УДК 517.9

УСТОЙЧИВОПОДОБНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.И. Голечков, О.В. Дружинина
Московский государственный университет путей сообщения,
Вычислительный центр имени А.А. Дородницына Российской академии наук

STABILITY-LIKE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE NONAUTONOMOUS NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yu.I. Golechkov, O.V. Druzhinina

Изучены качественные свойства решений неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений. Установлены признаки сходимости к состоянию равновесия решений неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрен вопрос о сохранении свойства ограниченности при возмущениях.

Ключевые слова: устойчивость, ограниченность, сходимость, неавтономное дифференциальное уравнение.

Qualitative properties of solutions of nonautonomous nonlinear differential equations are studied. Convergence conditions to an equilibrium state of solutions of the nonautonomous ordinary differential equation are established. The question of preservation of property of boundedness under perturbations is considered.

Keywords: stability, boundedness, convergence, nonautonomous differential equation.

Вопросы устойчивости, ограниченности и сходимости решений автономных и неавтономных дифференциальных уравнений рассматривались в монографиях [1–6] и в других работах. Как известно, эффективными методами исследования качественных свойств являются методы Ляпунова и их обобщения и модификации. Неавтономные нелинейные дифференциальные уравнения служат математическими моделями в задачах динамики подвижного состава железнодорожного транспорта и динамики других технических систем.

Рассмотрим неавтономное векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где правая часть $g(t, x)$ имеет непрерывные частные производные $\partial g(t, x)/\partial x$ в рассматриваемой области изменения (t, x). Пусть $\|x\|$ – евклидова норма вектора x. Под устойчивоподобными свойствами решений уравнений вида (1) будем понимать свойства устойчивости, ограниченности, сходимости решений.

Имеет место следующая теорема об оценке решений.

Теорема 1. Пусть: 1) $P = \|p_{ij}\|$ – симметрическая положительно определенная матрица такая, что характеристические корни $\lambda_i(t, x)$ матрицы

$$\frac{1}{2}\left[a_{ij}(t, x) + a_{ji}(t, x)\right], \; a_{ij}(t, x) ::= \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \tag{2}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i(t, x) \le -\Delta < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

равномерно по $t \ge t_0$ и по x; 2) ω – наибольший характеристический корень матрицы P. Тогда каждое решение $x(t)$ уравнения (1) удовлетворяет при всех $t \ge t_0$ неравенству вида

$$\|x(t)\| \le \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2} m\Delta\omega^{-1}\right) t \times \right.$$
$$\left. \times \left[c_1 + c_2 \int_{t_0}^{t} \|g(t, 0)\|^m \exp\left(\frac{1}{2} m\Delta\omega^{-1}\right) t \; dt \right] \right\}^{1/m}, \tag{4}$$

где m – постоянная такая, что $1 \le m \le 2$, а постоянные c_1 и c_2 зависят от входящих аргументов:

$$c_1 = c_1\left(\Delta, t_0, P, x(t_0)\right) > 0, \; c_2 = c_2(\Delta, P) > 0.$$

Из теоремы 1 следует, что если $g(t, 0) \equiv 0$, то каждое решение уравнения (1) стремится к нулю при $t \to +\infty$, если выполнены неравенства (3).

Справедлива следующая теорема о сходимости решений уравнения (1).

Теорема 2. Пусть: 1) функция $g(t, x)$ и матрица P удовлетворяют условиям теоремы 1; 2) норма $\|g(t, x)\|$ такова, что

$$\|g(t, x)\| \le f(a) \quad \|x\| \le a, \; 0 < a < +\infty, \tag{5}$$

равномерно по $t \geq t_0$, где непрерывная функция f зависит только от a; 3) имеет место

$$\int_{t_0}^{t} \| g(t,0) \|^m \, dt < +\infty , \tag{6}$$

где m – постоянная, $1 \leq m \leq 2$. Тогда каждое решение $x(t)$ уравнения (1) стремится к нулю при $t \to +\infty$, то есть

$$\| x(t) \| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{7}$$

Отметим, что условие (5) теоремы 2 будет выполнено, если функция $g(t, x)$ представима в виде $g(t, x) = G(x) + \Phi(t)$, где $G(x)$ – непрерывная функция от x и норма $\| \Phi(t) \|$ ограничена при достаточно больших значениях t.

Если в теореме 1 функция $g(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{t \geq t_0} \| g(t,0) \| < +\infty , \tag{8}$$

то каждое решение $x(t)$ уравнения (1) ограничено при $t \to +\infty$, то есть существует такая постоянная c, зависящая только от g и P, что $\| x(t) \| \leq c$ $\forall t \in R^+$.

Обозначим через $K(r)$ семейство непрерывных возрастающих положительно определенных функций, а через $\dot{V}(t, x)$ – производную функции Ляпунова V относительно уравнения (1)

$$\dot{V}(t,\ x) = \lim_{h \to 0^+} \sup \ h^{-1} \times$$

$$\times \left[V(t+h,\ x+hf(t,\ x)) - V(t,\ x) \right]. \tag{9}$$

Имеет место следующая теорема об ограниченности и сходимости решений уравнения (1).

Теорема 3. Пусть выполнены условия: 1) $V \in C^+(R^+ \times R^n \to R^n)$ $\forall (t,x) \in R^+ \times R^n$; 2) существуют функции $m_1(r), m_2(r) \in K(r)$, $m_1(r) \to \infty$ при $t \to \infty$, такие, что $m_1(|x|) \leq V(t, x) \leq m_2(|x|)$; 3) существуют непрерывные функции $\alpha_i : R^+ \to R^+$, $i = 1, 2$, и число $c > 0$ такие, что

$$\dot{V}(t,\ x) \leq -cV(t,\ x) + \alpha_1(t)\, V(t,\ x) +$$

$$+ \alpha_2(t) \left[V(t,\ x) + 1 \right],$$

где функции α_i, $i = 1, 2$, обладают свойствами:

$$\lim_{(t,\, \eta \to (\infty\, \infty)} \sup \ \eta^{-1} \int_t^{t+\eta} \alpha_1(\tau)\, d\tau < c ,$$

$$\int_t^{t+1} \alpha_2(\tau)\, d\tau \to 0, \quad t \to \infty .$$

Тогда любое решение $x(t)$ уравнения (1) равномерно ограничено и стремится к нулю при $t \to \infty$.

Доказательство основано на свойствах функции (9) и теоремах прямого метода Ляпунова [1, 2].

Наряду с уравнением (1), где $x \in R^n$, $t \in R^+$, $g \in C\ (R^+ \times R^n \to R^n)$, будем рассматривать соответствующее ему возмущенное уравнение

$$\dot{y} = g(t, y) + R(t, y), \tag{10}$$

где $x \in R^n$, $t \in R^+$, $g, R \in C\ (R^+ \times R^n \to R^n)$.

Решения системы (1) называются:

а) эвентуально равномерно ограниченными, если для каждого $c > 0$ существует $M = M(c)$ и $T = T(c) \geq 0$ такие, что

$$\left| x(t, t_0, x_0) \right| < M(c), \ \left| x_0 \right| < c, \ t \geq t_0 \geq T(c) ;$$

б) равномерно ограниченными, если $T(c) \equiv 0$ $\forall c > 0$;

в) эвентуально равномерно ограниченными в пределе, если существует $M > 0$ такое, что для каждого $c > 0$ имеются $T_1 = T_1(c) \geq 0$ и $T_2 = T_2(c) \geq 0$ такие, что $|x(t, t_0, x_0)| < M$ для $|x_0| < c$, $t_0 \geq T_1(c)$ и $t \geq t_0 + T_2(c)$;

г) равномерно ограниченными в пределе, если $T_1(c) \equiv 0$ $\forall c > 0$.

Если g удовлетворяет равномерному условию Липшица и если решения системы (1) равномерно ограничены и равномерно ограничены в пределе, то решения системы (2) эвентуально равномерно ограничены, если возмущающая функция $R(t, x)$ интегрируема в некотором смысле или стремится к нулю при $t \to \infty$ [13, 14].

Предполагается, что для функции $g(t, x)$ выполнено обобщенное условие Липшица, то есть для каждого $c > 0$ существует $C = C(c) > 0$ такое, что на множестве $K = \left\{ (t, x) : t \in R^+, \ |x| > r, \ r > 0 \right\}$ имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \left| g(t, x_1) - g(t, x_2) \right| \leq C(c)\, \alpha(t) \left| x_1 - x_2 \right| \\ \forall x_i, \ \left| x_i \right| \leq c, \ i = 1, 2 , \end{gathered} \tag{11}$$

где отображение $\alpha : R^+ \to R^n$ обладает свойством

$$\sup \int_t^{t+1} \left| \alpha(s) \right| ds < \infty, \ t \geq t_0. \tag{12}$$

Рассмотрим класс возмущающих функций $h(t,x)$, для каждой непрерывной ограниченной функции $x(t)$ удовлетворяющих условию

$$\sup \left| \int_t^{t+s} R\big(t, x(t)\big)\, dt \right| \to 0, \ t \to \infty, \ s \in [0, 1]. \tag{13}$$

Справедлива следующая теорема об ограниченности решений уравнения (10).

Теорема 4. Пусть 1) для $R(t, x)$ выполнено условие (13); 2) для $g(t, x)$ выполнено обобщенное условие Липшица (11), (12); 3) решения системы (1) равномерно ограничены и равномерно ограничены в пределе. Тогда решения возмущенной системы (10) эвентуально равномерно ограничены и эвентуально равномерно ограничены в пределе.

Доказательство базируется на построении оценок решений $y(t, t_0, x_0)$ уравнения (10) с учетом определений эвентуальной ограниченности и свойств решений $x(t, t_0, x_0)$ уравнений (1).

Пусть $|x_0| < c$. Тогда существует $M = M(c) > 0$ такое, что $|x(t, t_0, x_0)| < M(c)$ $\forall t \geq t_0$ и существуют $M_1 > 0$ и $T_0 = T_0(c)$ такие, что $|x(t, t_0, x_0)| < M_1$, $t \geq t_0 + T_0(c)$. Положим, $M_2 = M_2(c) ::= \max (M(c) + 1, M(M_1 + 1) + 1)$.

С помощью обобщенного условия Липшица (11), (12), неравенства Гронуолла на основе метода математической индукции показано, что для всех $k > 0$ $\left| y(t, t_0, x_0) \right| \leq M_2(c)$, $t \in [t_0, t_0 + k\tau]$, откуда следует, что

$$\left| y(t, t_0, x_0) \right| \leq M_2(c), \ t \geq t_0 \geq T_1(c). \qquad (14)$$

На основании (14) решения возмущенной системы (10) эвентуально равномерно ограничены.

Построение аналогичных оценок позволяет показать эвентуальную ограниченность в пределе решений возмущенной системы.

Условия ограниченности и сходимости, предложенные в теоремах 1–4, являются обобщением и дополнением исследований [7–11]. Теоремы 2, 3 могут быть использованы для анализа ограниченности решений системы (10). Условия устойчивости по Жуковскому, рассмотренные в [12], применимы к исследованию уравнения вида (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
2. **Зубов В.И.** Устойчивость движения. – М.: Высшая школа, 1973.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
4. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1968.
5. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод для систем с распределенными параметрами. – М.: Физматлит, 1990.
6. **Матросов В.М.** Метод векторных функций Ляпунова анализа динамических свойств нелинейных систем. – М.: Физматлит, 2001.
7. **Голечков Ю.И.** О сохранении свойств ограниченности решений при возмущении нелинейной n-мерной дифференциальной системы // Дифференциальные уравнения. – 1985. Т. XXI. – № 5. – С. 748–752.
8. **Голечков Ю.И.** Об оценках решений неавтономных дифференциальных уравнений // Современные качественные исследования динамических систем железнодорожного транспорта: межвуз. сб. науч. тр. – М.: РГОТУПС, 2000. – С. 79–80.
9. **Голечков Ю.И.** О сходимости к состоянию равновесия решений нестационарного дифференциального уравнения // Исследование устойчивоподобных и прочностных свойств динамических транспортных систем: межвуз. сб. науч. тр. – М.: РГОТУПС, 2001. – С. 21–23.
10. **Голечков Ю.И.** Приближенно-аналитические методы исследования математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в конечномерном и бесконечномерном пространствах. – М.: РУДН, 2006.
11. **Голечков Ю.И.** Исследование ограниченности решений нелинейных неавтономных дифференциальных систем // Известия РАЕН. Сер. Дифференциальные уравнения. – 2010. – Вып. 15.
12. **Дружинина О.В.** Устойчивость и стабилизация по Жуковскому динамических систем: теория, методы и приложения. – М.: URSS, 2013.
13. **Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р.** Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974.
14. **Yoshizawa T.** Stability theory by Liapunov's second method. – Tokio: Math. Soc. Japan. Publ., 1966.

Голечков Юрий Иванович, д. ф.-м. н., доцент кафедры высшей и прикладной математики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ)
127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9,
тел. 8(495) 799 95 50, e-mail: golechkov@yandex.ru