УДК 517.925

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СОСТОЯНИЕМ РАВНОВЕСИЯ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

М.Т. Терехин, С.А. Бельман

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STATE OF EQUILIBRIUM, DEPENDING ON PARAMETER

M.T. Teryokhin, S.A. Belman

Исследуется проблема существования периодического решения нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений с параметром. Методом тригонометрических рядов находятся условия существования ненулевого периодического решения периодом, зависящим от параметра. Метод неподвижной точки нелинейного оператора – основной метод доказательства теорем о существовании периодических решений.

Ключевые слова: вектор-форма, оператор, собственный элемент, собственное значение, базисные векторы, линейный функционал, ранг матрицы.

It is investigation the problem of the existence of periodic solutions of nonlinear autonomous systems of differential equations with a parameter. Conditions of the existence of nontrivial periodic solutions with period depending on a parameter are found by the method of trigonometric series. Method fixed point of the nonlinear operator is the basic method of proof of theorems about the existence of periodic solutions.

Keywords: the vector form, the operator, own the item, its value, basis vectors, linear functions, the rank of the matrix.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{dy}{d\tau} = \psi(y, \lambda), \qquad (1)$$

в которой $y \in E_n$, $\lambda \in E_p$, λ − параметр, E_k − k-мерное векторное пространство, $\psi(y,\lambda)$ − n-мерная вектор-функция.

Введем следующие обозначения: $|u| = \max\limits_i \{|u_i|\}$, u − k-мерный вектор, $\|\mathrm{B}\| = \max\limits_{|u|\le 1} |Bu|$, B − матрица, $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda : \lambda \in E_p, \lambda_0 \in E_p,\ |\lambda - \lambda_0| \le \le \delta_0\}$, $D(\delta_0) = \{(y,\lambda) : y \in \mathrm{E}_n, y_0 \in \mathrm{E}_n, |y - y_0| \le \delta_0,$ $\lambda \in \Lambda(\delta_0)\}$, δ_0 − некоторое положительное число.

Предположим, что во множестве $D(\delta_0)$:

а) вектор-функция $\psi(y,\lambda)$ определена, непрерывна и удовлетворяет равенству $\psi(y_0, \lambda_0) = 0$;

б) система уравнений $\psi(y,\lambda) = 0$ имеет решения $y = \theta_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, $r \ge 1$, такие, что на множестве $\Lambda(\delta_0)$ $\psi(\theta_i(\lambda), \lambda) \equiv 0$, вектор-функции $\theta_i(\lambda)$ непрерывны, $y_0 = \theta_i(\lambda_0)$;

в) при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, любом i в окрестности точки $\theta_i(\lambda)$ справедливо представление

$$\psi(y,\lambda) = \mathrm{A}^*(\theta_i(\lambda), \lambda)(y - \theta_i(\lambda)) + \\ + C^*(\theta_i(\lambda), \lambda, y - \theta_i(\lambda)) + D^*(\theta_i(\lambda), \lambda, y - \theta_i(\lambda)),$$

где $\mathrm{A}^*(\theta_i(\lambda), \lambda)$ – матрица, $C^*(\theta_i(\lambda), \lambda, y - \theta_i(\lambda))$ – вектор-форма порядка $s > 1$ относительно переменных λ, $y - \theta_i(\lambda)$, $D^*(\theta_i(\lambda), \lambda, y - \theta_i(\lambda))$ – конечная сумма вектор-форм более высокого порядка, чем s, относительно тех же переменных, $C^*(\theta_i(\lambda), \lambda, 0) \equiv 0$, $D^*(\theta_i(\lambda), \lambda, 0) \equiv 0$ на множестве $\Lambda(\delta_0)$, коэффициенты вектор-функций $C^*(\theta_i(\lambda), \lambda, y - \theta_i(\lambda))$, $D^*(\theta_i(\lambda), \lambda, y - \theta_i(\lambda))$ − непрерывные функции на множестве $\Lambda(\delta_0)$. Следовательно, $y = \theta_i(\lambda)$ – решение системы (1) при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Ставится задача: определить условия существования $\tilde{\omega}$-периодического решения системы (1) в окрестности точки $\theta_i(\lambda)$. При этом $\tilde{\omega}$ – положительное число.

Далее для простоты рассуждений будем считать, что $\lambda_0 = 0$.

Путем замены переменных $x = y - \theta_i(\lambda)$ сведем систему (1) к системе

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathrm{A}^*(\theta_i(\lambda),\lambda)x + \\ + C^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x) + D^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x). \tag{2}$$

Очевидно, что $x = 0$ – решение системы (2) при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Положим, что $t = \frac{2\pi}{\widetilde{\omega}}\tau$. Тогда систему (2) преобразуем в систему

$$\dot{x} = \frac{\widetilde{\omega}}{2\pi}\left[\mathrm{A}^*(\theta_i(\lambda),\lambda)x + C^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x) + \right. \\ \left. + D^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x)\right]$$

Пусть $\widetilde{\omega} = \omega_0 + \mu$, где $\omega_0 > 0$ – некоторое число, μ – параметр, $|\mu| \le \delta_0$.

Постоянную матрицу A и матрицу $K(\lambda)$ определим согласно равенству $\frac{1}{2\pi}\mathrm{A}^*(\theta_i(\lambda),\lambda) - A = K(\lambda)$, и будем предполагать, что $K(\lambda)$ – непрерывная на множестве $\Lambda(\delta_0)$ и такая, что $\lim\limits_{\lambda\to 0} K(\lambda) = 0$. Тогда вводя обозначение
$C(x,\lambda) = \frac{1}{2\pi}C^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x)$, $D(x,\lambda) = \frac{1}{2\pi}D^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x)$,
последнюю систему можно записать в виде

$$\dot{x} = (\omega_0 + \mu)[Ax + K(\lambda)x + C(x,\lambda) + D(x,\lambda)]$$

или в виде

$$\mathrm{R}(x,\lambda,\mu) \equiv \dot{x} - (\omega_0 + \mu)[Ax + \\ K(\lambda)x + C(x,\lambda) + D(x,\lambda)]. \tag{4}$$

Таким образом, поставленная выше задача может быть сформулирована следующим образом: найти условия существования ненулевого 2π-периодического решения системы (4) в окрестности точки $x = 0$.

Проблема существования периодических решений (циклов) автономных систем дифференциальных уравнений исследуется в достаточно большом количестве работ. Наиболее значительные результаты получены в работах [1–7].

В настоящей статье методом тригонометрических рядов определяются условия существования периодических решений системы (4), при этом структура матрицы линейного приближения системы (4) существенного значения не имеет.

2. Решение задачи

Рассмотрим множество M_n всех тригонометрических рядов вида $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, где a_0, a_k, b_k – n-мерные векторы (коэффициенты ряда). Ряд с нулевыми коэффициентами назовем нулевым элементом множества M_n. Обозначим: N – множество натуральных чисел, N_0 – множество всех целых неотрицательных чисел, R – множество действительных чисел.

Пусть $x = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, $z = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cos kt + d_k \sin kt$, $x, z \in M_n$. Под суммой элементов x и z будем понимать

$$x + z = a_0 + c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + c_k)\cos kt + (b_k + d_k)\sin kt.$$

Пусть $\gamma \in R$. Тогда под произведением γ на x будем понимать ряд вида

$$\gamma x = \gamma a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma a_k \cos kt + \gamma b_k \sin kt.$$

Пусть Q – $n\times n$-матрица. Тогда под произведением Q на x будем понимать

$$Qx = Qa_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Qa_k \cos kt + Qb_k \sin kt.$$

Под $\dot{x}$ будем понимать ряд вида

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k \cos kt - ka_k \sin kt.$$

Из определения M_n следует, что $x + y$, Qx, γx, $\dot{x}$ – элементы множества M_n. То есть пространство M_n замкнуто относительно операции сложения, умножения на матрицу и на действительное число и относительно операции дифференцирования.

Определение 1. Элемент множества $x_0 \in M_n$ назовем 2π-периодическим решением системы (1) при некоторых $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ и μ $(|\mu| \le \delta_0)$, если $R(x_0,\ \lambda,\mu)$ – нулевой элемент множества M_n.

Оператор B определим равенством $Bx = \dot{x} - \omega_0 Ax$.

Определение 2. Ненулевой элемент $x_0 \in M_n$ назовем собственным элементом оператора B (если существует действительное число γ, при котором $Bx_0 - \gamma x_0$ – нулевой элемент множества M_n), а число γ – собственным значением оператора B, соответствующим собственному элементу x_0.

Заметим, что, согласно определению нулевого элемента множества M_n, при любом $k \in N$ система $Bx = z$ ($z = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \cos kt + d_k \sin kt \in M_n$) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$-\omega_0 Aa_0 = c_0,\ -\omega_0 Aa_k + kEb_k = c_k, \\ -kEa_k - \omega_0 Ab_k = d_k.$$

Положим $L(k) = (colon(-\omega_0 A, kE), colon(-kE, -\omega_0 A))$, при $k = 0$ $L(0) = \omega_0 A$.

Можно показать, что необходимым условием существования ненулевого периодического решения системы (1) является существование такого положительного ω_0, при котором оператор B имеет нулевое собственное значение, что равносильно условию $\det L(k)=0$ при некотором натуральном k. Далее предполагаем ω_0 таким, что у оператора B существует нулевое собственное значение.

Обозначим $W=\{k_1,k_2,...,k_q\}$ как множество всех целых неотрицательных корней уравнения $\det L(k)=0$.

Без потери общности можно считать, что при любом $k\in W$ матрица $L(k)$ представлена в жордановой форме.

Пусть $k_j\in W$. Для определенности положим, что $k_j\neq 0$. Так как $\det L(k_j)=0$, то $\ker L(k_j)$ – непустое множество. Следовательно, справедливо представление $E_{2n}=E_j^0\oplus E_j^1\oplus E_j^2$, где $E_j^0=$ $=\ker L(k_j)$, E_j^2 – инвариантное относительно преобразования $L(k_j)x=z$ пространство, E_j^1 такое, что любой ненулевой $z\in E_j^1$ удовлетворяет условию $z\notin E_j^0\oplus E_j^2$. Предположим, что $rangL(k_j)=2n-r_j$, $0<r_j<2n$. Следовательно, E_j^0 содержит r_j линейно независимых векторов (a_j^ν,b_j^ν), $\nu=\overline{1,r_j}$, образующих базис пространства E_j^0. Пусть векторы $(u_j^\sigma,\upsilon_j^\sigma)$ $\sigma=\overline{1,m_j}$, составляют базис пространства E_j^1. В силу предположения относительно матрицы $L(k_j)$ базисные векторы пространств E_j^0, E_j^1, E_j^2 можно выбрать попарно ортогональными независимо от того, какому из пространств они принадлежат. При любом $\nu\in\{1,2,...,r_j\}$ вектор (a_j^ν,b_j^ν) определяет собственный элемент $h_j^\nu=a_j^\nu\cos k_jt+b_j^\nu\sin k_jt$ оператора B, при этом a_j^ν, b_j^ν выбираем таким образом, чтобы $\|h_j^\nu\|=|\alpha_j^\nu|+|\beta_j^\nu|=1$. При любом $\sigma\in\{1,2,...$ $...,m_j\}$ вектор $(u_j^\sigma,\upsilon_j^\sigma)$ определяет элемент $g_j^\sigma=u_j^\sigma\cos k_jt+\upsilon_j^\sigma\sin k_jt$ множества M_n.

Пространство, образованное элементом h_j^ν, обозначим символом W_{0j}^ν, а пространство, образованное элементом g_j^σ, – через W_{1j}^σ.

Пусть $W_0=\sum_{j=1}^{q}\sum_{\nu=1}^{r_j}\oplus W_{0j}^\nu$, $W_1=\sum_{j=1}^{q}\sum_{\sigma=1}^{m_j}\oplus W_{1j}^\sigma$, W_2 такое, что $M_n(l_1)=W_0\oplus W_1\oplus W_2$. $M_n(l_1)$ – множество рядов $x=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt$, коэффициенты которых удовлетворяют включению $(a_0,a_1,b_1,\ldots,a_k,b_k,\ldots)\in l_1$. Тогда любой элемент $x\in M_n(l_1)$ можно единственным образом представить в виде

$$x=Px+\sum_{j=1}^{q}\sum_{\nu=1}^{r_j}\xi_{0j}^\nu(x)h_j^\nu+\sum_{j=1}^{q}\sum_{\sigma=1}^{m_j}\xi_{1j}^\sigma(x)g_j^\sigma,$$

где Px – оператор проектирования пространства $M_n(l_1)$ в пространство W_2, $\xi_{0j}^\nu(x)$, $\xi_{1j}^\sigma(x)$ – линейные функционалы, определенные соответственно равенствами $\xi_{0j}^\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xh_j^\nu dt$, $\xi_{1j}^\sigma(x)=$ $=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xg_j^\sigma dt$, под произведением коэффициентов рядов понимаем скалярное произведение векторов. Непосредственно путем вычисления устанавливаем, что для любого элемента $x\in W_2$, $\xi_{0j}^\nu(x)=0$, $\xi_{1j}^\sigma(x)=0$.

Для удобства записей все собственные элементы оператора B пронумеруем в порядке $h_1,h_2,...,h_m$, а элементы g_j^σ – в порядке $g_1,g_2,\ldots\ldots g_l$. Положим, $\xi_j(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xh_jdt$, $\eta_j(x)=$ $=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xg_jdt$, $\xi(x)=(\xi_1(x),\xi_2(x),...,\xi_m(x))$, $\eta(x)=(\eta_1(x),$ $\eta_2(x),\ldots,\eta_l(x))$.

Следовательно, задача поиска элемента $x\in M_n(l_1)$, удовлетворяющего равенству $R(x,\lambda,\mu)=0$, равносильна задаче поиска элемента $x\in M_n(l_1)$, удовлетворяющего равенствам

$$\begin{gathered}P(R(x,\lambda,\mu))=0,\\ \xi(R(x,\lambda,\mu))=0,\\ \eta(R(x,\lambda,\mu))=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Решение системы (2) будем искать в виде $x(\alpha,\beta)=Px(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_ih_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_ig_i$, где $\alpha=(\alpha_1,$ $\alpha_2,...,\alpha_m)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_l)$ – постоянные векторы, подлежащие определению, их нормы соответственно $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|$, $\|\beta\|=\sum_{i=1}^{l}|\beta_i|$.

С помощью принципа сжатых отображений можно показать существование решения уравнения $P(R(x(\alpha,\beta),\lambda,\mu))=0$, при этом устанавливается, что $\|Px(\alpha,\beta)\| \le \frac{\gamma}{1-\gamma}(\|\alpha\|+\|\beta\|)$, $0<\gamma<1$ – некоторое число. Тогда для того, чтобы $x(\alpha,\beta)$ было решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы векторы α и β удовлетворяли операторным уравнениям

$$\xi(R(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta),\lambda,\mu))=0,$$
$$\eta(R(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta),\lambda,\mu))=0,$$

где $J(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i$.

Ввиду линейности операторов ξ,η и введенных обозначений имеем

$$\xi(B(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta)))+ +\xi(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu))=0, \tag{3}$$

$$\eta(B(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta)))+ +\eta(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu))=0, \tag{4}$$

где $f(\alpha,\beta,\lambda,\mu)=-[(\omega_0+\mu)K(\lambda)x(\alpha,\beta)+\mu Ax(\alpha,\beta)+ +(\omega_0+\mu)(C(x(\alpha,\beta),\lambda)+D(x(\alpha,\beta),\lambda))]$.

Исследуем каждое слагаемое уравнения (3) в отдельности.

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\xi(B(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta))=\xi(B(Px(\alpha,\beta))+$$
$$+\xi\left(B\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)\right)=\xi(BPx(\alpha,\beta))+$$
$$+\xi\left(B\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i\right)\right)+\xi\left(B\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)\right)=$$
$$=\xi(BPx(\alpha,\beta))+\xi\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Bh_i\right)+\xi\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i Bg_i\right).$$

Из свойств операторов ξ, B, P следует, что $Px(\alpha,\beta)\in W_2$, значит $BPx(\alpha,\beta)\in W_2$. Отсюда $\xi(BPx(\alpha,\beta))=0$.

Для любого $i\in\{1,2,...,m\}$ h_i является собственным элементом оператора B, соответствующим нулевому собственному значению. Следовательно, $\xi(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Bh_i)=\xi(0)=0$. Таким образом,

$$\xi(B(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta)))=\xi(\sum_{i=1}^{l}\beta_i Bg_i).$$

Положим, что $\xi(\sum_{i=1}^{l}\beta_i Bg_i)=M_1\beta$.

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\xi(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu))=-\xi[(\omega_0+\mu)K(\lambda)x(\alpha,\beta)+$$
$$+\mu Ax(\alpha,\beta)+(\omega_0+\mu)C(x(\alpha,\beta),\lambda)+$$
$$+(\omega_0+\mu)D(x(\alpha,\beta),\lambda)]=-[\xi(\omega_0K(\lambda)x(\alpha,\beta)+$$
$$+\xi(\mu Ax(\alpha,\beta))+\xi(\mu K(\alpha,\beta))+$$
$$\xi((\omega_0+\mu)C(x(\alpha,\beta)))+\xi((\omega_0+\mu)D(x(\alpha,\beta)))].$$

Исследуем каждое слагаемое этой суммы в отдельности. Из принятых обозначений и линейности оператора ξ следует:

$$\xi(\omega_0K(\lambda)x(\alpha,\beta))=$$
$$=\omega_0\xi(K(\lambda)(Px(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i))=$$
$$=\omega_0\xi(K(\lambda)(Px(\alpha,\beta))+\omega_0\xi\left(K(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)\right).$$

Так как $K(\lambda)Px(\alpha,\beta)\in W_2$, то $\xi(K(\lambda)\times \times Px(\alpha,\beta))=0$.

Учитывая, что $\xi(x)=(\xi_1(x),\xi_2(x),...,\xi_m(x))$, то каждому значению координаты $\xi_j(x)$, $j\in\{1, 2,...,m\}$ соответствует следующая оценка выражения $\omega_0\xi\left(K(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)\right)$:

1) при $j=1$ из равенства $\xi_j(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xh_j\,dt$ и попарной ортогональности базисных векторов пространств W_0 и W_1 получаем:

$$\omega_0\xi_1\left(K(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)\right)=$$
$$=\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(K(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right),h_1\right)dt=$$
$$+\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i K(\lambda)h_i,h_1\right)+\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i K(\lambda)g_i,h_1\right)\right)dt+$$
$$=\frac{\omega_0}{\pi}\alpha_1\int_0^{2\pi}(K(\lambda)h_1,h_1)dt=\frac{\omega_0\alpha_1}{\pi}\overline{K}_1(\lambda),$$

2) при $j=2$ имеем:

$$\omega_0\xi_2\left(K(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)\right)=$$
$$=\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{2\pi}K(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i=\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)h_2dt=$$
$$=\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i K(\lambda)h_i,h_2\right)+\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i K(\lambda)g_i,h_2\right)\right)dt=$$
$$=\frac{\omega_0}{\pi}\alpha_2\int_0^{2\pi}(K(\lambda)h_2,h_2)=\frac{\omega_0\alpha_2}{\pi}\overline{K}_2(\lambda).$$

Продолжая аналогично, на шаге $i=m$ получим

$$\omega_0\xi_m\left(K(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i\right)\right)=\frac{\omega_0\alpha_m}{\pi}\overline{K}_m(\lambda).$$

Отсюда $\xi(\omega_0 K(\lambda)x(\alpha,\beta)) = \widetilde{K}_1(\lambda)\alpha$, где $\widetilde{\alpha} = = \frac{\omega_0}{\pi} colon(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$, $\widetilde{K}_1(\lambda) = diag(\overline{K}_1(\lambda),\overline{K}_2(\lambda),... ...,\overline{K}_m(\lambda))$.

Так как $\xi(Px(\alpha,\beta)) = 0$, то

$$\xi(\mu Ax(\alpha,\beta)) = \mu A\xi(J(\alpha,\beta)),\ \|\xi(\mu Ax(\alpha,\beta))\| \le O_1(\mu),$$

где $\lim\limits_{\mu\to 0} O_1(\mu) = 0$, равномерно относительно векторов $\alpha(|\alpha| \le \delta_0)$, $\beta(|\beta| \le \delta_0)$, $\lambda(|\lambda| \le \delta_0)$.

Аналогично, получим оценку

$$\xi(\mu K(\lambda)x(\lambda,\beta)) = \mu\xi(K(\lambda)J(\alpha,\beta)),$$
$$\|\xi(\mu K(\lambda)x(\alpha,\beta))\| \le O_1(\mu).$$

Преобразуем $\xi((\omega_0+\mu)C(x(\alpha,\beta),\lambda)\ )$. Ввиду линейности функционала ξ получим

$$\xi((\omega_0+\mu)C(x(\alpha,\beta),\lambda)) = (\omega_0+\mu)\xi(C(J(\alpha,\beta),\lambda)+ + C(x(\alpha,\beta),\lambda) - C(J(\alpha,\beta),\lambda)) = = (\omega_0+\mu)[\xi(C(J(\alpha,\beta),\lambda)) + + \xi(C(x(\alpha,\beta),\lambda) - C(J(\alpha,\beta),\lambda))].$$

Из того, что $\|\xi(x)\| = \left\|(\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} xhdt\right\| \le (\pi)^{-1} \times \times \int\limits_0^{2\pi}\|x\|\|h\|dt = \|x\|$, а также из условия Липшица, получаем следующую оценку выражения $\|\xi((\omega_0 + +\mu)C(x(\alpha,\beta),\lambda))\|$:

$$\|\xi((\omega_0+\mu)C(x(\alpha,\beta),\lambda))\| = \|(\omega_0+\mu)[\xi(C(J(\alpha,\beta),\lambda)) + + \xi(C(x(\alpha,\beta),\lambda) - \xi(C(J(\alpha,\beta),\lambda))]\| \le$$
$$\le (\omega_0+\mu)\|\xi(C(J(\alpha,\beta),\lambda))\| + (\omega_0+\mu)\|\xi(C(x(\alpha,\beta),\lambda) - - C(J(\alpha,\beta),\lambda))\| \le (\omega_0+\mu)\|C(J(\alpha,\beta),\lambda)\| + + (\omega_0+\mu)\|C(x(\alpha,\beta),\lambda) - C(J(\alpha,\beta),\lambda)\| \le$$
$$\le (\omega_0+\mu)q_0\varepsilon^{s-1}\|J(\alpha,\beta)\| + + (\omega_0+\mu)q_0\varepsilon^{s-1}\|x(\alpha,\beta) - J(\alpha,\beta)\| \le$$
$$\le (\omega_0+\mu)q_0\varepsilon^{s-1}[\|\alpha\|\|h\| + \|\beta\|\|g\|] + + (\omega_0+\mu)q_0\varepsilon^{s-1}\|Px(\alpha,\beta)\| =$$
$$= (\omega_0+\mu)q_0\varepsilon^{s-1}[\|\alpha\| + \|\beta\| + \|Px(\alpha,\beta)\|] \le$$
$$\le (\omega_0+\mu)q_0\varepsilon^{s-1}\left[\|\alpha\| + \|\beta\|\frac{\gamma}{1-\gamma}(\|\alpha\| + \|\beta\|)\right] =$$
$$= (\omega_0+\mu)q_0\varepsilon^{s-1}\frac{1}{1-\gamma}(\|\alpha\| + \|\beta\|) <$$
$$< 2q_0(\omega_0+\mu)\frac{1}{1-\gamma}\varepsilon^s < o_1(\varepsilon^s),$$

где $q_0 > 0$ – некоторое число, $\gamma < 1$.

В результате получим

$$\|\xi((\omega_0+\mu)C(x(\alpha,\beta),\lambda))\| < o_1(\varepsilon^s).$$

Аналогично рассмотрим слагаемое $\|\xi((\omega_0 + +\mu)D(x(\alpha,\beta),\lambda)))\|$:

$$\xi((\omega_0+\mu)D(x(\alpha,\beta),\lambda)) = (\omega_0+\mu)\xi(D(J(\alpha,\beta),\lambda)+ + D(x(\alpha,\beta),\lambda) - D(J(\alpha,\beta),\lambda)) = = (\omega_0+\mu)[\xi(D(J(\alpha,\beta),\lambda)) + \xi(D(x(\alpha,\beta),\lambda) - - D(J(\alpha,\beta),\lambda)).$$

Оценивая норму выражения $\|\xi((\omega_0+\mu)\times \times D(x(\alpha,\beta),\lambda))\|$, будем иметь

$$\|\xi((\omega_0+\mu)D(x(\alpha,\beta),\lambda))\| = \|(\omega_0+\mu)[\xi(D(J(\alpha,\beta),\lambda)) + + \xi(D(x(\alpha,\beta),\lambda)\ - D(J(\alpha,\beta),\lambda))]\| \le$$
$$\le (\omega_0+\mu)\|\xi(D(J(\alpha,\beta),\lambda))\| + (\omega_0+\mu)\|\xi(D(x(\alpha,\beta),\lambda) - - D(J(\alpha,\beta),\lambda))\| \le (\omega_0+\mu)\|D(J(\alpha,\beta),\lambda)\| + + (\omega_0+\mu)\|\xi(D(x(\alpha,\beta),\lambda) - D(J(\alpha,\beta),\lambda) \le$$
$$\le (\omega_0+\mu)\overline{q}\|J(\alpha,\beta)\| + (\omega_0+\mu)\overline{q}\|x(\alpha,\beta) - J(\alpha,\beta)\| \le$$
$$\le (\omega_0+\mu)\overline{q}[\|\alpha\|\|h\| + \|\beta\|\|g\|] +\ (\omega_0+\mu)\overline{q}\|Px(\alpha,\beta)\| =$$
$$= (\omega_0+\mu)\overline{q}[\|\alpha\| + \|\beta\| + \|Px(\alpha,\beta)\|] \le (\omega_0+\mu)\overline{q}\Big[\|\alpha\| + + \|\beta\| + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\|\alpha\| + \|\beta\|)\Big] = (\omega_0+\mu)\overline{q}\frac{1}{1-\gamma}(\|\alpha\| + \|\beta\|) <$$
$$< 2\overline{q}(\omega_0+\mu)\frac{1}{1-\gamma} < o_1(\varepsilon^s),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \overline{q}\ /\ \varepsilon^{s\text{-}1}\text{=}0,\ \gamma < 1$, откуда получим

$$\|\xi((\omega_0+\mu)D(x(\alpha,\beta),\lambda))\| < o_1(\varepsilon^s).$$

Таким образом, $\xi(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu)) = -\widetilde{K}_1(\lambda)\widetilde{\alpha} + + O_1(\mu) + o_1(\varepsilon^s)$. Это значит, что уравнение (3) можно записать в виде

$$M_1\beta - \widetilde{K}_1(\lambda)\widetilde{\alpha} - \omega_0 C(J(\alpha,\beta),\lambda) + + O_1(\mu) + o_1(\varepsilon^s) = 0. \quad (5)$$

Рассматривая аналогично слагаемые уравнения (4), получим

$$\eta(B(Px(\alpha,\beta) + J(\alpha,\beta))) = \eta\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i Bg_i\right) = M_2\widetilde{\beta},$$
$$\eta(f(\alpha,\beta,\lambda,\mu)) = -\widetilde{K}_2(\lambda)\widetilde{\beta} + O_2(\mu) + o_2(\varepsilon^s),$$

где $\widetilde{K}_2(\lambda) = diag\left(\overline{\overline{K}}_1(\lambda),\overline{\overline{K}}_2(\lambda),...,\overline{\overline{K}}_l(\lambda)\right)$, $\overline{\overline{K}}_i = = \frac{\omega_0}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(K(\lambda)g_i, g_i)dt$, $i = \{1,2,...,l\}$, $\widetilde{\beta} = colon(\beta_1, \beta_2,...,\beta_l)$.

Поэтому уравнение (4) примет вид

$$M_2\beta - \widetilde{K}_2(\lambda)\widetilde{\beta} - \omega_0 C(J(\alpha,\beta),\lambda) + O_2(\mu) + o_2(\varepsilon^s) = 0. \quad (6)$$

Положим $M = colon(M_1, M_2)$,

$$\widetilde{K}(\lambda)\ = diag(-\widetilde{K}_1(\lambda), -\widetilde{K}_2(\lambda)),\ \widetilde{\gamma} = colon(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}),$$
$$\widetilde{C}(J(\alpha,\beta),\lambda) = colon(-C(J(\alpha,\beta),\lambda), -C(J(\alpha,\beta),\lambda))$$

$$\widetilde{O}(\mu) = colon(O_1(\mu), O_2(\mu)),$$
$$\widetilde{o}(\varepsilon^s) = colon\left(o_1\left(\varepsilon^s\right), o_2\left(\varepsilon^s\right)\right).$$

Тогда систему уравнений (5) и (6) запишем следующим образом

$$M\beta + \widetilde{K}(\lambda)\widetilde{\gamma} + \omega_0\widetilde{C}(J(\alpha,\beta),\lambda) + \widetilde{O}(\mu) + \widetilde{o}(\varepsilon^s) = 0, \quad (7)$$

где $M - (m+l)\times l$-матрица.

Таким образом, задача нахождения условий существования решения уравнения (1) свелась к задаче разрешимости уравнения (7).

Предположим, что $\mathrm{rang} M = r$, $0 \le r \le l$. Тогда путем замены переменных $\beta = H\beta_1$, где H – матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы $M\beta = 0$ (при $r = l$, β=0), система (7) будет сведена к системе

$$\widetilde{K}(\lambda)\widetilde{\gamma} + \omega_0\widetilde{C}(J(\alpha,\beta),\lambda) + \widetilde{O}(\mu) + \widetilde{o}(\varepsilon^s) = 0, \quad (8)$$

где $\widetilde{\gamma} = (\alpha, \beta_1)$. Для простоты записей вместо β_1 будем писать β с сохранением его размерности.

Пусть $\widetilde{K}(\lambda)$ линейно зависит от λ.

Заменим переменные в системе (8) $\widetilde{\gamma} = \rho e$, $\rho > 0$, $e = (e_\alpha, e_\beta)$ – вектор размерности $m+l$, $\alpha = \rho e_\alpha$, $\beta = \rho e_\beta$. Получим систему

$$\widetilde{K}(\lambda)\rho e + \omega_0\widetilde{C}\left(J\left(e_\alpha, e_\beta\right), \lambda\right) + \widetilde{O}(\mu) + \widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right) = 0,$$

которую с помощью элементарных преобразований сведем к системе

$$K^*(e)\lambda + \omega_0\widetilde{C}\left(J\left(e_\alpha, e_\beta\right), \lambda\right) + \frac{\widetilde{O}(\mu)}{\rho} + \frac{\widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right)}{\rho} = 0,$$

а следовательно, к системе

$$K^*(e)\lambda + O(\rho) + \frac{\widetilde{O}(\mu)}{\rho} + \frac{\widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right)}{\rho} = 0,$$

учитывая, что $O(\rho) = \omega_0\widetilde{C}\left(J\left(e_\alpha, e_\beta\right), \rho e_\lambda\right)$, $\lim\limits_{\rho\to 0} O(\rho) = 0$ равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Для того чтобы полученное уравнение было разрешимо, потребуем выполнение условия $m + l < p$. Введем обозначение $E = \{e : |e| = 1\}$. Зафиксируем $e^* \in E$ такое, что $rang K^*\left(e^*\right) = m + l$:

$$K^*\left(e^*\right)\lambda + O(\rho) + \frac{\widetilde{O}(\mu)}{\rho} + \frac{\widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right)}{\rho} = 0. \quad (9)$$

Вектор $K^*\left(e^*\right)\lambda$ представим равенством $K^*\left(e^*\right)\lambda = K_1^*\left(e^*\right)\lambda_1 + K_2^*\left(e^*\right)\lambda_2$, где $K_1^*\left(e^*\right) - (m+l)\times(m+l)$ – матрица, $K_2^*\left(e^*\right) - (m+l)\times(p-(m+l))$ – матрица, $\det K_1^*(\lambda) \ne 0$. Система (9) примет вид

$$K_1^*\left(e^*\right)\lambda_1 + K_2^*\left(e^*\right)\lambda_2 + O(\rho) + \frac{\widetilde{O}(\mu)}{\rho} + \frac{\widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right)}{\rho} = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = -\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}\left(K_2^*\left(e^*\right)\lambda_2 + O(\rho) + \frac{\widetilde{O}(\mu)}{\rho} + \frac{\widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right)}{\rho}\right).$$

Оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ определим равенством

$$\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)\lambda_1 = -\left(\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}K_2^*\left(e^*\right)\lambda_2 + \right.$$
$$\left. + \left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}O(\rho) + \left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}\frac{\widetilde{O}(\mu)}{\rho} + \left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}\frac{\widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right)}{\rho}\right).$$

Теорема 1. Существует число $\delta > 0$ такое, что оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ имеет на множестве $\Lambda^* = \{\lambda_1 : |\lambda_1| < \delta\}$ неподвижную точку.

Доказательство. Убедимся, что оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ отображает некоторое замкнутое, ограниченное, выпуклое множество в себя.

Так как $\|\widetilde{\gamma}\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$, то $\|\widetilde{\gamma}\| \ge \|\alpha\|$, $\|\widetilde{\gamma}\| \ge \|\beta\|$. По определению $\|\alpha\| = \sum\limits_{i=1}^{m}|\alpha_i|$, где $\alpha_i = \rho e_i$. Это значит, что $\|\alpha\| = \sum\limits_{i=1}^{m}|\rho e_i|$, или $\|\alpha\| = \rho\sum\limits_{i=1}^{m}|e_i|$.

Положим, $\varepsilon = \rho$. Тогда, учитывая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}\frac{\widetilde{o}(\varepsilon^s)}{\varepsilon} = 0, \ \lim_{\rho\to 0} O(\rho) = 0$$

равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, получим, что существует число $\delta > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < (0,\delta]$ $\left|\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}\frac{\widetilde{o}\left(\varepsilon^s\right)}{\varepsilon}\right| < \frac{\delta}{4}$ и $\left\|\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}O(\rho)\right\| < \frac{\delta}{4}$.

Фиксируем $\varepsilon^* < (0,\delta]$. Тогда с учетом того, что $\lim\limits_{\mu\to 0}\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}\frac{\widetilde{o}(\mu)}{\varepsilon^*} = 0$, существует число $\delta_1 > 0$, при котором $\left\|\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}\frac{\widetilde{O}(\mu)}{\varepsilon^*}\right\| < \frac{\delta}{4}$ для любого $\mu \in (0,\delta_1)$.

Так как $\lim\limits_{\lambda_2\to 0}\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}K_2^*\left(e^*\right)\lambda_2 = 0$, то число $\delta_2 > 0$ можно выбрать таким, чтобы при любом λ_2 $(|\lambda_2| < \delta_2)$ выполнялось неравенство

$$\left\|\left(K_1^*\left(e^*\right)\right)^{-1}K_2^*\left(e^*\right)\lambda_2\right\| < \frac{\delta}{4}.$$

Таким образом, существует такое $\delta > 0$, что для любого фиксированного $\varepsilon < \delta$, любого фиксированного μ, $|\mu| < \delta_1$, любого фиксированного λ_2 $(|\lambda_2| < \delta_2)$, для любого λ_1 $(|\lambda_1| \le \delta)$

$$\|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)\ \lambda_1\| < \delta.$$

Следовательно, оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ отображает в себя замкнутое ограниченное выпуклое множество $\Lambda^* = \{\lambda_1 : |\lambda_1| \le \delta\}$. Так как оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ непрерывен по построению, то по теореме Боля – Брауэра на множестве Λ^* существует, по крайней мере, одна неподвижная точка этого оператора. Теорема доказана.

Фиксируем $\mu^*\left(0<\left|\mu^*\right|<\delta_1\right)$, $\lambda_2^*\left(0<\left|\lambda_2^*\right|<\delta_2\right)$. Тогда, учитывая, что $\alpha^* = \varepsilon^* e_\alpha^*$, $\beta^* = \varepsilon^* e_\beta^*$, получим, что существует $\lambda_1^*\left(\left|\lambda_1^*\right| \le \delta\right)$, удовлетворяющее равенству $\Gamma\left(\alpha^*,\beta^*,\lambda,\mu^*\right)\lambda_1^* = \lambda_1^*$ при $\lambda_2 = \lambda_2^*$.

Ненулевое периодическое решение системы (1) определяется равенством

$$x\left(\alpha^*,\beta^*\right) = Px\left(\alpha^*,\beta^*\right) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^* h_i + \sum_{i=1}^{l}\beta_i^* g_i ,$$

период $\tilde{\omega}$ которого равен $\tilde{\omega} = \omega_0 + \mu^*$.

Предположим, что при любых $i = \overline{1,m+l}$, $j = \overline{1,p}$ элемент $K_{ij}(\lambda)$ матрицы $K(\lambda)$ системы (8) можно представить равенством $K_{ij}(\lambda) = K_{ij}^{s-1}(\lambda) + o\left(|\lambda|^{s-1}\right)$, в котором $K_{ij}^{s-1}(\lambda)$ – форма порядка $s-1$ относительно координат вектора λ, $\lim\limits_{\lambda\to 0} o\left(|\lambda|^{s-1}\right)\Big/|\lambda|^{s-1} = 0$. Тогда систему (8) можно записать в виде

$$P_s(\theta) + \tilde{O}(\mu) + \tilde{o}\left(\varepsilon^s\right) + o\left(|\theta|^s\right) = 0, \qquad (10)$$

где $P_s(\theta) = \left(K_{ij}^{s-1}(\lambda)\right)_1^{m+l}{}_1^p\, \tilde{\gamma} + \omega_0 C^*\left(J(\alpha,\beta),\lambda\right)$ – вектор-форма порядка s относительно координат вектора $\theta = (\lambda,\tilde{\gamma})$.

Заменой переменных $\theta = \rho_1 e$, $\rho_1 > 0$, e – $(m+l+p)$-мерный вектор, $e = \left(e_\alpha, e_\beta, e_\lambda\right)$, система (10) может быть сведена к системе

$$P_s(e) + \frac{O(\mu)}{\rho_1} + \frac{o\left(\varepsilon^s\right)}{\rho_1} + o\left(\rho_1,|e|\right) = 0. \qquad (11)$$

Пусть $S = \left\{e \in E_{m+l+p} \colon |e| = 1\right\}$.

Теорема 2. Если при любом $e \in S$ $P_s(e) \ne 0$, то найдется такое число $\delta > 0$, что при любых $\mu(|\mu|<\delta)$, $\varepsilon(|\varepsilon|<\delta)$, в любой окрестности точки $\theta = 0$ существует множество, в котором нет ненулевого решения системы (7).

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы Вейерштрасса о достижимости непрерывной функции на замкнутом ограниченном множестве наибольшего и наименьшего значений и того, что $\left|P_s(e)\right| > 0$ при любом $e \in S$.

Действительно, пусть число $m > 0$ такое, что при любом $e \in S$ $\left|P_s(e)\right| \ge m$. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{\rho_1\to 0} O\left(\rho_1,|e|\right) = 0$, получим, что существует число $\delta_0 > 0$ такое, что при любом $\rho_1 \in (0,\delta_0)$ выполнено неравенство $\left|O\left(\rho_1,|e|\right)\right| < \frac{m}{2}$. Зафиксировав $\rho^* \in (0,\delta_0)$, получим, что существует число $\delta > 0$ такое, что при любых $(\mu,s) \in (0,\delta)$ будет выполнено неравенство

$$\left|P_s(e) + \frac{O(\mu)}{\rho_1^*} + \frac{o\left(\varepsilon^s\right)}{\rho_1^*} + o\left(\rho_1^*,|e|\right)\right| \ge \left|P_s(e)\right| - \left|\frac{O(\mu)}{\rho_1^*} + \frac{o\left(\varepsilon^s\right)}{\rho_1^*} + o\left(\rho_1^*,|e|\right)\right| > 0.$$

Это значит, что во множестве $\left\{\theta : \theta = \rho_1^* e, |e| = 1\right\}$ при любых $\mu(|\mu|<\delta)$, $\varepsilon(|\varepsilon|<\delta)$ нет ненулевого решения системы (8). Теорема доказана.

Предположим, что существует вектор $e^* \in S$, удовлетворяющий равенству $P_s\left(e^*\right) = 0$. В окрестности точки e^* возможно представление

$$P_s(e) = D\left(e^*\right)\left(e-e^*\right) + \sum_{i=2}^{s} P_i\left(e^*, e-e^*\right),$$

в котором $D\left(e^*\right)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $P_s(e)$ в точке e^*, при любом i $P_i\left(e^*, e-e^*\right)$ – вектор-функция порядка i относительно вектора $e-e^*$.

Предположим, что существует целое число $j \ge 2$ такое, что при любом $i < j$ $P_i\left(e^*, e-e^*\right) \equiv 0$, $P_j\left(e^*, e-e^*\right) \not\equiv 0$. Тогда, положив, что $e - e^* = \tau$, систему (11) запишем в виде

$$D(e)\tau + o\left(|\tau|^i\right) + O\left(\rho_1,|e|\right) + \frac{O(\mu)}{\rho_1} + \frac{o(\varepsilon)}{\rho_1} = 0, \qquad (12)$$

в котором $\lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{o\left(|\tau|^i\right)}{|\tau|^i} = 0$.

Теорема 3. Если $rang D\left(e^*\right) = m + l$, то найдется такое число $\delta > 0$, что при любых $\mu(|\mu|<\delta)$, $\varepsilon(|\varepsilon|<\delta)$ существует ненулевое периодическое решение системы (1).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Методом неподвижной точки устанавливается существование чисел δ и ρ_1^* таких, что при любых фиксированных $\mu(|\mu|<\delta)$, $\varepsilon(|\varepsilon|<\delta)$ существует ненулевое решение системы (12).

Пусть при фиксированных ρ_1^*, μ^*, ε^* ненулевым решением системы (12) является τ^*. Тогда ненулевым периодическим решением системы (1) является

$$x(\alpha^*,\beta^*)=Px(\alpha^*,\beta^*)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^* h_i+\sum_{i=2}^{l}\beta_i^* g_i ,$$

где $\alpha^*=\rho_1^*\bar{e}_\alpha$, $\bar{e}_\alpha=e_\alpha^*+\tau_\alpha^*$, $\beta^*=\rho_1^*\bar{e}_\beta$, $\bar{e}_\beta==e_\beta^*+\tau_\beta^*$.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{d\tau}=\psi_1(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2),$$
$$\frac{dy_2}{d\tau}=\psi_2(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2), \qquad (13)$$
$$\frac{dy_3}{d\tau}=\psi_3(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2),$$

в которой

$$\psi_1(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)=y_1^2-\left(2\lambda_2+4\lambda_1^2\right)y_1+8\lambda_1^2\lambda_2,$$
$$\psi_2(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)=y_2y_3-3y_2-\lambda_2y_2-$$
$$-\lambda_1^2y_2-\lambda_2^2y_3+3\lambda_2^2+\lambda_2^3+\lambda_1^2\lambda_2^2,$$
$$\psi_3(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)=-y_2y_3+2y_3-3\lambda_2y_3+$$
$$+\lambda_1y_2-2\lambda_1+3\lambda_1\lambda_2.$$

Ставится задача: определить условия существования $\widetilde{\omega}$-периодического решения системы (10), учитывая, что $\widetilde{\omega}$ лежит в окрестности некоторого известного числа.

Обозначим

$$\psi(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)=(\psi_1(y_1,y_2,y_3,\ \lambda_1,\lambda_2),$$
$$\psi_2(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2),\ \psi_3(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)).$$

Непосредственно путем вычисления устанавливаем, что при любых фиксированных $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda(\delta_0)$ в точках

$$\theta_1(\lambda_1,\lambda_2)=\left(4\lambda_1^2,\,2-3\lambda_2,\ 3+\lambda_2+\lambda_1^2\right),$$
$$\theta_2(\lambda_1,\lambda_2)=\left(2\lambda_2,\,2-3\lambda_2,\,3+\lambda_2+\lambda_1^2\right)$$

справедливы равенства $\psi(\theta_1(\lambda_1,\lambda_2),\lambda_1,\lambda_2)=0$, $\psi(\theta_2(\lambda_1,\lambda_2),\lambda_1,\lambda_2)=0$, а также при $\lambda_1=\lambda_2=0$ $\theta_1(0,0)=\theta_2(0,0)=(0,2,3)$, то есть при $\lambda_0=(0,0)$ $y_0=(0,2,3)$.

Рассмотрим $\psi(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)$ в окрестности точки $\theta_1(\lambda_1,\lambda_2)$. При любых фиксированных $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda(\delta_0)$ имеем

$$\psi_1(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)=\left(4\lambda_1^2-2\lambda_2\right)\left(y_1-4\lambda_1^2\right)+\left(y_1-4\lambda_1^2\right)^2,$$
$$\psi_2(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)=\left(2-3\lambda_2-\lambda_2^2\right)\left(y_3-3-\lambda_2-\lambda_1^2\right)+$$
$$+(y_2-2+3\lambda_2)\left(y_3-3-\lambda_2-\lambda_1^2\right),\ \psi_3(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=\left(-3-\lambda_2+\lambda_1-\lambda_1^2\right)(y_2-2+3\lambda_2)-(y_2-2+3\lambda_2)\times$$
$$\times\left(y_3-3-\lambda_2-\lambda_1^2\right).$$

Или:

$$colon\left(\frac{dy_1}{d\tau},\frac{dy_2}{d\tau},\frac{dy_3}{d\tau}\right)=\left(colon\left(4\lambda_1^2-2\lambda_2,0,0\right),\right.$$

$$colon\left(0,0,-3-\lambda_2+\lambda_1-\lambda_1^2\right),colon\left(0,2-3\lambda_2-\lambda_2^2,0\right)\Big)\times$$

$$\times colon\left(y_1-4\lambda_1^2,\,y_2-2+3\lambda_2,\,y_3-3-\lambda_2-\lambda_1^2\right)+$$
$$+colon\left(\left(y_1-4\lambda_1^2\right)^2,(y_2-2+3\lambda_2)\left(y_3-3-\lambda_2-\lambda_1^2\right),\right.$$
$$\left.-(y_2-2+3\lambda_2)\left(y_3-3-\lambda_2-\lambda_1^2\right)\right). \qquad (14)$$

Найдем:

$$A=(colon(0,0,0),colon(0,0,-3),\quad colon(0,2,0)),$$
$$K(\lambda)=(colon(-2\lambda_2,0,0),\ colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),$$
$$colon(0,-3\lambda_2,0))$$

Заменой переменных $x_1=y_1-4\lambda_1^2$, $x_2==y_2-2+3\lambda_2$, $x_3=y_3-3-\lambda_2-\lambda_1^2$, систему (14) сведем к следующей системе:

$$colon(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)=(colon(0,0,0),colon(0,0,-3),$$
$$colon(0,2,0))+\ (colon(-2\lambda_2,0,0),colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),$$
$$colon(0,-3\lambda_2,0))(colon(x_1,x_2,x_3))+\left(colon\left(4\lambda_1^2,0,0\right),\right.$$
$$\left.colon\left(0,0,-\lambda_1^2\right),colon\left(0,-\lambda_2^2,0\right)\right)(colon(x_1,x_2,x_3))+$$
$$+colon\left(x_1^2,x_2x_3,-x_2x_3\right).$$

Положим, $t=\frac{2\pi}{\widetilde{\omega}}$, $\widetilde{\omega}=\omega_0+\mu$, $\omega_0>0$, μ – параметр. Имеем:

$$R(x,\lambda,\mu)=\ colon(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)-\frac{\omega_0}{2\pi}\times$$
$$\times\ (colon(0,0,0),\ colon(0,0,-3),\ \ colon(0,2,0))\times$$
$$\times\ (colon(x_1,x_2,x_3))-\frac{\omega_0}{2\pi}\ (colon(-2\lambda_2,0,0),$$
$$colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),\ colon(0,-3\lambda_2,0))(colon(x_1,x_2,x_3))-$$
$$-\frac{\mu}{2\pi}\ (colon(0,0,0),\ colon(0,0,-3),\ \ colon(0,2,0))\times$$
$$\times\ (colon(x_1,x_2,x_3))-\frac{\mu}{2\pi}\ (colon(-2\lambda_2,0,0),$$
$$colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),\ colon(0,-3\lambda_2,0))(colon(x_1,x_2,x_3))-$$
$$-\frac{\omega_0+\mu}{2\pi}\left(\left(colon\left(4\lambda_1^2,0,0\right)\right)\ colon\left(0,0,-\lambda_1^2\right),\right.$$
$$\left.colon\left(0,-\lambda_2^2,0\right)\right)\cdot\ (colon(x_1,x_2,x_3))+$$
$$+colon\left(x_1^2,x_2x_3,-x_2x_3\right)\Big). \qquad (15)$$

Согласно теории оператор B определим равенством $Bx=\dot{x}-\omega_0Ax$,

$$x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt++b_n\sin nt.$$

Составим оператор

$$L(k)=(colon(0,0,0,-k,0,0),\ colon(0,0,3\omega_0,0,-k,0),$$
$$colon(0,-2\omega_0,0,0,0,-k),colon(k,0,0,0,0,0),$$
$$colon(0,k,0,0,0,3\omega_0),\ colon(0,0,k,0,-2\omega_0,0)).$$

Непосредственно проведя вычисления убеждаемся, что при $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{6}}$ уравнение $\det L(k)=0$ имеет корень $k=1$, а матрицу $L(1)$ можно свести к виду

$$L'(1)=(colon(0,0,0,1,0,0),\ colon(0,0,1,0,0,0),$$
$$colon(0,1,0,0,0,0),colon(1,0,0,0,\ 0,0),$$
$$colon(0,0,0,0,0,0),colon(0,0,0,0,0,0).$$

Базис пространства E^0 составляют векторы $colon(0,0,0,0,1,0)$, $colon(0,0,0,0,0,1)$ пространства E^2 – векторы $colon(1,0,0,0,0,0)$, $colon(0,1,0,0,0,0)$, $colon(0,0,1,0,0,0)$, $colon(0,0,0,1,0,0)$, E^1 – нулевое множество. Отсюда пространство W_0 составляют векторы $h_1=colon(0,0,0)\cos t+colon(0,1,0)\sin t=$ $=colon(0,\sin t,0)$.

Следуя доказанному, решение системы (15) будем искать в виде $x(\alpha)=Px(\alpha)+\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2$. Для этого рассмотрим систему операторных уравнений

$$\xi_1(R(x(\alpha_1,\alpha_2),\lambda,\mu))=0,\ \xi_2(R(x(\alpha_1,\alpha_2),\lambda,\mu))=0, \quad (16)$$

в которой $\xi_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xh_1dt,\ \xi_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xh_2dt$.

$$\xi_1(R(x(\alpha),\lambda,\mu))=\xi_1(Bx(\alpha))-\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\xi_1((colon(-2\lambda_2,0,0),$$
$$colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),colon(0,-3\lambda_2,0))\cdot(colon(x_1(\alpha)),$$
$$colon(x_2(\alpha)),colon(x_3(\alpha)))-$$
$$-\xi_1\left(\frac{\mu}{2\pi}(colon(0,0,0),colon(0,0,-3),colon(0,2,0))\right)\times$$
$$\times(colon(x_1(\alpha)),\ colon(x_2(\alpha)),colon(x_3(\alpha)))-$$
$$-\xi_1\frac{\mu}{2\pi}\xi_1((colon(-2\lambda_2,0,0),\ colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),$$
$$colon(0,-3\lambda_2,0))\times\ (colon(x_1(\alpha)),$$
$$colon(x_2(\alpha)),colon(x_3(\alpha)))-\left(\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\mu\right)\Big/2\pi\right)\times$$
$$\times\xi_1\left(\left(colon\left(4\lambda_1^2,0,0\right),colon\left(0,0,-\lambda_1^2\right),\ colon\left(0,-\lambda_2^2,0\right)\right)\times\right.$$
$$\times(x_1(\alpha),x_2(\alpha),x_3(\alpha))+\ colon\left(x_1^2(\alpha),x_2(\alpha)x_3(\alpha),\right.$$
$$\left.-x_2(\alpha)x_3(\alpha))\right).$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое. Учитывая, что $BPx(\alpha)\in W_2$, имеем $\xi_1(Bx(\alpha))=$ $=\xi_1(BPx(\alpha)+B\alpha_1h_1+B\alpha_2h_2)=0$, так как h_1,h_2 – собственные элементы оператора B, соответствующие нулевому собственному значению.

Предварительно найдем векторы $x_1(\alpha),x_2(\alpha)$, $x_3(\alpha)$ из равенства

$$colon(x_1(\alpha),x_2(\alpha),x_3(\alpha))=$$
$$=Pcolon(x_1(\alpha),x_2(\alpha),x_3(\alpha))+\ \alpha_1 colon(0,\sin t,0)+$$
$$+\alpha_2 colon(0,0,\sin t).$$

Получим $x_1(\alpha)=Px_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)=Px_2(\alpha)+$ $+\alpha_1\sin t, x_3(\alpha)=Px_3(\alpha)+\alpha_2\sin t$. Из алгебраических свойств матриц и функционала ξ_1 имеем

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\xi_1((colon(-2\lambda_2,0,0),colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),$$
$$colon(0,-3\lambda_2,0))\ colon(x_1(\alpha),x_2(\alpha),x_3(\alpha)))=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(((colon(-2\lambda_2,0,0),colon(0,0,\lambda_1-\lambda_2),$$
$$colon(0,-3\lambda_2,0))\cdot colon(x_1(\alpha),\ x_2(\alpha),x_3(\alpha)),$$
$$colon(0,\sin t,0)))\ dt\ =\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(colon(-2\lambda_2x_1(\alpha),$$
$$-3\lambda_2x_3(\alpha),(\lambda_1-\lambda_2)x_2(\alpha))),\ colon(0,\sin t,0))\ dt=$$
$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}3\lambda_2\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(Px_3(\alpha)+\alpha_2\sin t)\sin tdt=$$
$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}3\lambda_2\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_2\sin^2 tdt-$$
$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}3\lambda_2\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Px_3(\alpha)\sin tdt=-\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_2\ \alpha_2+o(\varepsilon),$$

где $o(\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}3\lambda_2\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Px_3(\alpha)\sin tdt.$

Аналогично для слагаемого

$$\xi_1\left(\frac{\mu}{2\pi}(colon(0,0,0),colon(0,0,-3),colon(0,2,0))\times\right.$$
$$\left.\times colon(x_1(\alpha),\ x_2(\alpha),x_3(\alpha))\right),$$

получим

$$\xi_1\left(\frac{\mu}{2\pi}(colon(0,0,0),colon(0,0,-3),colon(0,2,0))\times\right.$$
$$\left.\times colon(x_1(\alpha),\ x_2(\alpha),x_3(\alpha))\right)=$$
$$=\frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(colon(0,0,0),colon(0,0,-3),colon(0,2,0))\times$$
$$\times colon(x_1(\alpha,\beta),\ x_2(\alpha,\beta),x_3(\alpha,\beta)),\ colon(0,\sin t,0))dt=$$
$$=\frac{\mu}{\pi}\alpha_2+o(\varepsilon).$$

Для остальных слагаемых имеем следующие оценки:

$$\xi_1\left(\frac{\mu}{2\pi}(colon(-2\lambda_2),colon(0,0,-\lambda_2-\lambda_1),\right.$$
$$\left.colon(0,-3\lambda_2,0))\times colon(x_1(\alpha),\ x_2(\alpha),x_3(\alpha))\right)=o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\xi_1\left(\sqrt{6}^{-1}+\mu\right)\cdot(2\pi)^{-1}\Big(\big(colon\left(4\lambda_1^2,0,0\right),\left(colon\left(0,0,-\lambda_1^2\right),\right.$$
$$\left.colon\left(0,-\lambda_2^2,0\right)\big)\cdot colon\left(x_1(\alpha),x_2(\alpha),x_3(\alpha)\right)+\right.$$
$$+colon\left(x_1^2(\alpha),x_2(\alpha)x_3(\alpha),-x_2(\alpha)x_3(\alpha)\right)\Big)=o\left(\varepsilon^2\right).$$

Значит

$$\xi_1(R(x(\alpha),\lambda,\mu))=-\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_2\alpha_2+\frac{\mu}{\pi}\alpha_2+o(\varepsilon).$$

Рассматривая аналогично слагаемые операторного уравнения $\xi_2(R(x(\alpha),\lambda,\mu))=0$, справедливо следующее:

$$\xi_2(R(x(\alpha),\lambda,\mu))=\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1-3\frac{\mu}{2\pi}\alpha_1+o(\varepsilon).$$

Положим, что $\chi=(\alpha,\lambda,\mu)$. Тогда систему операторных уравнений (16) запишем в виде:

$$\begin{aligned}&\xi_1(R(x(\alpha),\lambda,\mu))=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{2}}\lambda_2\alpha_2+\frac{\mu}{\pi}\alpha_2+o(|\chi|),\\&\xi_2(R(x(\alpha),\lambda,\mu))=\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1-3\frac{\mu}{2\pi}\alpha_1+o(|\chi|),\end{aligned}\qquad(17)$$

где $\alpha=\rho e,\rho>0,e=\left(e_{\alpha_1},e_{\alpha_2}\right)$.

Система (17) равносильна матричному уравнению $\frac{1}{2\pi}diag\left(\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\frac{1}{\sqrt{6}}-3\mu,-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_2+2\mu\right)^T\times$ $\times colon\left(e_{\alpha_1},e_{\alpha_2}\right)+o(|\chi|)=0$, то есть справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\left(colon\left(0,\frac{e_{\alpha_1}}{\sqrt{6}}\right),colon\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}e_{\alpha_2},-\frac{e_{\alpha_1}}{\sqrt{6}}\right),\right.\qquad(18)$$
$$\left.colon\left(2e_{\alpha_2},-3e_{\alpha_1}\right)\right)\cdot colon(\lambda_1,\lambda_2,\mu)+o(|\chi|)=0,$$

где $\alpha=\rho e,\rho>0,e=\left(e_{\alpha_1},e_{\alpha_2}\right)$.

Зафиксируем $e^*=(1,1)$, $e^*\in E$. При этом

$$rang\begin{pmatrix}0&-\sqrt{3/2}&2\\1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{6}&-3\end{pmatrix}=2.$$

Обозначим $\bar{\chi}=(\rho,\lambda_1,\lambda_2,\mu)$. Систему (18) запишем следующим образом:

$$(2\pi)^{-1}\left(colon\left(0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right),colon\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)\times$$
$$\times(\lambda_1,\lambda_2)+(2\pi)^{-1}colon(2,-3)\mu+o(|\chi|)=0.$$

Отсюда для $\lambda=colon(\lambda_1,\lambda_2)$ найдем выражение

$$\lambda=4\pi\left(colon\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),colon\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)\right)\times$$
$$\left(colon(2,-3)\frac{\mu}{2\pi}+o(|\bar{\chi}|)\right).$$

Обозначим оператор Γ:

$$\Gamma\lambda=4\pi\left(colon\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),colon\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)\right)\times$$
$$\times\left(colon(2,-3)\frac{\mu}{2\pi}+o(|\bar{\chi}|)\right).$$

Из теоремы 2 следует существование неподвижной точки $\lambda^*\left(\left|\lambda^*\right|\le\delta\right)$ оператора Γ при произвольно фиксированных $\rho^*\left(\rho^*<\delta\right)$, μ $(|\mu|\le\delta)$.

Тогда решение системы (15) имеет следующий вид: $x^*\left(\alpha^*\right)=Px\left(\alpha^*\right)+\alpha_1^*h_1+\alpha_2^*h_2$ или

$$x_1^*\left(\alpha^*\right)=Px_1^*\left(\rho^*\right),$$
$$x_2^*\left(\alpha^*\right)=Px_2^*\left(\rho^*\right)+\rho^*\sin t,$$
$$x_3^*\left(\alpha^*\right)=Px_3^*\left(\rho^*\right)+\rho^*\sin t,$$

так как $\alpha_1^*=\rho^*e_{\alpha_1}^*$, $\alpha_2^*=\rho^*e_{\alpha_2}^*$, $e_{\alpha_1}^*=1$, $e_{\alpha_2}^*=1$.

Возвращаясь к старым переменным и учитывая $Px(\alpha)=o(\varepsilon)$, получим

$$y_1^*=4\lambda_1^2+o(\varepsilon),$$
$$y_2^*=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\tau+2-3\lambda_2+o(\varepsilon),$$
$$y_3^*=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\tau+3+\lambda_2+\lambda_1^2+o(\varepsilon),$$

в которой $\tilde{\omega}=\frac{1}{\sqrt{6}}+\mu$, $(|\mu|\le\delta)$, $\delta>0$.

Аналогично исследуя $\psi(y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2)$ в окрестности второй точки $\theta_2(\lambda_1,\lambda_2)=$ $=\left(2\lambda_2,2-3\lambda_2,3+\lambda_2+\lambda_1^2\right)$, при произвольно фиксированных $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda(\delta_0)$ получим решение системы $x^*\left(\alpha^*\right)=Px\left(\alpha^*\right)+\alpha_1^*h_1+\alpha_2^*h_2$ или

$$x_1^*\left(\alpha^*\right)=Px_1^*\left(\rho^*\right),\ x_2^*\left(\alpha^*\right)=Px_2^*\left(\rho^*\right)+\rho^*\sin t,$$
$$x_3^*\left(\alpha^*\right)=Px_3^*\left(\rho^*\right)+\rho^*\sin t,$$

так как $\alpha_1^*=\rho^*e_{\alpha_1}^*$, $\alpha_2^*=\rho^*e_{\alpha_2}^*$, $e_{\alpha_1}^*=1$, $e_{\alpha_2}^*=1$.

Возвращаясь к старым переменным, при $Px(\alpha)=o(\varepsilon)$ получим

$$y_1^*=2\lambda_2+o(\varepsilon),$$
$$y_2^*=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\tau+2-3\lambda_2+o(\varepsilon),$$
$$y_3^*=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\tau+3+\lambda_2+\lambda_1^2+o(\varepsilon),$$

где $\tilde{\omega}=\frac{1}{\sqrt{6}}+\mu$, $(|\mu|\le\delta)$, $\delta>0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.** Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
2. **Андронов А.А., Леонтович Е.А.** Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Математический сборник. – 1956. – Т. 40. – № 2. – С. 179–224.
3. **Баутин Н.Н.** О числе предельных циклов, появляющихся при изменении параметра из состояния равновесия типа фокуса или центра // Математический сборник. – 1952. – Т. 30. – № 1. – С. 181–196.
4. **Малкин И.Г.** Некоторые задачи нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956.
5. **Малышев Ю.В., Захаров В.П.** Исследование существования и выпуклости предельных циклов методом обобщенных функций Ляпунова // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – С. 212–216.
6. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат. 1949. – 550 с.
7. **Отроков Н.Ф.** О числе предельных циклов дифференциального уравнения в окрестности особой точки // Математический сборник. – 1954. – Т. 6. – № 1. – С. 127–144.
8. **Плисс В.А.** О существовании периодических решений у некоторых нелинейных систем // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 5. – С. 1060–1073.
9. **Терехин М.Т.** Ненулевые периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенной матрицей при производных // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – С. 1645–1653.

Терехин Михаил Тихонович, д. ф.-м.н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А.Есенина

390000, г.Рязань, ул.Свободы, д.46

тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: terehin@rsu.edu.ru