УДК 517.9

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

О.В. Дружинина, О.Н. Масина
Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина

SYSTEM APPROACH TO STABILITY RESEARCH OF THE MODELS DESCRIBED BY THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFERENT TYPES

O.V. Druzhinina, O.N. Masina

Описан системный подход к исследованию устойчивости и управляемости моделей, описываемых различными типами дифференциальных уравнений и включениями. Системный подход базируется на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений. Полученные результаты использованы для исследования устойчивости математических моделей экологических систем.

Ключевые слова: системный подход, ключевая модель, устойчивость, дифференциальные уравнения, принцип редукции.

System approach to stability research and controllability of the models described by various types of the differential equations and inclusions is described. System approach is based on the principle of a reduction of a problem about stability of solutions of differential inclusion to a problem on stability of other types of the equations. The obtained results are used for stability research of mathematical models of ecological systems.

Keywords: system approach, key model, stability, differential equations, principle of reduction.

1. Введение

Теории общих систем и системному анализу посвящена обширная литература (см., например, [1, 2]). Вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений рассматривались в работах [3–13]. Эффективным методом анализа устойчивости является метод функций Ляпунова [10–13]. В настоящей статье описан базирующийся на развитии результатов работ [10–12] системный подход к исследованию устойчивости и управляемости моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов. Рассмотрено понятие ключевой математической модели, позволяющее с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с запаздыванием, стохастическими дифференциальными уравнениями, дифференциальными включениями, нечеткими дифференциальными уравнениями. Рассмотрен принцип редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости нечеткого дифференциального уравнения.

Получены теоремы о взаимосвязи устойчивости решений уравнений различных типов. Рассмотрена модель экологической динамики, учитывающая конкуренцию и миграцию видов. Для указанной модели на основе принципа редукции выполнен анализ устойчивости.

Подход, основанный на принципе редукции и на использовании ключевой модели, позволяет выполнить сравнительный анализ качественных свойств математических моделей при переходе от детерминированного описания к недетерминированному и обосновать построение и использование моделей того или иного типа.

2. Формализация подхода к исследованию устойчивости

Пусть R – множество всех действительных чисел, R^n и K – некоторые евклидовы пространства. Пусть C_{R^n} есть пространство всех измеримых ограниченных отображений отрезка $[-r, 0]$ в R^n, которое будем называть пространством предысторий. Здесь r – неотрицательное число, но будем допускать также значение $r = 0$ (когда отрезок $[-r, 0]$ вырождается в точку 0, а пространство C_{R^n} сводится к R^n) и значение $r = \infty$ (когда отрезок $[-r, 0]$ превращается в полуинтервал $(-\infty, 0]$). Через $B_{R^n}(M, r)$ и $B_K(M, r)$ будем обозначать r-окрестность множества M соответственно в пространстве R^n и K.

Пусть Ω и Λ – непустые множества, элементам ω и λ которых ставятся в соответствие некоторые функции $a(\omega;\cdot): R \to K$ и $\varphi(\lambda;\cdot) \in C_{R^n}$ соответственно. Назовем $a(\omega;\cdot)$, $\varphi(\lambda;\cdot)$ реализациями управления a и предыстории φ соответственно.

Пусть $x(t)$ является измеримым отображением полуинтервала $[s-r, b) \subset R$ в R^n, $b > s$, причем отображение является ограниченным на каждом отрезке области определения. Если отрезок $[t-r, t]$ содержится в $[s-r, b)$, обозначим через x_t элемент из C_{R^n}, определяемый равенством $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ при всех $\theta \in [-r, 0]$. Пусть D – подмножество из $R \times R^n \times K$ и f: $D \to R^n$. Равенство

$$x(t) = \varphi(0) + \int_s^t f\left(u, x_u, a(\omega, u)\right) du, \qquad (1)$$

где $x_s = \varphi(\lambda) \in C_{R^n}$, называется ключевой математической моделью с начальным значением $t = s$ и предысторией φ.

Функция $x ::= x(\omega, \lambda, \cdot)$: $[s-r, b) \to R^n$ называется движением модели (1) с предысторией $\varphi ::= \varphi(\lambda;\cdot) \in C_{R^n}$, если $x_s = \varphi$ и при всех $t \in (s, b)$ выполняется равенство (1). Если функция $x(t)$ предполагается дифференцируемой при почти всех $t \ge s$, то модель (1) можно представить в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x_t, a(\omega, t)\right), \ x_S = \varphi(\lambda). \qquad (2)$$

Если ничего не известно о правилах выбора параметров ω и λ, то уравнение (2) сводится к дифференциальному включению

$$\frac{dx(t)}{dt} = F\left(t, x_t\right), x_S = \varphi(\lambda) \in \Phi, \qquad (3)$$

где $x(t) ::= x(\omega, \lambda; t)$ и $x_t ::= x(\omega, \lambda)_t$, $\Phi ::= \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ и многозначное отображение F определяется равенством

$F(t, x_t) ::= \{f(t, x(\omega, \lambda)_t, a(\omega, t)) | \ \omega \in \Omega, \lambda \in \Lambda\}$.

Совокупность $J(s, \Phi)$ всех движений включения (3) с предысториями $x_s \in \Phi$ называется решением включения (3) с начальным моментом s и предысторией Φ.

Если указаны функции принадлежности $\mu_{a(\omega;\, t)}: K \to [0, 1]$ и $\mu_{\varphi(\lambda;\, \theta)}: R^n \to [0, 1]$ для значений функций $a(\omega;\cdot): [s, \infty) \to K$ и $\varphi(\lambda;\cdot): [-r, 0) \to R^n$, то ключевая модель (2) сводится к нечеткому уравнению

$$\frac{dx}{dt} = F\left(t, x_t, a(t)\right), x_S = \Phi, \qquad (4)$$

решением которого является нечеткая функция x с предысторией Φ. Пусть Ψ есть семейство $\sigma(t)$, $t \in [s-r, \infty)$, согласованных между собой сигма-алгебр на множестве Ω и $\omega = \lambda$ является элементарным исходом в вероятностном пространстве $(\Omega, \Psi(\Omega), P)$. Для каждого $\omega \in \Omega$, рассматривая функции $a(\omega;\cdot): [s, \infty) \to K$ и $\varphi(\lambda;\cdot): [-r, 0) \to R^n$ как реализации случайных процессов $a: [s, \infty) \to K$ и $\varphi: [-r, 0) \to R^n$ соответственно, получим стохастическое уравнение с запаздыванием

$$x(t) = \varphi(0) + \int_s^t f\left(u, x_u, a(u)\right) du. \qquad (5)$$

Решением уравнения (5) будет случайный процесс $x(t)$, имеющий в начальный момент s предысторией случайный процесс φ, реализациями которого служат функции $\varphi(\omega;\cdot)$ из C_{R^n}, являющиеся движениями соответствующей ключевой модели.

Пусть для случайных величин $a(\omega, t)$, $t \in [s, \infty)$, и $\varphi(\omega, \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ числа $m(t)$ и $M(\theta)$ выбираются, например, как математические ожидания или наиболее вероятные значения для случайных величин $a(t)$ и $\varphi(\theta)$ соответственно. Определим числа h и H из условий $P\left\{\|a(t) - m(t)\|_K \le h\right\} = 1 - \alpha$ и $P\left\{\|\varphi(\theta) - M(\theta)\|_C \le H\right\} = 1 - \alpha$.

Тогда множества $a_\alpha(t) ::= B_K(m(t), h)$, $\Phi_\alpha(\theta) ::= B_C(M(\theta), H)$ и $F_\alpha(t, x_t) ::= \{F_\alpha(t, u, \upsilon) | \ u \in (x_t)_\alpha, \ \upsilon \in a_\alpha(t)\}$ можно рассматривать как α-уровни значений $a(t)$, $\Phi(\theta)$ и $F(t, x_t)$ нечетких функций $a(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ и $F(\cdot, x)$ соответственно. При этих условиях можно свести стохастическое уравнение (5) к соответствующему уравнению (4), которое для каждого α-уровня задается дифференциальным включением

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F_\alpha\left(t, x_t\right), x_S \in \Phi_\alpha, \qquad (6)$$

вида (3). Множество всех движений $x(\cdot)$ включения (6) с начальными значениями $x_s \in \Phi_\alpha$ порождает многозначное отображение $x_\alpha(\cdot) = \{x(\cdot): x_s \in \Phi_\alpha\}$, являющееся α-уровнем нечеткой функции $x(\cdot)$, которая будет решением уравнения (4) с начальным значением $x_s \in \Phi$.

Если множества Λ и Ω одноэлементные, то модель (1) описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$x(t) = \varphi + \int_s^t F\left(u, x_u\right) du, \ F(t, x_t) ::= f(t, x_t, a(t)), \qquad (7)$$

в евклидовом пространстве R^n с фиксированным управлением $a(t)$. В частности, она может быть формой записи дифференциального уравнения в частных производных. Если соответствующим параметрам ω и λ реализации управления $a(\omega, \cdot)$ и предыстории $\varphi(\lambda, \cdot)$ выбираются пользователем (возможно, с изменением своего выбора с течением времени), то имеем дело с дифференциальным уравнением с управлением, подбор которого, как правило, связан с минимизацией некоторого функционала. Таким образом, управляемые дифференциальные уравнения с минимизацией некоторого функционала могут рассматриваться как частный случай ключевой модели. Это дает возможность использовать системный подход к исследованию не только свойства устойчивости, но и свойства управляемости. Системный подход к исследованию устойчивости неуправляемых моделей рассмотрен в работах [10, 11].

3. Связь между свойствами устойчивости стохастических и нечетких дифференциальных уравнений

Системный подход, описанный в статье, может рассматриваться как общая концептуальная основа, позволяющая с единой точки зрения изучать свойства устойчивости решений стохастических уравнений [3, 5, 9–12] и нечетких уравнений [8, 10–13].

В следующих теоремах установлена связь между свойствами устойчивости стохастического уравнения (5) и соответствующего ему нечеткого уравнения (4).

Теорема 1. Если нулевое решение нечеткого уравнения (4) α-устойчиво по Ляпунову при каждом $\alpha\in(0, 1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения (5) устойчиво по вероятности (соответственно устойчиво почти наверное).

Доказательство. Пусть $\alpha\in(0, 1]$, $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq s$ заданы. Если нулевое решение для (4) α-устойчиво по Ляпунову при каждом $\alpha\in(0, 1]$, найдется $\delta ::= \delta(t_0, \alpha, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|\varphi\|_C < \delta \Rightarrow \|x_\alpha(t)\|_B < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 . \qquad (8)$$

Поэтому при любом $t \geq t_0$ имеет место неравенство $P\{\|x(t)\|_B < \varepsilon\} > 1- \alpha$ для любого решения $x(t)$ уравнения (5) с предысторией $\varphi\in C_B$, удовлетворяющей условию $\|\varphi\|_C < \delta$, но это и означает устойчивость по вероятности нулевого решения уравнения (5). Если нулевое решение нечеткого уравнения (4) устойчиво по Ляпунову равномерно по α, то есть если δ можно выбрать не зависящим от α, из условия (8) следует $\|\varphi_\alpha\|_C < \delta \Rightarrow \|x_\alpha(t)\|_B < \varepsilon \;\; \forall \alpha \in [0,1)$. Отсюда вытекает, что $\forall t \geq t_0$ $p\{\|x(t)\|_B > \varepsilon\} = 1$ для любого решения $x(t)$ уравнения (5) с предысторией φ, у которой $\|\varphi\|_C < \delta$, что означает устойчивость почти наверное нулевого решения уравнения (5). Теорема доказана.

Теорема 2. Если нулевое решение нечеткого уравнения (4) асимптотически α-устойчиво при любом $\alpha\in(0, 1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения (5) асимптотически устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво почти наверное).

Доказательство. Пусть $\alpha\in(0, 1]$ и $t_0 \geq s$ заданы. Если нулевое решение уравнения (4) асимптотически α-устойчиво при всех $\alpha\in(0, 1]$, то найдется $h ::= h(t_0, \alpha)$ такое, что

$$\|\varphi\|_C < h \Rightarrow \|x_\alpha(t)\|_B \to 0 \text{ при } t \to \infty, \qquad (9)$$

откуда следует $P\left\{\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_B = 0\right\} \geq 1 - \alpha$ для любого решения $x(t)$ уравнения (5), предыстория φ которого удовлетворяет условию $\|\varphi\|_C < h$. Поэтому нулевое решение уравнения (5) асимптотически устойчиво по вероятности. Если асимптотическая α-устойчивость нулевого решения (4) равномерная по α, то есть если число $h(\alpha)$ можно выбрать не зависящим от α, то из (9) следует $P\left\{\lim_{t\to\infty} \|x(t)\|_B = 0\right\} = 1$ для всех решений с $\|\varphi\|_C < h$ и поэтому нулевое решение уравнения (5) асимптотически устойчиво почти наверное. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 могут быть использованы для исследования неустойчивости стохастического уравнения. Действительно, если соответствующее нечеткое уравнение неустойчиво, то по соответствующей теореме 1 или 2 исходное стохастическое уравнение будет неустойчиво.

Обратные к теоремам 1 и 2 утверждения в общем случае неверны, так как каждому неустойчивому стохастическому уравнению соответствует бесконечное множество нечетких дифференциальных уравнений, среди которых могут быть как устойчивые, так и неустойчивые. Поэтому из устойчивости соответствующего нечеткого дифференциального уравнения не следует, вообще говоря, соответствующая устойчивость исходного стохастического уравнения.

4. Теоремы о свойствах дифференциальных включений и нечетких дифференциальных уравнений

От свойств дифференциального включения с помощью ключевой модели можно переходить к свойствам нечеткого дифференциального уравнения. Этот переход основан на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечетких дифференциальных уравнений. Полученное нечеткое уравнение для каждого α-уровня, где $\alpha\notin(0, 1]$, задается соответствующим дифференциальным включением. Множество всех движений включения порождает многозначное отображение, соответствующее α-уровню нечеткой функции, являющейся решением соответствующего нечеткого дифференциального уравнения.

Рассмотрим неавтономное дифференциальное включение

$$dx/dt\in F(t, x) \qquad (10)$$

с локально допустимой правой частью $F: R\times D\to R^n$, где D – открытое множество из евклидова пространства R^n и пусть $B(M, r) = \{x\in D: e(x, M) \leq r\}$ – r-окрестность множества M. Будем использовать верхнюю $D_+V_\alpha(t, x) ::= \sup DV_\alpha(t, x)$ и нижнюю $D_-V_\alpha ::= \inf DV_\alpha(t, x)$ производные α-уровня, $\alpha\in(0, 1]$, а также функции Ляпунова вида $V: B(M, r)\to R$.

Теорема 3 [11, 12]. Если для неотрицательной непрерывной функции $w: [0, r]\to R$ выполнено неравенство

$$D_+V(t, x) \leq -w(e(x, M)), \quad \forall (t, x)\in[s, \infty)\times B(M, r), \quad (11)$$

то для любого движения $\varphi:[s, \omega]\to B(M, r)\backslash B(M, r_1)$, $0 \leq r_1 < 1$ выполнено неравенство $V(t, \varphi(t)) - V(p, \varphi(p)) \leq -\gamma(t-p)$, $\forall t, p\in[s, \omega)$, где $\gamma ::= ::= \inf\{w_3(\rho): r_1 < \rho < r\}$. В частности, при выполнении неравенства $D_+V(t, x) \leq 0$,

$\forall(t,x)\in[s,\infty)\times B(M,r)$ функция $V(t,\varphi(t))$ не возрастает при $t\in[s,\omega)$.

Приведем определения устойчивости относительно дифференциального включения и относительно нечеткого дифференциального уравнения.

Относительно включения (10) замкнутое множество $M\subset D$ называется:

а) устойчивым, если

$$\forall t_0\ge s,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta::=\delta(\varepsilon,t_0)>0,$$
$$\forall\psi\in\Phi\quad \operatorname{dist}(\psi(t_0),M)<\delta\Rightarrow \operatorname{Dom}\psi\supset[t_0,\infty),$$
$$\operatorname{dist}(\psi(t),M)<\varepsilon\quad \forall t\ge t_0;$$

б) положительно притягивающим, если

$$\forall t_0\ge s,\ \forall h::=h(t_0)>0,\ \forall\eta>0,\ \exists T::=T(t_0,h,\eta)>s,$$
$$\forall\psi\in\Phi\quad \operatorname{dist}(\psi(t_0),M)\le h\Rightarrow \operatorname{Dom}\psi\supset[t_0,\infty),$$
$$\operatorname{dist}(\psi(t),M)<\eta\ \text{ при }\ t>T;$$

в) асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и положительно притягивающее.

Если в условиях выше можно выбрать числа δ, h, T не зависящими от t_0, то соответствующее свойство называется равномерным.

Теорема 4. Если для замкнутого множества $M\subset D$ существует функция Ляпунова V относительно включения (10), для которой верно неравенство (10), то множество M равномерно устойчиво в малом относительно этого включения. Если верно неравенство (11), где функция $w: B(M,r)\to R$ непрерывна и положительна вне M, то множество M равномерно асимптотически устойчиво в малом относительно включения (10).

Пусть J – промежуток из R и $F: J\to P(R^n)$ – нечеткая функция. Для функции F α-движением, где $\alpha\in(0,1]$, называется абсолютно непрерывная функция $\varphi: J\to B$, для которой $\varphi(t)\in F_\alpha(t)$ $\forall t\in J$. Через S_α обозначим множество α-движений и через S – объединение всех S_α при $\alpha\in(0,1]$. Множество движений S называется порождающим функцию $F: J\to P(B)$, если $\forall t\in J$, $\forall\alpha\in(0,1]$ $\{\varphi(t)|\ \varphi\in S_\alpha\}=F_\alpha(t)$.

Функция $X: J\to P(R^n)$ называется решением нечеткого дифференциального уравнения

$$dX/dt=F(t,X),\tag{12}$$

если при каждом $t\in J$ выполняется равенство $dX(t)/dt=F\ (t,X(t))$.

Дифференциальное включение

$$d\varphi/dt\in F_\alpha(t,\varphi),\tag{13}$$

где $\alpha\in(0,1]$, называется соответствующим уравнению (12).

Теорема 5. Пусть Y – нечеткое множество, Y_α – α-уровень этого множества, $P(R^n)$ – совокупность всех нечетких подмножеств из евклидова пространства R^n, D – открытое множество из R^n. Нечеткая функция $X: J\to P(R^n)$ при $s\in J$ является решением задачи Коши $X(s)=Y$ для неавтономного дифференциального уравнения $dX/dt=F(t,X)$ тогда и только тогда, когда она определяется нечетким множеством решений S так, что $Y_\alpha=\{\varphi(s):\ \varphi\in S_\alpha\}$ и каждое движение $\varphi\in S_\alpha$ является решением дифференциального включения $d\varphi/dt\in F_\alpha(t,\varphi)$, *где* $F_\alpha: R\times D\to 2^{R^n}$ определятся условием $F_\alpha(t,\varphi)=F(t,\varphi)_\alpha$.

Относительно уравнения (12) замкнутое множество $M\subset P(D)$ называется:

а) устойчивым, если

$$\forall t_0\ge s,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta::=\delta(\varepsilon,t_0),\ \forall B\in P(X)$$
$$(B,M)<\delta\Rightarrow \operatorname{Dom}J(t_0,B)\supset[t_0,\infty),$$
$$e(J(t;t_0,B),M))<\varepsilon\quad \forall t\ge t_0;$$

б) положительно притягивающим, если

$$\forall t_0\ge s,\exists h::=h(t_0)>0,\forall\eta>0,\exists T::=T(t_0,h,\eta)>t_0,$$
$$\forall B\in P(X)\quad e(B,M)<\delta\Rightarrow \operatorname{Dom}J(t_0,B)\supset[t_0,\infty),$$
$$e(J(t;t_0,B),M)<\eta\ \text{при}\ t>T;$$

в) асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и положительно притягивающее;

г) устойчивым в малом, если

$$\forall t_0\ge s,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta::=\delta(\varepsilon,t_0)>0,\ \forall B\in P(X)$$
$$e(B,M)<\delta\Rightarrow e(J(t;t_0,B),M)<\varepsilon\quad \forall t\in\operatorname{Dom}J(t_0,B);$$

д) положительно притягивающим в малом, если

$$\forall t_0\ge s,\ \exists h::=h(t_0)>0,\ \forall\eta>0,\ \exists T::=T(t_0,h,\eta)>t_0,$$
$$\forall B\in P(X)\quad e(B,M)\le h\Rightarrow e(J(t;t_0,B),M)<\eta$$
$$\text{при}\ t\in\operatorname{Dom}J(w,B)\cap[T,\infty);$$

е) асимптотически устойчивым в малом, если оно устойчиво в малом и положительно притягивающее в малом.

Если в условиях выше числа δ, h, T можно выбрать не зависящими от t_0, то соответствующее свойство называется равномерным.

Пусть $\alpha\in(0,1]$. Относительно уравнения (12) замкнутое множество $M\subset P(D)$ называется:

а) α-устойчивым, если

$$\forall t_0\ge s,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta::=\delta(\varepsilon,t_0,\alpha)>0,\ \forall B\subset X$$
$$e(B,M_\alpha)<\delta\Rightarrow \operatorname{Dom}J_\alpha(t_0,B)\supset[t_0,\infty),$$
$$e(J_\alpha(t;t_0,B),M_\alpha))<\varepsilon\quad \forall t\ge t_0;$$

б) положительно α-притягивающим, если

$$\forall t_0\ge s,\exists h::=h(w,\alpha)>0,\forall\eta>0,$$
$$\exists T::=T(t_0,h,\eta,\alpha)>t_0,\forall B\subset X,\ e(B,M_\alpha)\le h\Rightarrow$$
$$\operatorname{Dom}J_\alpha(t_0,B)\supset[t_0,\infty),\ e(J_\alpha(t;t_0,B),M_\alpha)<\eta\ \text{при}\ t>T;$$

в) α-асимптотически устойчивым, если оно α-устойчивое и положительно α-притягивающее;

г) α-устойчивым в малом, если

$$\forall t_0\ge s,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta::=\delta(\varepsilon,t_0,\alpha)>0,\ \forall B\subset X$$
$$e(B,M_\alpha)<\delta\Rightarrow e(J_\alpha(t;t_0,B),M_\alpha)<\varepsilon$$
$$\forall t\in\operatorname{Dom}J_\alpha(t_0,B);$$

д) положительно α-притягивающим в малом, если

$$\forall t_0\ge s,\ \exists h::=h(t_0,\alpha)>0,\ \forall\eta>0,$$
$$\exists T::=T(t_0,h,\eta,\alpha)>t_0,\ \forall B\subset X$$
$$e(B,M_\alpha)\le h\Rightarrow e(J_\alpha(t;t_0,B),M_\alpha)<\eta$$
$$\text{при}\ t\in\operatorname{Dom}J_\alpha(t_0,B)\cap[T,\infty);$$

е) α-асимптотически устойчивым в малом, если оно α-устойчивое в малом и положительно α-притягивающее в малом.

Если в условиях выше числа δ, h, T можно выбрать не зависящими от t_0 и α, то соответствующее свойство называется равномерным по t_0 и α соответственно.

Теорема 6. Пусть $\alpha\in(0, 1]$. Если для $r ::= r(\alpha)$ и неотрицательной непрерывной функции $w_{3\alpha}:[0, r]\to R$ выполняется неравенство

$D_+V_\alpha(t, x) \le -w_{3\alpha}(\rho(x, M)),\ \forall(t, x)\in[s, \infty)\times B(M, r),$ (14)

то для любого α-движения $\varphi:[s, \omega]\to\to B(M, r)\backslash B(M, r_1),\ 0\le r_1 < r$, уравнения (12) выполняется неравенство $V(t, \varphi(t)) - V(p, \varphi(p)) \le \gamma(t-p)$ $\forall t, p\in[s, \omega)$ при $\gamma ::= \inf\{w_{3\alpha}(\rho): r_1 < \rho < r\}$. В частности, при выполнении неравенства

$$D_+V_\alpha(t, x) \le 0 \quad \forall(t, x)\in[s, \infty)\times B(M, r) \qquad (15)$$

функция $V(t, \varphi(t))$ не возрастает при $t\in[s, \omega)$.

Утверждения теоремы 6 непосредственно следуют из теоремы 3.

Теорема 7. Если для замкнутого множества $M\subset P(D)$ существует функция Ляпунова V относительно уравнения (12), для которой при $\alpha\in(0, 1]$ верно (15), то множество M равномерно α-устойчиво в малом относительно этого уравнения. Если верно (14), где функция $w_{3\alpha}:(0, r)\to R$ непрерывна и положительна, то множество M равномерно α-асимптотически устойчиво в малом относительно уравнения (12).

Доказательство. Зафиксируем $\alpha\in(0, 1]$. Из теоремы 5 следует относительно включения (13) равномерная по t_0 устойчивость в малом множества M_α (при выполнении условия (15)) и равномерная по t_0 асимптотическая устойчивость в малом множества M_α (при выполнении условия (14)). Следовательно, ввиду произвольности $\alpha\in(0, 1]$ имеет место соответственно равномерная по t_0 α-устойчивость в малом и α-асимптотическая устойчивость в малом множества M.

5. Построение и анализ модели экологической динамики на основе принципа редукции

Принцип редукции применен для изучения устойчивости модели динамики популяций, учитывающей конкуренцию и миграцию видов. Детерминированное описание модели, являющееся обобщением описания [14] на случай несовпадающих скоростей миграции, дается системой трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - q y_1) + \beta x_2 - \gamma x_1,\\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2) + \gamma x_1 - \beta x_2,\\ \dot{y}_1 &= y_1(1 - r x_1 - y_1), \end{aligned} \qquad (16)$$

где использованы обозначения: x_1 и y_1 – численность конкурирующих видов x и y в ареале вида x_1 (в ареале 1), x_2 – численность вида x в ареале вида x_2 (в ареале 2), $q > 0$ и $r > 0$ – коэффициенты конкуренции видов в ареале 1, β и γ – коэффициенты диффузии видов x и y между двумя ареалами, при этом ареал 2 является убежищем и $\beta \ne \gamma$.

Выполнен качественный анализ с построением фазовых портретов и осуществлен переход к соответствующим дифференциальным включениям и к нечетким дифференциальным уравнениям.

Представим систему (16) в векторной форме

$$dx/dt = f(x), \qquad (17)$$

где $x = (x_1, x_2, y_1)$, $f(x) = (f_1, f_2, f_3) = (x_1(1 - x_1 - q y_1) + \beta x_2 - \gamma x_1,\ x_2(1 - x_2) + \gamma x_1 - \beta x_2,\ y_1(1 - r x_1 - y_1))$, $x \in R_+^3 = R_+\times R_+\times R_+$, $R_+ = [0, \infty)$, $f: R_+^3\to R_+^3$.

В системе (17) коэффициенты β и γ могут принимать различные значения из интервалов $[\beta_1, \beta_2]$ и $[\gamma_1, \gamma_2]$ соответственно, поскольку скорость диффузии компонент различается в различные периоды существования. В связи с этим коэффициенты взаимодействия $q > 0$ и $r > 0$ в (17) можно рассматривать многозначными, то есть $q \in [q_1, q_2]$, $r \in [r_1, r_2]$. Учитывая вышеизложенное, для системы (17) построим дифференциальное включение в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\in x_1(1 - x_1 - q y_1) + \beta x_2 - \gamma x_1,\\ \dot{x}_2 &\in x_2(1 - x_2) + \gamma x_1 - \beta x_2,\\ \dot{y}_1 &\in y_1(1 - r x_1 - y_1), \end{aligned} \qquad (18)$$

где $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$, $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, $q \in [q_1, q_2]$, $r \in [r_1, r_2]$.

В векторной форме систему (18) запишем следующим образом:

$$dx/dt\in F(x), \qquad (19)$$

где $F(x) = \{f(x)\,|\,\beta \in B,\ \gamma \in C,\ q \in Q,\ r \in R\}$, $B ::= [\beta_1, \beta_2]$, $C ::= [\gamma_1, \gamma_2]$, $Q ::= [q_1, q_2]$, $R ::= [r_1, r_2]$, $F: R_+^3\to 2^{R_+^3}$.

Множество $B(M, r) = \{x\in R_+^3\,|\,e(x, M) \le r\}$ будем называть r-окрестностью множества M.

Непрерывная функция $V: B(M, r)\to R$ называется функцией Ляпунова для замкнутого множества $M\subset R_+^3$ относительно включения (19), если существуют число $r > 0$ и неотрицательные неубывающие функции $w_1, w_2: (0, r]\to R$ такие, что $w_1(\rho) > 0$ при $\rho\in(0, r]$, $w_2(0) = 0$ и $w_1(e(x, M)) \le V(x) \le w_2(e(x, M))$, $\forall x\in B(M, r)$.

Производной функции Ляпунова V вдоль движений включения (19) называется определяемая равенством $DV(x) ::= \lim_{\Delta t\to 0}\{[V(\varphi(t+\Delta t)) - V(x)]/\Delta t:\ \varphi\in\Phi,\ \varphi(t) = x\}$ многозначная функция $DV: B(M, r)\to 2^R$; функции D_+V и D_-V, для которых $D_+V(x) ::= \sup DV(x)$ и $D_-V ::= \inf DV(x)$, называются соответственно верхней и нижней производной функции Ляпунова.

Относительно включения (19) замкнутое множество $M\subset R_+^3$ называется:

а) устойчивым в малом, если

$$\forall t_0 \ge s,\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta ::= \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\psi\in\Phi$$
$$e(\psi(t_0), M) < \delta \Rightarrow \mathrm{Dom}\,\psi \supset [t_0, \infty),\ e(\psi(t), M) < \varepsilon$$
$$\forall t\in[t_0, \infty)\cap\mathrm{Dom}\,\psi;$$

б) притягивающим в малом, если

$$\forall t_0 \ge s\ \exists h > 0\ \forall\eta > 0\ \exists T ::= T(h, \eta) > s,\ \forall\psi\in\Phi$$
$$e(\psi(t_0), M) \le h \Rightarrow \mathrm{Dom}\,\psi \supset [t_0, \infty),\ e(\psi(t), M) < \eta$$
$$\text{при } t\in[t_0+T, \infty)\cap\mathrm{Dom}\,\psi;$$

в) асимптотически устойчивым в малом, если оно устойчиво в малом и притягивающее в малом.

Теорема 8. Если для замкнутого множества $M\subset R_+^3$ существует функция Ляпунова V относительно включения (19), для которой верно неравенство

$$D_+V(x) \le 0 \quad \forall x \in B(M, r), \qquad (20)$$

то множество M устойчиво в малом относительно этого включения. Если справедливо неравенство

$$D_+V(x) \le -w_3(e(x, M)) \ \forall x \in B(M, r), \qquad (21)$$

где функция $w_3: B(M, r) \to R$ непрерывна и положительна вне M, то множество M асимптотически устойчиво в малом относительно включения (19).

Доказательство. Пусть $t_0 \ge s$ и $\varepsilon > 0$ заданы и верно (20). Так как $w_2(0) = 0$, то по непрерывности найдется $\delta ::= \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $w_2(\delta) < w_1(\varepsilon)$. Для любого движения $\varphi \in \Phi$ при $e(\varphi(t_0), M) < \delta$ предположим существование такого $t_1 > t_0$, что $e(\varphi(t), M) < \varepsilon$ при $t_0 < t < t_1$ и $e(\varphi(t_1), M) = \varepsilon$. Ввиду неравенства (20) имеем $w_1(\varepsilon) = w_1(e(\varphi(t_1), M)) \le$ $\le V(\varphi(t_1)) \le V(\varphi(t_0)) \le w_2(e(\varphi(t_0), M)) < w_1(\varepsilon)$.

Получаем противоречие, поэтому для всех $t \in [t_0, \infty) \cap \mathrm{Dom}\,\psi$ верно неравенство $e(\varphi(t), M)) < \varepsilon$ и по определению множество M устойчиво в малом.

Пусть верно (21). Для доказательства асимптотической устойчивости в малом достаточно показать, что при $h = r$

$$\forall \eta > 0 \ \ \exists T(\eta) > 0, \ \forall t_0 \ge s, \ \forall \varphi \in \Phi$$
$$\varphi: [t_0, \omega) \to B(M, h), \ \varphi(t) \in B(M, \eta) \ \ \forall t \ge t_0 + T(\eta). \qquad (22)$$

Пусть $\eta > 0$, $t_0 \ge s$ уже выбраны. Так как множество M устойчиво в малом, то $\exists \delta ::= \delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon ::= \eta$. Пусть $\gamma ::= \min\{w_3(\rho): \delta \le \rho \le r\}$ и пусть $T(\eta) ::= [w_2(r) - w_1(\delta)]/\gamma$. Пусть $\varphi \in \Phi$ – произвольное непродолжаемое вправо движение, определенное на $[t_0, \omega)$, и $t_0 + T(\eta) < \omega$. Если для некоторого $t_1 \le t_0 + T(\eta)$ выполнено $e(\varphi(t_1), M) < \delta$, то ввиду устойчивости в малом $\varphi(t) \in B(M, \eta)$ $\forall t \ge t_0 +$ $+ T(\eta) \ge t_1$ и (22) доказано. В противном случае $e(\varphi(t), M) \ge \delta$ при всех $t \le t_0 + T(\eta)$, поэтому

$$V(\varphi(t)) - V(\varphi(t_0)) \le -\gamma(t - t_0) \le -\gamma T(\eta) = w_1(r) - w_2(\delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V(t, \varphi(t)) \le w_1(\delta), \ t ::= t_0 + T(\eta).$$

Следовательно, $\varphi(t_0 + T(\eta)) \in B(M, \delta)$. Ввиду устойчивости в малом $\varphi(t) \in B(M, \eta)$ $\forall t \ge t_0 + T(\eta)$, и (22) доказано и в этом случае. Теорема 8 доказана.

Теорема 9. Если для замкнутого множества $M \subset R_+^3$ существует функция Ляпунова V относительно включения (19), для которой верно неравенство $D_-V(x) \le 0$, $\forall x \in B(M, r)$, то множество M устойчиво в малом относительно этого включения. Если найдутся $h > 0$ и положительная непрерывная функция $w_3: (0, r) \to R$ такие, что $D_-V(x) < -$ $w_3(e(x, M))$, $\forall x \in B(M, h)$, то множество M асимптотически устойчиво в малом относительно включения (19).

Введенные выше множества B, C, Q и R определяют множества значений соответствующих параметров β, γ, q и r. Подмножества $B_\alpha =$ $= \{\beta \mid \mu_B(\beta) \ge \alpha\}$, $C_\alpha = \{\gamma \mid \mu_C(\gamma) \ge \alpha\}$, $Q_\alpha = \{q \mid$ $\mu_Q(q) \ge \alpha\}$ и $R_\alpha = \{r \mid \mu_R(r) \ge \alpha\}$ представляют более узкие множества, которые получим при учете дополнительных условий $\alpha \in (0, 1]$, влияющих на взаимодействие и диффузию компонент, а следовательно, и на устойчивость системы (16). Тогда уравнение (17) можно заменить на нечеткое дифференциальное уравнение

$$dX/dt = F(X), \qquad (23)$$

где $F: Z_+^3 \to P(R_+^3)$, $P(R_+^3)$ – совокупность всех нечетких подмножеств из R_+^3.

Соответствующее уравнению (23) дифференциальное включение имеет вид $d\varphi/dt \in F_\alpha(\varphi)$, где $\alpha \in (0, 1]$, $F_\alpha(\varphi) = \{f(\varphi(t)) \mid \beta \in B_\alpha, \ \gamma \in C_\alpha, \ q \in Q_\alpha,$ $r \in R_\alpha\}$.

Абсолютно непрерывная функция $\varphi: R_+ \to R_+^3$ называется α-движением, где $\alpha \in (0, 1]$, функции $F: R_+ \to P(R_+^3)$, если $\varphi(t) \in F_\alpha(t)$ $\forall t \in R_+$. Через Φ_α обозначим множество α-движений и через Φ – объединение всех Φ_α при $\alpha \in (0, 1]$. Множество движений Φ называется порождающим функцию $F: R_+ \to P(R_+^3)$, если $\forall t \in R_+$, $\forall \alpha \in (0, 1]$, $\{\varphi(t) \mid \varphi \in \Phi_\alpha\} = F_\alpha(t)$.

Пусть Φ и Φ_α обозначают соответственно множество всех движений и множество всех α-движений, $\alpha \in (0, 1]$, уравнения (23).

Пусть $\alpha \in (0, 1]$. Относительно уравнения (23) замкнутое множество $M \subset P(R_+^3)$ называется:

а) α-устойчивым, если

$$\forall t_0 \ge s, \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta ::= \delta(\varepsilon, \alpha) > 0, \ \forall B \subset R_+^3$$
$$e(B, M_\alpha) < \delta \Rightarrow \mathrm{Dom}\, J_\alpha(t_0, B) \supset [t_0, \infty),$$
$$e(J_\alpha(t, B), M_\alpha)) < \varepsilon \quad \forall t \ge t_0;$$

б) α-притягивающим, если

$$\forall t_0 \ge s \ \ \exists h ::= h(\alpha) > 0, \ \forall \eta > 0$$
$$\exists T ::= T(h, \eta, \alpha) > t_0 \quad \forall B \subset R_+^3$$
$$e(B, M_\alpha) \le h \Rightarrow \mathrm{Dom}\, J_\alpha(t_0, B) \supset [t_0, \infty),$$
$$e(J_\alpha(t, B), M_\alpha) < \eta \text{ при } t > T;$$

в) α-асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее;

г) α-устойчивым в малом, если

$$\forall t_0 \ge s, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta ::= \delta(\varepsilon, \alpha) > 0, \ \forall B \subset R_+^3$$
$$e(B, M_\alpha) < \delta \Rightarrow e(J_\alpha(t, B), M_\alpha) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathrm{Dom}\, J_\alpha(t_0, B);$$

д) α-притягивающим в малом, если

$$\forall t_0 \ge s \ \ \exists h ::= h(\alpha) > 0, \ \forall \eta > 0 \ \ \exists T ::= T(h, \eta, \alpha) > t_0,$$
$$\forall B \subset R_+^3 \ \ e(B, M_\alpha) \le h \Rightarrow e(J_\alpha(t, B), M_\alpha) < \eta$$
$$\text{при } t \in \mathrm{Dom}\, J_\alpha(t_0, B) \cap [T, \infty);$$

е) α-асимптотически устойчивым в малом, если оно α-устойчивое в малом и α-притягивающее в малом.

Непрерывная функция $V: B(M, r) \to R$ называется функцией Ляпунова для замкнутого множества $M \subset P(R_+^3)$ относительно уравнения (23), если для каждого $\alpha \in (0, 1]$ существуют число $r ::=$ $::= r(\alpha) > 0$ и неотрицательные неубывающие функции $w_{1\alpha}, w_{2\alpha}: (0, r] \to R$ такие, что $w_{1\alpha}(\rho) > 0$ при $\rho \in (0, r]$, $w_{2\alpha}(0) = 0$, $w_{1\alpha}(e(x, M_\alpha)) \le V(x) \le$ $\le w_{2\alpha}(e(x, M_\alpha))$, $\forall x \in B(M_\alpha, r)$.

Производной функции Ляпунова V вдоль движений уравнения (23) называется многозначная функция $DV(x)$: $B(M, r) \to P(R)$ (r – некоторое число), α-уровни значений которой определяются равенством $DV_\alpha(x) ::= \{\lim_{\Delta t\to 0}[V(\varphi(t+\Delta t)) - V(x)]/\Delta t\colon\ \varphi\in\Phi_\alpha,\ \varphi(t)=x\}$. Функции $D_+V_\alpha(t,x) ::= ::= \sup DV_\alpha(t,x)$ и $D_-V_\alpha ::= \inf DV_\alpha(t,x)$ называются соответственно верхней и нижней производной α-уровня функции Ляпунова, $\alpha\in(0,1]$.

Теорема 10. Если для замкнутого множества $M\subset P(R_+^3)$ существует функция Ляпунова V относительно уравнения (23), для которой при $\alpha\in(0,1]$ верно неравенство $D_+V_\alpha(x)\le 0,\ \ \forall x\in B(M,r)$, то множество M α-устойчиво в малом относительно этого уравнения. Если выполняется неравенство

$$D_+V_\alpha(x)\le -w_{3\alpha}(e(x,M))\quad \forall x\in B(M,r),$$

где функция $w_{3\alpha}\colon(0,r)\to R$ непрерывна и положительна, то множество M α-асимптотически устойчиво в малом относительно уравнения (23).

Теорема 11. Если для замкнутого множества $M\subset P(R_+^3)$ и некоторого $r ::= r(\alpha)$ существует функция Ляпунова V относительно уравнения (23), для которой $D_-V_\alpha(x)\le 0,\ \forall x\in B(M_\alpha,r)$, то множество M α-устойчиво в малом относительно этого уравнения. Если найдутся $h>0$ и положительная непрерывная функция $w_{3\alpha}\colon(0,r)\to R$ такие, что $D_-V_\alpha(x)\le -w_{3\alpha}(e(x,M_\alpha)),\ \forall x\in B(M_\alpha,h)$, то множество M α-асимптотически устойчиво в малом относительно уравнения (23).

Для анализа популяционной модели, учитывающей конкуренцию и миграцию видов, рассмотрен также метод, разработанный в [15, 16].

Указанный метод на основе построения самосогласованных стохастических моделей позволил осуществить построение стохастической модели, учитывающей конкуренцию и миграцию видов.

В дальнейшем планируется сравнение детерминистической и стохастической моделей, учитывающих конкуренцию и миграцию видов, на основе использования метода функций Ляпунова и теории стохастического исчисления.

Таким образом, сочетание подхода, основанного на построении самосогласованных стохастических моделей, и подхода, базирующегося на принципе редукции, направлено на дальнейшее развитие методов построения и анализа устойчивости стохастических моделей.

Важно отметить, что сравнение качественных свойств детерминированной и стохастической моделей позволяет в ряде случаев обосновать необходимость перехода от детерминированных моделей к стохастическим.

Описанный в работе системный подход позволяет исследовать качественные свойства решений дифференциальных уравнений различных типов и может найти применение при решении задач устойчивости математических моделей естествознания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №15-07-08795).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волкова В.Н., Денисов А.А.** Основы теории систем и системного анализа. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997.
2. **Краснощеков П.С., Петров А.А.** Принципы построения моделей. – М.: Фазис, 2000.
3. **Кац И.Я., Красовский Н.Н.** Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. – 1960. – Т. 24. – С. 809–823.
4. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
5. **Розанов Ю.А.** Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. – М.: Физматлит, 1995.
6. **Румянцев В.В., Озиранер А.С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987.
7. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984.
8. **de Glas M.** Theory of fuzzy systems // Fuzzy Sets and Systems. – 1983. – Vol. 10. – P. 65–77.
9. **Kozin F.** Stability of the linear stodastic systems // Lecture notes in math. – Vol. 294. – New York: Springer Verlag, 1972. – P. 189–192.
10. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: УРСС, 2007.
11. **Меренков Ю.Н.** Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во РУДН, 2000.
12. **Дружинина О.В., Масина О.Н.** Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. – М.: ВЦ РАН, 2009.
13. **Масина О.Н., Дружинина О.В.** Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. – М.: ВЦ РАН, 2011.
14. **Zhang Xin-an, Chen L.** The linear and nonlinear diffusion of the competitive Lotka – Volterra model // Nonlinear Analysis. – 2007. – Vol. 66. – P. 2767–2776.
15. **Кулябов Д. С., Демидова А. В.** Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2012. – № 3. –С. 69–78.
16. **Геворкян М.Н., Демидова А.В., Егоров А.Д. и др.** Влияние стохастизации на одношаговые модели // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2014. – № 1. – С. 71–85.

Дружинина Ольга Валентиновна, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник Вычислительного центра имени А.А. Дородницына Российской академии наук
119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40,
тел.: +7 (499) 135-52-09, e-mail: ovdruzh@mail.ru