УДК 517. 925

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ С МАТРИЧНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

М.О. Вансович
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

ABOUT A SISTEM WITH A MATRIX PARAMETER WITH FLUXION

M.O. Vansovich

Получены достаточные условия существования и единственности, а также условия существования периодического решения для системы с малым матричным параметром при производной.

Ключевые слова: малые параметры, периодическая функция, сжимающий оператор.

It is found the sufficient conditions for the existence and uniqueness as well as conditions for the existence of the periodic solution for a system depending on a small matrix parameter with fluxion.

Keywords: small parameters, periodic function, contraction operator.

Достаточно часто на практике возникает вопрос о существовании периодического решения систем с малым параметром при производной. В работах [1–2] рассмотрены случаи векторного параметра. Настоящая статья является обобщением результатов, полученных в работе [3], на случай матричного параметра при вектор-производной.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$E\dot{x} = Ax + f(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

где $E = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $\varepsilon = colon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \ldots, \varepsilon_{nn})$, ε_{ij} – малые параметры, $i, j = 1,\ldots,n$, A – $(n \times n)$-матрица, x, f – n-мерные вектор-функции.

Обозначения: C_ω – пространство ω-периодических n-мерных вектор-функций аргумента t непрерывных на $[0;\omega]$; C_ω^∞ – пространство ω-периодических n-мерных бесконечно дифференцируемых на $[0;\omega]$ вектор-функций аргумента t; $|x| = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, $|A| = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$, $\|\bullet\| = \max\limits_{0\le t\le\omega}|\bullet|$, $\|x(t)\|_\infty = \sup\limits_{0\le m<+\infty}\left\{\left\|x^{(m)}(t)\right\|\right\}$, где $x^{(m)}(t)$ – производная m-го порядка; $W = \left\{x \in C_\omega^\infty : \|x\|_\infty < +\infty\right\}$; $W_R = \left\{x \in W : \|x\|_\infty \le R\right\}$, где R – положительное число. Метрику в пространствах W и W_R введём обычным образом: $\rho(x,y) = \|x-y\|_\infty$.

Нетрудно показать, что W и W_R – полные метрические пространства.

Условие 1. $\det A \ne 0$.

Условие 2. Вектор-функция f ω-периодична и бесконечно дифференцируема по t на $[0;\omega]$, причём $\lim\limits_{|\varepsilon|\to 0}\|f(t,\varepsilon)\|_\infty = 0$.

Для изучения вопроса о существовании и поведении при малых значениях параметров ω-периодических решений системы (1) рассмотрим оператор Γ_ε, заданный в пространстве W_R,

$$\Gamma_\varepsilon:\quad x \to y = \Gamma_\varepsilon x = A^{-1}\left(E\dot{x} - f(t,\varepsilon)\right).$$

Очевидно, что его неподвижные точки являются ω-периодическими решениями системы (1).

Теорема 1. Если выполнены условия 1 и 2, то при достаточно малых значениях параметров система (1) имеет в пространстве W_R единственное ω-периодическое решение $x_\omega(t,\varepsilon)$, причём $\lim\limits_{|\varepsilon|\to 0}\|x_\omega(t,\varepsilon)\|_\infty = 0$.

Доказательство. Если $y = \Gamma_\varepsilon x$, то $y^{(m)} = A^{-1}\left(Ex^{(m+1)} - f^{(m)}(t,\varepsilon)\right)$, $m = 0; 1; 2\ldots$ Следовательно, при любом $x \in W_R$ $\left|y^{(m)}\right| \le \left|A^{-1}\right| \cdot \left(|E| \cdot R + \|f(t,\varepsilon)\|_\infty\right)$, $m = 0; 1; 2\ldots$, значит $\|y\|_\infty \le \left|A^{-1}\right| \cdot \left(|E| \cdot R + \|f(t,\varepsilon)\|_\infty\right) \le R$ при достаточно малом значении $|\varepsilon|$. Таким образом, оператор Γ_ε отображает пространство W_R в себя.

Кроме того, для любых $x, \tilde{x} \in W_R$ $\left|y^{(m)} - \tilde{y}^{(m)}\right| \le \left|A^{-1}\right| \cdot |\mathrm{E}| \cdot \|x - \tilde{x}\|$, $m = 0; 1; 2\ldots$, где

$\widetilde{y} = \Gamma_\varepsilon \widetilde{x}$. Тогда при малом значении $|\varepsilon|$ существует $\alpha = \left|A^{-1}\right| \cdot |E| \in (0;1)$ такое, что $\|y - \widetilde{y}\|_\infty \le \le \alpha \cdot \|x - \widetilde{x}\|_\infty$, то есть оператор Γ_ε сжимающий. Но сжимающий оператор в полном метрическом пространстве W_R имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, система (1) имеет в пространстве W_R единственное ω-периодическое решение $x_\omega(t,\varepsilon)$.

По произвольному значению R можно указать значение $|\varepsilon|(R) > 0$ такое, что $\|x_\omega(t,\varepsilon)\|_\infty \le R$ при $0 < |\varepsilon| < |\varepsilon|(R)$, значит $\lim\limits_{|\varepsilon|\to 0} \|x_\omega(t,\varepsilon)\|_\infty = 0$. Теорема доказана.

Заметим, что в силу условия 1 матрица A не имеет нулевых собственных значений, но при этом может иметь чисто мнимые собственные значения, то есть в теореме 1 рассмотрен один из критических случаев. Далее рассмотрим случай, когда матрица A имеет k нулевых собственных значений.

Условие 3. Матрица $E = diag\{E_0,\ \widetilde{E}\}$, $E_0 = = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{k}$, причём $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \ne j$, $\varepsilon_{ii} \ne 0$, $i, j = 1,..k$.

Условие 4. Матрица $A = diag\{A_0, \widetilde{A}\}$, где $A_0 = (a_{ij})_{i,j=1}^{k}$, причём все собственные значения матрицы A_0 равны нулю, а $\det \widetilde{A} \ne 0$.

Условие 5. Вектор-функция $f = colon(f_1,..., f_k, \widetilde{f})$ ω-периодична и бесконечно дифференцируема по t на $[0;\omega]$, причём $\int\limits_0^\omega f_i(t,\varepsilon)dt = 0$,

$$\lim_{|\varepsilon|\to 0} |\varepsilon|^{-k} \|f_i(t,\varepsilon)\| = 0,\ i = 1,..., k;\ \lim_{|\varepsilon|\to 0} \left\|\widetilde{f}(t,\varepsilon)\right\|_\infty = 0.$$

Теорема 2. Если выполнены условия 3–5, то при достаточно малых значениях параметров система (1) имеет в пространстве $D_R = \{x \in C_\omega : \|x\| \le R\}$ ω-периодическое решение $x_\omega(t,\varepsilon)$, причём $\lim\limits_{|\varepsilon|\to 0} \|x_\omega(t,\varepsilon)\| = 0$.

Доказательство. В силу условия 4 матрица A_0 неособенным преобразованием может быть приведена к виду $J = (a_{ij})_{i,j=1}^{k}$, где $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1,..., k-1$, а остальные её элементы равны нулю. Для удобства записи обозначим ε_{ii} через ε_i, $i = 1,..., k$. Тогда без ограничения общности и с учётом условия 3 можно считать, что система (1) имеет вид

$$\varepsilon_1 \dot{x}_1 = x_2 + f_1(t,\varepsilon), \tag{1.1}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots$$

$$\varepsilon_{k-1} \dot{x}_{k-1} = x_k + f_{k-1}(t,\varepsilon), \tag{1.k-1}$$

$$\varepsilon_k \dot{x}_k = f_k(t,\varepsilon), \tag{1.k}$$

$$\widetilde{E}\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{f}(t,\varepsilon), \tag{$\widetilde{1}$}$$

где $\widetilde{x} = colon(x_{k+1},..., x_n)$.

Обозначим через W_R^{n-k} пространство $(n-k)$-мерных вектор-функций, аналогичное пространству W_R. По теореме 1 система $(\widetilde{1})$ имеет в пространстве W_R^{n-k} при достаточно малых значениях параметров единственное ω-периодическое решение $\widetilde{x}_\omega(t,\varepsilon)$, причём $\lim\limits_{|\varepsilon|\to 0} \|\widetilde{x}_\omega\|_\infty = 0$, значит и

$$\lim_{|\varepsilon|\to 0} \|\widetilde{x}_\omega(t,\varepsilon)\| = 0. \tag{2}$$

Из уравнения $(1.k)$ получим, что $x_k(t,\varepsilon) = = x_k(0,\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon_k} \int\limits_0^t f_k(s,\varepsilon)ds$, следовательно, в силу условия 5 это уравнение имеет ω-периодическое решение с любыми начальными данными.

Из уравнения $(1.k-1)$ получим, что

$$x_{k-1}(t,\varepsilon) = x_{k-1}(0,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon_{k-1}} x_k(0,\varepsilon)t +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k} \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s f_k(\xi,\varepsilon)d\xi + \varepsilon_k f_{k-1}(s,\varepsilon) \right) ds.$$

Следовательно, это уравнение имеет ω-периодическое решение с любыми начальными данными, если начальные данные ω-периодического решения $x_k(t,\varepsilon)$ выбраны следующим образом:

$$x_k(0,\varepsilon) = \frac{-1}{\omega\varepsilon_k} \int\limits_0^\omega \left(\int\limits_0^s f_k(\xi,\varepsilon)d\xi \right) ds.$$

Нетрудно видеть, что при $i = 2,..., k-1$

$$x_{k-i}(t,\varepsilon) = x_{k-i}(0,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon_{k-i}} x_{k-i+1}(0,\varepsilon)t + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_{k-i}\varepsilon_{k-i+1}\ldots\varepsilon_{k-1}} x_k(0,\varepsilon)\frac{t^i}{i!} + \quad \frac{1}{\varepsilon_{k-i}\varepsilon_{k-i+1}\ldots\varepsilon_k} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{s_1} g_1(s_{i-1},\varepsilon)ds_{i-1} + \varepsilon_k \ldots \varepsilon_{k-i+1} f_{k-i}(s_1,\varepsilon) \right) ds_1,$$

где

$$g_1(s_{i-1},\varepsilon) = \int\limits_0^{s_2} g_2(s_{i-2},\varepsilon)ds_{i-2} + \varepsilon_k\varepsilon_{k-1} f_{k-2}(s_2,\varepsilon),$$

$$\ldots\ g_{i-1}(s_i,\varepsilon) = \int\limits_0^{s_i} f_k(\xi,\varepsilon)d\xi + \varepsilon_k f_{k-1}(s_i,\varepsilon),$$

откуда следует, что $x_{k-i}(t,\varepsilon)$ является ω-периодическим решением тогда и только тогда, когда начальные данные ω-периодического решения $x_{k-i+1}(t,\varepsilon)$ выбраны следующим образом:

$$x_{k-i+1}(0,\varepsilon)=\sum_{j=2}^{i}\frac{-1}{\varepsilon_{k-i+1}\ldots\varepsilon_{k-i+j-1}}x_{k-i+j}(0,\varepsilon)\frac{\omega^{j-1}}{j!}-$$

$$-\frac{1}{\omega\varepsilon_{k-i+1}\ldots\varepsilon_k}\int_0^{\omega}\left(\int_0^{s_1}g_1(s_{i-1},\varepsilon)ds_{i-1}\right)ds_1 .$$

Кроме того, в силу условия 5 $\lim_{|\varepsilon|\to 0}\|x_{k-i}(t,\varepsilon)\|=0,\quad i=0,1,\ldots,k-1$. Отсюда и из (2) следует, что $\lim_{|\varepsilon|\to 0}\|x_{\omega}(t,\varepsilon)\|=0$, где $x_{\omega}=$ $=colon(x_1,\ldots,x_k,\tilde{x}_{\omega})$ – ω-периодическое решение системы $(1.1)-(1.k)$, $(\tilde{1})$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вансович М.О.** Критерий существования периодических решений сингулярно возмущённых систем в случае, когда вырожденная система имеет критическую матрицу линейных приближений // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. / РГПУ. – Рязань, 1995. – С. 33–42.
2. **Вансович М.О.** Ненулевые периодические решения сингулярно возмущённых систем с векторным параметром в случае, когда матрица линейного приближения критическая // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. / РГПУ. – Рязань, 1995. – С. 42–48.
3. **Вансович М.О.** Периодические решения линейных систем при производной с малым параметром // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. / РГПИ. – Рязань, 1984. – С. 29–34.

Вансович Маргарита Олеговна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: m.vansovich@rsu.edu.ru