1}+...+b_{ik}\overline{\gamma_k}+...+(b_{ij}+cb_{ik})\overline{\gamma_j}+$$
$$+...+b_{in}\overline{\gamma_n}=0,\ i=\overline{1,n}.$$

можно выразить через решение системы уравнений $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\gamma_j=0,\ \ i=\overline{1,n}$, в виде $\gamma_j=\overline{\gamma_j},\ j=1,...,$ $k-1,\ k+1,...,n,\ \overline{\gamma_k}=\gamma_k-c\gamma_j$.

Доказательство проводится путем подстановки.

Определение 2 [3]. Вектор λ_0 назовем бифуркационным значением параметра λ, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\lambda\in U(\lambda_0,\delta)$, $|\lambda-\lambda_0|<$ $<\delta$, при котором система уравнений (1) имеет ненулевое ω-периодическое решение $x(t;\lambda;\gamma)$, удовлетворяющее неравенству $\|x(t;\lambda;\gamma)\|<\varepsilon$, $t\in[0,\omega]$.

Для дальнейших исследований используем результаты работы И.М. Салаховой и Г.Н. Чеботарева [1].

Символ $[A,B]$ определим согласно равенству $[A,B]=AB-BA$. Пусть выполнены условия:

1.5. Матрицы $A(t;\lambda)$, $B(t;\lambda)$ функционально-коммутативны, то есть $A(t;\lambda)=\sum_{i=1}^{p}A_i(\lambda)\varphi_i(t;\lambda)$, $B(t;\lambda)=\sum_{i=1}^{q}B_i(\lambda)\psi_i(t;\lambda)$, $[A_i(\lambda),A_j(\lambda)]=0$, $i,j=$ $=1,...,p$, $[B_j(\lambda),B_i(\lambda)]=0$, $i,j=\overline{1,q}$, φ_i,ψ_i – скалярные функции.

1.6. Существуют числа $\beta_i,\ i=\overline{1,p}$, не все равные нулю одновременно, и матрица $A_0(\lambda)=$ $=\sum_{i=1}^{p}\beta_i A_i(\lambda)$ имеет только взаимно простые элементарные делители.

1.7. $[A_0(\lambda),[B_K(\lambda),A_0(\lambda)]]=0,\quad k=\overline{1,q},\quad \lambda\in$ $\in W(\delta)$.

1.8. $[A_j(\lambda),[B_K(\lambda),A_i(\lambda)]]=0,\quad k=\overline{1,q},\quad i,j=$ $=\overline{1,p}$, $\lambda\in W(\delta)$.

1.9. $[A(\lambda),[B(\lambda),A(\lambda)]]=0,\lambda\in W(\delta)$.

Условия 1.7–1.9 эквивалентны [1].

Положим, $D(t;\lambda)=M(t;\lambda)+D_1(t;\lambda)$, $M(t;\lambda)=$ $=\int_0^t\exp D_1(t_1;\lambda)A(t_1;\lambda)\exp(-D_1(t_1;\lambda))dt_1$.

Известна следующая теорема.

Теорема [1]. Пусть для укороченной системы (1) выполнены условия 1.5, 1.6, одно из условий 1.7–1.9, тогда интегральная матрица этой системы, нормированная в точке $t=0$, при непрерывных функциях $\varphi_i(t;\lambda)$, $\psi_i(t;\lambda)$ представима в виде

$$Z(t;\lambda;\Gamma)=\exp M(t;\lambda)\exp D_1(\omega;\lambda),$$

где $\left[M;\dfrac{dM}{dt}\right]=0$.

Теорема 1. Если для системы (1):

1) выполнены условия 1.1–1.2, условия 1.3–1.6 и одно из условий 1.7–1.8, матрицы $M(t;\lambda)$ и $D_1(\omega;\lambda)$ перестановочны,

2) а) существует ровно p пар комплексно-сопряженных собственных чисел $\mu_j\pm iv_j$, $j=1,...,p$, матрицы $D(\omega;\lambda)$, удовлетворяющих условию $v_j(\omega;0)=2\pi n_j,\ \mu_j(\omega;0)=0,\quad n_j\in Z$, б) ровно s действительных собственных чисел $\alpha_l(\omega;\lambda)$, $l=1,...,s$, матрицы $D(\omega;\lambda)$ таких, что $\alpha_l(\omega;0)=0$, в) число $r=s+2p$ таково, что $0<r\le n,\ m\ge r$,

3) возможно представление в любой достаточно малой окрестности точки $\lambda=0$

$$\mu_j(\omega;\lambda)=\sum_{i=1}^{r}\beta_i^j\lambda_{m_i}+o(\|\lambda\|),$$

$$v_j(\omega;\lambda)=\sum_{i=1}^{r}\xi_i^j\lambda_{m_i}+2\pi n_j+o(\|\lambda\|),j=1,...,p,$$

$$\alpha_l(\omega;\lambda)=\sum_{i=1}^{r}\omega_i^l\lambda_{m_i}+o(\|\lambda\|),l=1,...,s,$$

$\det\left(\beta_i^j, \xi_i^j, \omega_i^l\right)_1^r \neq 0$, то существует связное множество начальных значений ненулевых ω-периодических решений системы (1), $\lambda = 0$ является бифуркационным значением параметра системы (1).

Доказательство. Найдем начальное значение ω-периодического нетривиального решения системы (1). Для этого решим уравнение

$$(Y(\omega;\lambda;\gamma;E) - E)\gamma = 0 \qquad (7)$$

относительно γ.

Из условия 1) теоремы и равенства (4) следует, что

$$Y(\omega;\lambda;\gamma;E) = \exp D(\omega;\lambda) + Q(\omega;\lambda;\gamma;0). \qquad (8)$$

Все собственные числа матрицы $D(\omega;\lambda)$ простые, поэтому её можно представить в виде

$$D(\omega;\lambda) = \operatorname{diag}\left\{\alpha_1(\omega;\lambda),\ldots,\alpha_r(\omega;\lambda), \left\|\begin{matrix}\mu_{r+1}(\omega,\lambda), & \nu_{r+1}(\omega,\lambda)\\ -\nu_{r+1}(\omega,\lambda), & \mu_{r+1}(\omega,\lambda)\end{matrix}\right\|,\ldots, \left\|\begin{matrix}\mu_n(\omega,\lambda), & \nu_n(\omega,\lambda)\\ -\nu_n(\omega,\lambda), & \mu_n(\omega,\lambda)\end{matrix}\right\|\right\}.$$

Запишем матрицу

$$\exp D(\omega;\lambda) = \operatorname{diag}\left\{\begin{matrix} e^{\alpha_1(\omega;\lambda)},\ldots, \\ \left\|\begin{matrix} e^{\mu_n(\omega,\lambda)}\cos\nu_n(\omega,\lambda), & e^{\mu_n(\omega,\lambda)}\sin\nu_n(\omega,\lambda)\\ -e^{\mu_n(\omega,\lambda)}\sin\nu_n(\omega,\lambda), & e^{\mu_n(\omega,\lambda)}\cos\nu_n(\omega,\lambda)\end{matrix}\right\|\end{matrix}\right\}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(\omega,\lambda)} - 1 + \varphi_{11}(\omega,\lambda,\gamma), & \varphi_{12}(\omega,\lambda,\gamma), & \ldots & \ldots \\ \varphi_{21}(\omega,\lambda,\gamma), & e^{\alpha_2(\omega,\lambda)} - 1 + \varphi_{22}(\omega,\lambda,\gamma), & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1}(\omega,\lambda,\gamma), & \varphi_{n2}(\omega,\lambda,\gamma), & \ldots & e^{\mu_n(\omega,\lambda)}\cos\nu_n(\omega,\lambda,\gamma) - 1 + \varphi_{nn}(\omega,\lambda,\gamma) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $n-r$ элементов матрицы $(Y(\omega,\lambda,\gamma,E) - E)$, соответствующих неравным нулю собственным числам матрицы $D(\omega;\lambda)$, находятся в левом верхнем углу. Благодаря такому расположению преобразуем матрицу $(Y(\omega,\lambda,\gamma,E) - E)$ так, чтобы все элементы первых $(n-r)$ строк выше главной диагонали стали равными нулю. Прибавим к последнему столбцу все столбцы, начиная с $(n-r+1)$-го и далее через один. Преобразованную матрицу обозначим $\widetilde{Y}(\omega,\lambda,\gamma) - E$. Система (7) примет вид

$$(\widetilde{Y}(\omega,\lambda,\gamma) - E)\,\widetilde{\gamma} = 0. \qquad (9)$$

Введем замену $\bar{\nu}_i(\omega,\lambda) = \nu_i(\omega,\lambda) - 2\pi n_j$, $n_j \in \mathrm{Z}$, вместо $\bar{\nu}_i(\omega,\lambda)$ будем писать $\nu_i(\omega,\lambda)$. В результате преобразования элементы последнего столбца матрицы $\widetilde{Y}(\omega,\lambda,\gamma) - E$ либо нули, либо имеют вид

$$\begin{gathered} e^{\alpha_i(\omega,\lambda)} - 1 + \Phi_i(\omega;\lambda;\gamma), \\ e^{\mu_j(\omega;\lambda)}\sin\nu_j(\omega,\lambda) + \Phi_j(\omega;\lambda;\gamma) \\ e^{\mu_j(\omega;\lambda)}cos\nu_j(\omega,\lambda) - 1 + \Phi_j(\omega;\lambda;\gamma), \end{gathered} \qquad (10)$$

$i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,s}$.

Функции $\Phi_j(\omega;\lambda;\gamma)$ состоят из элементов, представляющих собой линейную комбинацию элементов матрицы $\mathrm{Q}(\omega,\lambda,\gamma,0)$.

Приравняем нулю выражения (10) и преобразуем их

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{r}\omega_s^l\lambda_{m_s} = \ln(1 - \Phi_l(\omega;\lambda;\gamma) + o_l(\|\lambda\|), \\ \sum_{i=1}^{r}\beta_i^j\lambda_{m_o} = \frac{1}{2}\ln(\Phi_j^2(\omega;\lambda;\gamma) + \\ + (1 - \Phi_{\hat{j}}(\omega;\lambda;\gamma))^2) + o_j(\|\lambda\|), \\ \sum_{i=1}^{r}\xi_i^j\lambda_{m_i} = \operatorname{arg}tg\frac{\Phi_j(\omega;\lambda;\gamma)}{1 - \Phi_{\hat{j}}(\omega;\lambda;\gamma)} + o_j(\|\lambda\|). \end{gathered} \qquad (11)$$

Система уравнений (11) задает оператор $A:(\gamma;\lambda) \to \lambda \in E^m$, имеющий неподвижную точку λ_0 при каждом фиксированном γ, так как множество $W(\delta)$ отображается этим оператором во множество $W(\delta_1)$, $\delta_1 \le \alpha\delta, \alpha < 1$, при фиксированном γ $\rho(\widetilde{A}\lambda_1, \widetilde{A}\lambda_2) \le \alpha\rho(\lambda_1,\lambda_2)$. Выберем те γ, которые являются решениями уравнения (9). Среди них есть решения γ, отличные от нуля. Это следует из того, что уравнение $(\widetilde{Y}(\omega,\lambda_0,\gamma) - E)\widetilde{\gamma} = 0$ имеет решение $\widetilde{\gamma} = (0,0,\ldots,\widetilde{\gamma}_n)$, $\widetilde{\gamma}_n$ – любое число, так как в матрице $(\widetilde{Y}(\omega,\lambda_0,\gamma) - E)$ последний столбец нулевой. Решение уравнения (7) имеет координаты, которые можно найти по лемме. Число γ – решение уравнения (7), соответствующее λ_0, обозначим γ_0; очевидно, $\gamma_0 \neq 0$.

По определению $\lambda = 0$ – бифуркационное значение параметра. Для дальнейшего доказательства напомним принцип связности.

Определение [5]. Оператор A, действующий в банаховом пространстве E, называется имеющим сглаживание на множестве T, если по каждому $\varepsilon > 0$ может быть построен такой оператор A_ε, что $\|Ax - A_\varepsilon x\| < \varepsilon$ при $x \in T$ и уравнение $x = A_\varepsilon x + h$ при $\|h\| \le \varepsilon$ имеет на T не более одного решения. Оператор A_ε называется при этом сглаживанием оператора A.

Теорема [5]. Пусть T – выпуклое ограниченное и замкнутое множество, A – уплотняющий оператор, который преобразует T в себя. Пусть A имеет сглаживание, которое также является уплотняющим оператором. Тогда множество решений уравнения $x = Ax$, лежащих в T, связно.

Оператор A имеет сглаживание на множестве $W(\delta)\times P(v)$ в силу своей непрерывности и принципа сжимающих отображений, который применим в виду произвольности выбора v.

Определение. Оператор A называется оператором обобщенного сжатия, если $\rho(Ax, Ay) \le q(\alpha,\beta)\rho(x, y)$ при $\alpha \le \rho(x, y) \le \beta$, причем $q(\alpha,\beta) < 1$.

Докажем, что оператор A и его сглаживание являются уплотняющими операторами.

Известно [5], что уплотняющим оператором является оператор, разложимый в виде суммы оператора обобщенного сжатия $\tilde{A}$ и вполне непрерывного оператора $\tilde{\tilde{A}}$.

Представим оператор A в указанном виде. Первое слагаемое $\tilde{A}$ имеет вид

$$\sum_{s=1}^{r}\omega_s^l\lambda_{m_s} = \ln(1-\Phi(\varpi,\lambda,\gamma)),$$

$$\sum_{s=1}^{r}\beta_i^j\lambda_{m_i} = \frac{1}{2}\ln(\Phi_j^2(\varpi,\lambda,\gamma)+(1-\Phi_j(\varpi,\lambda,\gamma))^2),$$

$$\sum_{s=1}^{r}\zeta_s^l\lambda_{m_s} = arctg\frac{\Phi_j(\omega,\lambda,\gamma)}{1-\Phi_j(\omega,\lambda,\gamma)}.$$

Эта система уравнений задает оператор обобщенного сжатия, так как множество $W(\delta)$ отображается во множество $W(\delta_1)$, $\delta_1 \le \alpha\delta, \alpha < 1$, при фиксированном γ $\rho(\tilde{A}\lambda_1,\tilde{A}\lambda_2) \le \alpha\rho(\lambda_1,\lambda_2)$. Второе слагаемое $\tilde{\tilde{A}}$

$$\sum_{s=1}^{r}\omega_s^l\lambda_{m_s} = o_l(\|\lambda\|),$$

$$\sum_{s=1}^{r}\beta_i^j\lambda_{m_i} = o_j(\|\lambda\|),$$

$$\sum_{s=1}^{r}\zeta_s^l\lambda_{m_s} = o_j(\|\lambda\|).$$

Эта система уравнений задает непрерывный оператор, который является вполне непрерывным оператором. Так как сглаживание отличается от оператора на бесконечно малую непрерывную добавку, то аналогичные рассуждения доказывают, что оно является уплотняющим оператором. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Еругин М.И.** Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1963. – 246 с.
2. **Зубкова О.Н.** Периодические решения систем дифференциальных уравнений с параметром // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Горький, 1986. – С.92–93.
3. **Красносельский М.А**. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1975. 512 с.
4. **Терехин М.Т.** К теории бифуркаций систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. / РГПИ. – Рязань, 1982. – С. 141–147.
5. Функциональный анализ /под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Зубкова Ольга Николаевна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина.
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.
тел.:+7(4912) 28-05-74, e-mail:terehin@rsu.edu.ru