УДК 517.94

РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Т. Терёхин

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE SOLUTIONS OF SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

M.T. Teryokhin

Исследуется проблема (и определяются условия) существования измеримого, почти периодического решения системы нелинейных интегральных уравнений. Доказаны теоремы об условиях разрешимости (и неразрешимости) краевой двухточечной периодической задачи в предположении, что отсутствует линейная часть системы и верхний предел интегрирования переменный.

Ключевые слова: измеримые и почти периодические вектор-функции, метод последовательных приближений, оператор, неподвижная точка, вектор-форма, матрица Якоби, ранг матрицы.

The problem of existence of measurable, of almost periodic solution of the system of nonlinear integral equations is investigated. It are proved the theorems about conditions of solvability (unsolvability) of boundary two-point periodic value problem at assumption, that linear part of system is absent and upper limit of integration is variable.

Keywords: measurable and almost periodic vector function, method of successive approximations, operator, fixed-point, vector-form, matrix of Yackobi, rank of matrix.

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi(s)) + g(t,s,h(s,\varphi(s))]ds + f(t), \qquad (1)$$

в которой $K(t,s)$ – $n \times n$-матрица $\mu(s,z)$, $g(t,s,u)$, $\eta(s,z)$, $f(t)$ – вектор-функции, λ – параметр.

Введем следующие обозначения: E_k – k-мерное векторное пространство, $|y| = \max\limits_i \{|y_i|\}$, $y \in E_k$, $R = (-\infty, \infty)$, $D = \{(t,s,u):\ t \in R,\ s \in [a,b],$ $u \in E_q,\ |u| \le r\}$, $D_1 = \{(t,s,u):\ t \in [c,d],\ s \in [a,b],$ $u \in E_q, |u| \le r\}$, $F = \{(t,s):\ t \in R,\ s \in [a,b]\}$, $F_1 = \{(t,s):\ t \in [c,d], s \in [a,b]\}$, $Z = \{(s,z): s \in [a,b],$ $z \in E_n,\ |z| \le m\}$, M_R – множество вектор-функций $\varphi(t)$, определённых на множестве R, $\Phi(m) = \{\varphi(t) \in M_R : |\varphi(t)| \le m\}$ при любом $t \in R\}$, $K(t,s) = (K_{ij}(t,s)_{11}^{nn}$, $g(t,s,u) = g_i(t,s,u))_1^n$, $f(t) = (f_i(t))_1^n$, $m > 0$, a, b, r – некоторые числа, $-\infty < a < b < \infty$, c, d – произвольные числа причем такие, что $-\infty < c < d < \infty$, $\|B(t,s)\| = \sup\limits_{|y| \le 1} |B(t,s),y|$, $B(t,s)$ – матрица.

Далее будем полагать:

1) матрица $K(t,s)$ и вектор-функции $\mu(s,z)$, $g(t,s,u)$, $\eta(s,z)$, $f(t)$ на соответствующих множествах обладают теми же свойствами, какими на этих множествах обладают их элементы;

2) на множестве F матрица $K(t,s)$ определена и удовлетворяет неравенству $\|K(t,s)\| \le p$, p – некоторое число;

3) на множестве D вектор-функция $g(t,s,u)$ определена, удовлетворяет неравенству $|g(t,s,u)| \le \nu$ и условию Липшица по переменной u с постоянной L_1, ν, L_1 – некоторые положительные числа;

4) на множестве Z вектор-функции $\mu(s,z)$, $\eta(s,z)$ определены, удовлетворяют неравенствам $|\mu(c,d)| \le w_1$, $|\eta(s,z)| \le r$ и условию Липшица по переменной z соответственно с постоянными L_2, L_3, где w_1, L_2, L_3 – некоторые числа;

5) на множестве R вектор-функция $f(t)$ определена и удовлетворяет неравенству $|f(t)| \le \gamma$, $\gamma > 0$ – некоторые числа.

Определение 1. Вектор-функция $\varphi(t)$, определенная на множестве R, называется решением системы (1), если при любом $t \in R$ вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет равенству (1).

Будем считать, что вектор-функция $\varphi(t)$, определённая на множестве R, тогда и только тогда является решением системы (1), когда она – решение системы (1), определённое на сегменте $[c,d]$, c,d $(c<d)$ – произвольные числа.

Проблема существования решений интегральных уравнений рассматривается в значительном количестве работ (см. книгу [1] и библиографию в этой книге).

В статье ставится задача: найти условия существования решения системы (1) с наперед заданными свойствами, определённого на множестве $[c,d]$.

1. Измеримые решения

Пусть c,d $(c<d)$ – произвольные, но фиксированные числа.

Определение 2. Матрицу $K(t,s)$ и вектор-функцию $g(t,s,u)$ при любом u $(|u|\le r)$ назовем измеримыми на множестве F, если при любых c,d матрица $K(t,s)$ и вектор-функция $g(t,s,u)$ при любом u $(|u|\le r)$ измеримы на множестве F_1; вектор-функцию $f(t)$ назовем измеримой на множестве R, если при любых c,d вектор-функция $f(t)$ измерима на сегменте $[c,d]$.

Теорема 1. Пусть:

1) матрица $K(t,s)$ и вектор-функция $g(t,s,u)$ при любом u $(|u|\le r)$ измеримы на множестве F_1, и при любых фиксированных $(t,s)\in F_1$ вектор-функция $g(t,s,u)$ непрерывна по u (условия Каратеодори) [2];

2) вектор-функции $\mu(s,z)$, $\eta(s,z)$ при любом z $(|z|\le m)$ измеримы на множестве $[a,b]$ и при любом $s\in[a,b]$ непрерывны по z (условия Каратеодори);

3) вектор-функция $f(t)$ измерима на сегменте $[c,d]$;

4) выполнено неравенство $m-2\gamma>0$.

Тогда число $\lambda_0>0$ можно выбрать так, что при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ система (1) будет иметь единственное решение, принадлежащее множеству $\Phi(m)$ вектор-функций, измеримых на множестве R.

Доказательство. Пусть c,d $(c<d)$ – произвольные, но фиксированные числа, $\varphi(s)\in\Phi(m)$ – множество измеримых вектор-функций на множестве $[c,d]$. Согласно условиям теоремы, функции $K_{ij}(t,s)$, $\mu_i(s,\varphi(s))$ измеримы соответственно на множествах F_1 и $[a,b]$. Рассматривая $\mu_i(s,\varphi(s))$ как функцию, заданную на прямоугольнике $[c,d;a,b]$, приходим к выводу, что на этом прямоугольнике функция $\mu_i(s,\varphi(s))$ измерима. Тогда функции $K_{ij}(t,s)\mu_i(s,\varphi(s))$, как произведения измеримых функций, интегрируемы на множестве F_1. Следовательно, по теореме Фубини [3] функция $\int_a^b K_{ij}(t,s)\mu_i(s,\varphi(s))ds$ интегрируема (измерима) по t на сегменте $[c,d]$ и согласно определению 2 измерима на множестве R.

Отметим, что функция $\int_a^b K_{ij}(t,s)\mu_i(s,\varphi(s))ds$ ограничена на множестве R. Это значит, что вектор-функция $\int_a^b K(t,s)\mu(s,\varphi(s))ds$ ограничена и измерима на множестве R.

Согласно условиям теоремы, для любой вектор-функции $\varphi(t)\in\Phi(m)$ вектор-функция $\eta(s,\varphi(s))$ измерима на множестве $[a,b]$, а вектор-функция $g(t,s,\eta(s,\varphi(s))$ измерима на множестве F_1 и поэтому интегрируема на этом множестве. Тогда по вышеупомянутой теореме Фубини функция $\int_a^b g_i(t,s,\eta(s,\varphi(s)))ds$ интегрируема (измерима) по t на сегменте $[c,d]$ и, согласно определению 2, измерима на множестве R. Отсюда следует, что вектор-функция $\int_a^b g(t,s,\eta(s,\varphi(s)))ds$ ограничена и измерима на множестве R.

Таким образом, окончательно получаем, что $\int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi(s))+g(t,s,\eta(s,\varphi(s))]ds+f(t)$ – ограниченная, измеримая на множестве R вектор-функция.

Доказательство существования измеримого решения системы (1) проведем методом последовательных приближений.

За нулевое приближение примем $\varphi_0(t)=0$. Первое приближение $\varphi_1(t)$ определим равенством

$$\varphi_1(t)=\lambda\int_a^b [K(t,s)\mu(s,0)+g(t,s,\eta(s,0))]ds+f(t),$$

получим

$$|\varphi_1(t)|\le|\lambda|\int_a^b [\|K(t,s)\||\mu(s,0)|+$$
$$+|g(t,s,\eta(s,0))|]ds+|f(t)|\le|\lambda|(pw_1+v)(b-a)+\gamma.$$

Учитывая, что $m-2\gamma>0$, и, полагая, что $\lambda_1=\dfrac{m-2\gamma}{2(pw_1+v)(b-a)}$, получим: $|\varphi_1(t)|\le\dfrac{m}{2}$. при любых λ $(|\lambda|\le\lambda_1)$ и $t\in[c,d]$

Второе приближение $\varphi_2(t)$ определим следующим равенством:

$$\varphi_2(t) = \lambda\int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi_1(s)) + g(t,s,\eta(s,\varphi_2))]ds + f(t).$$

Пусть для простоты записей $\alpha(\lambda) = |\lambda|(pL_2 + L_1L_3)(b-a)$. Тогда, полагая $\lambda_2 = \frac{1}{2(pL_2 + L_1L_3)} \times \frac{1}{(b-a)}$, получим, что при любом λ $(|\lambda| \le \lambda_2)$ будет выполнено неравенство $\alpha(\lambda) \le \alpha = \frac{1}{2}$. Поэтому при любом $t \in [c,d]$ и любом λ $(|\lambda| \le \lambda_2)$

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \le |\lambda| \int_a^b [|K(t,s)(\mu(s,\varphi_1(s)) - \mu(s,0)| + |g(t,s,\eta(s,\varphi_1(s)) - g(t,s,\eta(s,0))|]ds \le |\lambda|(pL_2 + L_1L_3)(b-a)\frac{m}{2} \le \frac{m}{2}\alpha.$$

Пусть $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Тогда при любых λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$ и $t \in [c,d]$ будут выполнены неравенства $|\varphi_1(t)| \le \frac{m}{2}$, $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \le \frac{m}{2}\alpha$, $|\varphi_2(t)| \le |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| + |\varphi_1(t)| \le \frac{m}{2}(1+\alpha) < \frac{m}{2}\frac{1}{1-\alpha} = m.$

Третье приближение $\varphi_3(t)$ определим равенством $\varphi_3(t) = \lambda\int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi_2(s)) + g(t,s,\eta(s,\varphi_2(s)))]ds + f(t)$. Получим, что при любом $t \in [c,d]$ и любом λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$ $|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| \le$

$$\le |\lambda| \int_a^b [\| K(t,s) \| | \mu(s,\varphi_2(s)) - \mu(s,\varphi_1(s))| + |g(t,s,\eta(s,\varphi_2(s))| - g(t,s,\eta(s,\varphi_1(s))|\,ds \le |\lambda|(pL_2 + L_1L_3) \times \sup_{s\in[a,b]} |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)|(b-a) \le \alpha^2\frac{m}{2},$$

$$|\varphi_3(t)| \le |\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| + |\varphi_2(t)| \le \frac{m}{2}(1+\alpha+\alpha^2) < \frac{m}{2} \times \frac{1}{1-\alpha} = m.$$

Продолжая этот процесс далее, получим последовательность $(\varphi_n(t))$, в которой при любом n вектор-функция $\varphi_n(t)$ определена, ограничена, измерима на сегменте $[c,d]$ и при любом $t \in [c,d]$ $|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \le \frac{m}{2}\alpha^{n-1}$, $|\varphi_n(t)| \le m$.

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)). \tag{2}$$

Так как при любых n и $t \in [c,d]$ $|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \le \frac{m}{2}\alpha^{n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}$ сходится, то ряд (2) сходится на сегменте $[c,d]$ абсолютно и равномерно.

Пусть $\varphi^*(t)$ – сумма ряда (2). Тогда, учитывая, что частная сумма ряда (2) порядка n $S_n(t) = \varphi_n(t)$, и переходя к пределу в неравенстве $|\varphi_n(t)| \le m$ при $n \to \infty$, получим $|\varphi^*(t)| \le m$ при любом $t \in [c,d]$. Следовательно, вектор-функция $\varphi^*(t)$, как предел равномерно сходящейся последовательности $(\varphi_n(t))$ измеримых на сегменте $[c,d]$ вектор-функций, измерима на сегменте $[c,d]$ [3].

Убедимся, что $\varphi^*(t)$ – решение системы (1). При любом n

$$\varphi_{n+1}(\lambda) = \lambda\int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi_n(s)) + g(t,s,\eta(s,\varphi_n(s))]ds + f(t). \tag{3}$$

Докажем сначала, что возможен предельный переход под знаком интеграла в равенстве (3). С этой целью заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(s) = \varphi^*(s)$ равномерно на сегменте $[a,b]$. Следовательно, для любого числа $\varepsilon > 0$ число n_0 можно выбрать так, что при любом $n > n_0$ и любом $s \in [a,b]$ будет выполнено неравенство $|\varphi_n(s) - \varphi^*(s)| < \frac{\varepsilon}{(pL_2 + L_1L_3)(b-a)}$. Поэтому при любом $n > n_0$ и любом $t \in [c,d]$

$$\left|\int_a^b [K(t,s)(\mu(s,\varphi_n(s)) - \varphi^*(s)) + g(t,s,\eta(s,\varphi_n(s))) - g(t,s,\eta(s,\varphi^*(s)))]ds\right| \le (pL_2 + L_1L_3)\int_a^b |\varphi_n(s) - \varphi^*(s)|\,ds < \varepsilon.$$

Тогда, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (3), получим $\varphi^*(t) = \lambda\int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi^*(s)) + g(t,s,\eta(s,\varphi^*(s)))]ds + f(t)$ при любом $t \in [c,d]$ и любом λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$, то есть $\varphi^*(t)$ – ограниченное измеримое на сегменте $[c,d]$ решение системы (1).

Убедимся, что при любом фиксированном λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$ $\varphi^*(t)$ – единственное решение системы (1), удовлетворяющее неравенству $|\varphi^*(t)| \le m$ и измеримое на сегменте $[c,d]$. Заметим следующее: поскольку решение $\varphi^*(t)$ в общем случае будет зависеть от λ, то естественно его обозначить символом $\varphi_\lambda^*(t)$, $|\lambda|\le\lambda_0$.

Пусть вопреки утверждению существует число λ^* $(|\lambda^*|\le\lambda_0)$, при котором система (1) имеет решение $\psi(t)$, определённое, измеримое и удовлетворяющее неравенству $|\psi(t)|\le m$ на сегменте $[c,d]$, отличное от $\varphi_{\lambda^*}^*(t)$. Тогда при любом $t\in$ $\in[c,d]$ $|\varphi_{\lambda^*}^*(t)-\psi(t)|\le|\lambda^*|(pL_2+L_1L_3)(b-a)\times$ $\times\sup\limits_{s\in[a,b]}|\varphi_{\lambda^*}^*(s)-\psi(s)|\le|\lambda^*|(pL_2+L_1L_3)(b-a)\times$ $\times\sup\limits_{t\in[c,d]}|\varphi_{\lambda^*}^*-\psi(t)|\le\alpha\sup\limits_{t\in[c,d]}|\varphi_{\lambda^*}^*(t)-\psi(t)|$. Отсюда следует, что $\sup\limits_{t\in[c,d]}|\varphi_{\lambda^*}^*(t)-\psi(t)|\le$ $\le\alpha\sup\limits_{t\in[c,d]}|\varphi_{\lambda^*}^*(t)-\psi(t)|$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi_{\lambda^*}^*(t)$ – единственное решение системы (1) при $\lambda=\lambda^*$. Следовательно, $\varphi_\lambda^*(t)\equiv\varphi^*(t)$ – единственное решение системы (1) при λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$, определённое, измеримое, удовлетворяющее неравенству $|\varphi^*(t)|\le m$ на сегменте $[c,d]$.

В силу произвольности чисел c,d $(c<d)$, согласно определению 1, приходим к выводу, что при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ $\varphi^*(t)\in\Phi(m)$ – единственное измеримое решение системы (1), определённое на множестве R. Теорема доказана.

2. Непрерывные решения

Пусть c,d $(c<d)$ – произвольные, но фиксированные числа.

Теорема 2. Пусть:

1) матрица $K(t,s)$ и вектор-функции $g(t,s,u)$, $f(t)$ непрерывны соответственно на множествах F_1, D_1, $[c,d]$;

2) вектор-функции $\mu(t,z)$, $\eta(t,z)$ непрерывны на множестве Z.

3) выполнено неравенство $m-2\gamma>0$.

Тогда число $\lambda_0>0$ можно выбрать так, что при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ система (1) будет иметь единственное решение, принадлежащее множеству $\Phi(m)$ непрерывных на множестве R вектор-функций.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что матрица $K(t,s)$, вектор-функции $g(t,s,u)$, $\mu(t,z)$, $\eta(t,z)$ равномерно непрерывны соответственно на множествах F_1, D_1, Z. Следовательно, для любой вектор-функции $\varphi(s)\in\Phi(m)$ вектор-функции $K(t,s)\mu(s,\varphi(s))$, $g(t,s,\eta(s,\varphi(s))$ равномерно непрерывны на множествах F_1. Это значит, что непрерывными на сегменте $[c,d]$ являются вектор-функции $\int\limits_a^b K(t,s)\mu(s,\varphi(s))ds$, $\int\limits_a^b g(t,s,\eta(s,\varphi(s))ds$ и, следовательно, вектор-функция

$$\lambda[\int\limits_a^b K(t,s)\mu(s,\varphi(s))+g(t,s,\eta(s,\varphi(s)))]ds+f(t).$$

Доказательство существования непрерывного решения системы (1) проводится методом последовательных приближений (см. доказательство теоремы 1).

3. Почти периодические решения

Определение 3 [4]. Фиксируем $(i,j)=\overline{1,n}$. Непрерывная на множестве F функция $K_{i,j}(t,s)$ (непрерывная на D функция $g_i(t,s,u)$) называется почти периодической по t равномерно по $s\in[a,b]$ (по $(s,u)\in[a,b]\times\{u:|u|\le r\}$), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $l>0$ такое, что для любого числа $a\in R$ на сегменте $[a,a+l]$ существует число τ (ε – почти период), при котором выполняется неравенство $|K_{i,j}(t+\tau,s)-$ $-K_{i,j}(t,s)|<\varepsilon$ на множестве $R\times[a,b]$ $(|g_i(t+\tau,s,$ $u)-g_i(t,s,u)|<\varepsilon$ на множестве $R\times[a,b]\times\{u:|u|\le$ $\le r\})$.

Аналогично с естественным изменением определяется почти периодичность в функции $f_i(t)$.

Матрица $K(t,s)$, вектор-функция $g(t,s,u)$, $f(t)$, все элементы которых – почти периодические функции согласно определению 3, называются почти периодическими. Можно убедиться [4], что существует общий ε-почти период функций $K_{i,j}(t,s)$, $g_i(t,s,u)$, $f_i(t)$ при любых $(i,j)=\overline{1,n}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, если матрица $K(t,s)$ и вектор-функции $g(t,s,u)$, $f(t)$ почти периодические, то число $\lambda_0>0$ можно выбрать так, чтобы при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ система (1) имела единственное почти периодическое решение, принадлежащее множеству $\Phi(m)$ почти периодических функций.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что для любых $i=\overline{1,n}$ и для любых вектор-функций $\varphi(s)\in\Phi(m)$ при любом $s\in[a,b]$ $\sum\limits_{j=1}^n K_{ij}(t,s)\mu_j(s,\varphi(s))$, $g_i(t,s,\eta(s,\varphi(s))$. Следовательно, и функция $\sum\limits_{j=1}^n K_{ij}(t,s)\mu_j(s,\varphi(s))+g_i(t,s,$

$\varphi(s))$ – почти периодическая по t на множестве R равномерно по $s \in [a,b]$. Тогда непосредственно путем вычисления устанавливаем, что

$$\int_a^b (\sum_{j=1}^n K_{ij}(t,s)\mu_j(s,\varphi(s)) + g_i(t,s,\eta(s,\varphi(s)))ds$$

также почти периодическая функция. Это значит, что $\int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi(s)) + g(t,s,\eta(s,\varphi(s)))]ds + f(t)$ – почти периодическая вектор-функция.

Доказательство существования почти периодического решения системы (1) проведём методом последовательных приближений.

Нулевое приближение $\varphi_0(t)$ определим равенством $\varphi_0(t) = 0$. Первое приближение $\varphi_1(t)$ определим как $\varphi_1(t) = \lambda\int_a^b [K(t,s)\mu(s,0) + g(t,s,\eta(s,0)]ds + f(t)$ и получим, что $\varphi_1(t)$ – почти периодическая вектор-функция и $|\varphi_1(t)| \le |\lambda|(Pw_1 + v)(b-a) + \gamma$ в силу вышепринятых предположений. Тогда, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1, получим, что для любого λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$ (λ_0 определено в процессе доказательства теоремы 1) $|\varphi_1(t)| \le \frac{m}{2}$ и, следовательно, $\varphi_1(t)$ удовлетворяет включению $\varphi_1(t) \in \Phi(m)$.

Второе приближение $\varphi_2(t)$ определим равенством $\varphi_2(t) = \lambda\int_a^b [K(t,s)\mu(s,\varphi_1(s)) + g(t,s,\eta(s,\varphi_1(s)))]ds + f(t)$. Получим, что при любом λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$ $|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \le \frac{m}{2}\alpha$, $\varphi_2(t) \le m$ и, следовательно, $\varphi_2(t) \in \Phi(m)$.

Продолжив и так далее, получим последовательность $(\varphi_n(t))$, в которой при любом n $\varphi_n(t)$ – почти периодическая вектор-функция, удовлетворяющая включению $\varphi_n(t) \in \Phi(m)$.

Устанавливается, что функциональный ряд (2) и, следовательно, последовательность $|\varphi_n(t)|$ равномерно на множестве R сходятся к некоторой вектор-функции $\varphi^*(t)$, удовлетворяющей неравенству $|\varphi^*(t)| \le m$. Вектор-функция $\varphi^*(t)$, как предел равномерно сходящейся последовательности почти периодических вектор-функций [4], является почти периодической вектор-функцией и поэтому $\varphi^*(t) \in \Phi(m)$.

Доказательство того, что $\varphi^*(t)$ – решение системы (1) и при любом значении параметра λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$ система (1) имеет единственное почти-периодическое решение, принадлежащее множеству $\Phi(m)$, аналогично доказательству теоремы 1.

4. Периодические решения

Теорема 4. Если матрица $K(t,s)$ и вектор-функция $g(t,s,u)$, $f(t)$ – w-периодические по t, то любое решение системы (1), определённое на множестве R, является w-периодическим решением этой системы.

Справедливость утверждения следует из того, что для любого решения $\varphi(t)$ системы (1), при любом $t \in R$ $\varphi(t+w) - \varphi(t) = \lambda\int_a^b \{[K(t+w,s) - K(t,s)]\mu(s,\varphi(s)) + [g(t+w,s,\eta(s,\varphi(s))) - g(t,s,\eta(s,\varphi(s)))]\}ds = 0$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теорем 1 и 4. Тогда число $\lambda_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы при любом λ $(|\lambda| \le \lambda_0)$ система (1) имела единственное решение, принадлежащее множеству $\Phi(m)$ w-периодических вектор-функций.

Справедливость теоремы непосредственно следует из теорем 1 и 4.

5. Решения двухточечной краевой периодической задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений вида

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^t [K(t,s),\varphi(s) + g(t,s,\varphi(s))]ds + \sigma f(t), \quad (4)$$

в котором σ – постоянный вектор, $f(t)$ – скалярная функция. Введем следующие обозначения: $V\{(t,s): t \in [a,w], s \in [a,t]\}$, $W = \{(t,s,u): t \in [a,w], s \in [a,t]\}, u \in E_n, |u| \le r\}$, $V_1 = \{(s,u): s \in [a,w], u \in E_n, |u| \le r\}$, $M_{[a,w]}$ – множество вектор-функций $\varphi(t)$, определённых на сегменте $[a,w]$, $H(r) = \{\varphi(t) \in M_{[a,w]} : |\varphi(t)| \le r$ при любом $t \in [a,w]\}$.

Будем полагать, что на множествах V и W определены соответственно матрица $K(t,s)$ и вектор-функция $g(t,s,u)$, на сегменте $[a,w]$ определена функция $f(t)$, $\sigma \in E_n$.

Теорема 6. Пусть:

1) матрица $K(t,s)$ на множестве V измерима и удовлетворяет неравенству $\|K(t,s)\| \le p$, p – некоторое число;

2) вектор-функция $g(t,s,u)$ на множестве W при любом фиксированном u ($|u| \le r$) измерима, при любых фиксированных (t,s) непрерывна по u, $|g(t,s,u)| < v$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, v, L – некоторые числа;

3) на множестве $[a,w]$ функция $f(t)$ измерима и удовлетворяет неравенству $|f(t)|\le\gamma$, $\gamma>0$ – некоторое число;

4) выполняется неравенство $r-\sigma_0\gamma>0$, $\sigma_0>0$ – некоторое число.

Тогда существует число $\lambda_0>0$ такое, что при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ система (4) имеет единственное решение, принадлежащее множеству $H(r)$ вектор-функций, измеримых на сегменте $[a,w]$.

Доказательство. На множестве $\{(t,s):t\in\in[a,w],\ s\in[t,w]\}$ матрицу $K(t,s)$ и вектор-функцию $g(t,s,u)$ при любом $u\,(|u|\le r)$ определим согласно равенствам $K(t,s)\equiv 0,\ \ g(t,s,u)\equiv 0.$ Получим, что матрица $K(t,s)$ и вектор-функция $g(t,s,u)$ при любом фиксированном $u\,(|u|\le r)$ измеримы на множестве $P=\{(t,s):\ t\in[a,w],$ $s\in[a,w]\}$, вектор-функция $g(t,s,u)$ непрерывна по u при любых фиксированных $(t,s)\in P.$ Тогда, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1, убедимся, что вектор-функция $\int_a^w[K(t,s)\varphi(s)+g(t,s,\varphi(s))]ds+\sigma f(t)$ и, следовательно, вектор-функция $\int_a^t[K(t,s)\varphi(s)+$ $+g(t,s,\varphi(s))]ds+\sigma f(t),$ ограничены измеримы на множестве $[a,w]$.

Доказательство существования измеримого решения системы (4) проведем методом последовательных приближений.

За нулевое приближение примем $\varphi_0(t)=0.$ Первое приближение $\varphi_1(t)$ определим равенством $\varphi_1(t)=\lambda\int_a^t g(t,s,0)ds+\sigma f(t).$ Получим $|\varphi_1(t)|\le|\lambda|\times$ $\times\int_a^t\left|g(t,s,0)\right|ds+|\sigma|\gamma\le|\lambda|\nu(t-a)+\left|\sigma\right|\gamma\le\left|\lambda\right|\nu(w-a)+$ $+\left|\sigma\right|\gamma.$

Пусть $$\lambda_0=\min\{\frac{r-\sigma_0\gamma}{\nu(w-a)},\frac{r-\sigma_0\gamma}{(p+L)(w-a)r}\}.$$ Тогда при любых $\sigma\in(0,\sigma_0)$ λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$, $t\in[0,w]$ $$|\varphi_1(t)|\le\frac{r-\sigma_0\gamma}{\nu(w-a)}\nu(w-a)+|\sigma|\gamma\le r-\sigma_0\gamma+\sigma_0\gamma=r.$$

Второе приближение $\varphi_2(t)$ определим как $\varphi_2(t)=\lambda\int_a^t[K(t,s)\varphi_1(s)+g(t,s,\varphi_1(s))]ds+\sigma f(t),$ получим $|\varphi_2(t)|\le|\lambda|\left|\int_a^t|K(t,s)\varphi_1(s)+g(t,s,\varphi_1(s))|\,ds\right.+$ $+|\sigma|\gamma\le|\lambda|(p+L)(t-a)r+|\sigma|\gamma\le\frac{r-\sigma_0\gamma}{r(p+L)(w-a)}\times$ $\times(p+L)(w-a)r+\sigma_0\gamma\le r.$ Кроме того, при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ $|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\le|\lambda|\left|\int_a^t|K(t,s)\varphi_1(s)+g(t,\right.$ $s,\varphi_1(s))-g(t,s,0)|\le|\lambda|(pr+Lr)(t-a)\le\lambda_0 r(p+L)(t-$ $-a)\le\lambda_0 r(p+L)(w-a).$

Третье приближение $\varphi_3(t)$ определим равенством $\varphi_3(t)=\lambda\int_a^t[K(t,s)\varphi_2(s)+g(t,s,\varphi_2(s))]ds+$ $+\sigma f(t).$ Получим $|\varphi_3(t)|\le\left|\lambda_0\right|(p+L)r(t-a)+\left|\sigma\right|\gamma\le$ $\le\frac{r-\sigma_0\gamma}{(p+L)(w-a)r}(p+L)r(w-a)+\sigma_0\gamma\le r$ при любом $|\sigma|\in(0,\sigma_0)$, λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ и $t\in[a,w]$; $|\varphi_3(t)-$ $-\varphi_2(t)|\le|\lambda|\left|\int_0^t|[K(t,s)\varphi_2(s)+g(t,s,\varphi_2(s))-K(t,s)\times\right.$ $\times\varphi_1(s)-g(t,s,\varphi_1(s)]|\,ds\ \ \le\ \ |\lambda|(p+L)\int_a^t|\varphi_2(s)-$ $-\varphi_1(s)|\,ds\le\lambda_0^2(p+L)^2r\int_a^t(\xi-a)d\xi=\lambda_0^2(p+L)\times$ $\times\frac{(t-a)^2}{2!}r\le\lambda_0^2(p+L)^2r\frac{(w-a)^2}{2!}.$

Продолжая этот процесс далее, получим при любом n $|\varphi_n(t)|\le r,$ $|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\le\lambda_0^{n-1}(p+$ $+L)^{n-1}r\frac{(w-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$

Рассмотрим функциональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)).\qquad(5)$$

Учитывая, что при любых $n,$ $t\in[a,w]$ $|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\le\lambda_0^{n-1}(p+L)^{n-1}r\frac{(w-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_0^{n-1}(p+L)^{n-1}r\frac{(w-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ сходится, получим, что ряд (5) равномерно и абсолютно сходится на сегменте $[a,w]$.

Пусть $\overline{\varphi}(t)$ – сумма ряда (5). Частная сумма ряда (5) порядка n $S_n(t)=\varphi_n(t)$. Следовательно, $\overline{\varphi}(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t).$ Переходя к пределу в неравенстве $|\varphi_n(t)|\le r$ при $n\to\infty$, получим, что при любом $t\in[a,w]$ $\left|\overline{\varphi}(t)\right|\le r.$

Убедимся, что при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ $\overline{\varphi}(t)$ – единственное измеримое решение системы (4), удовлетворяющее неравенству $|\overline{\varphi}(t)|\le r$.

Пусть вопреки утверждению существует λ_1 $(|\lambda_1|\le\lambda_0)$ такое, что при $\lambda=\lambda_1$ система (4) имеет два различных решения $\varphi^*(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие соответственно неравенствам $|\varphi^*(t)|\le r$, $|\psi(t)|\le r$ при любом $t\in[a,w]$. Тогда, полагая $\overline{\mu}(t)=\varphi^*(t)-\psi(t)$, получим

$$|\overline{\mu}(t)|\le|\lambda_1|(p+L)\int_a^t|\overline{\mu}(\xi)|d\xi \qquad (6)$$

и $|\overline{\mu}(t)|\le|\lambda_1|(p+L)\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|(t-a)\le|\lambda_1|(p+L)\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|(w-a)$. Это значит, что, согласно неравенству (6), $|\overline{\mu}(t)|\le|\lambda_1|(p+L)\int_a^t|\lambda_1|(p+L)\times\max\limits_{t\in[a,w]}|\mu(t)|(\xi-a)d\xi=|\lambda_1|^2(p+L)^2\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|\times\frac{(t-a)^2}{2!}\le|\lambda_1|^2(p+L)^2\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|\frac{(w-a)^2}{2!}$. Аналогично согласно неравенству (6) получим $|\overline{\mu}(t)|\le|\lambda_1|(p+L)\int_a^t|\lambda_1|^2(p+L)^2\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|\times\frac{(\xi-a)^2}{2!}d\xi\le|\lambda_1|^3(p+L)^3\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|\frac{(t-a)^3}{3!}\le$ $\le|\lambda_1|^3(p+L)^3\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|\frac{(w-a)^3}{3!}$. Продолжая этот процесс, при любом натуральном n и любом $t\in[a,w]$ получим $|\overline{\mu}(t)|\le|\lambda_1|^n(p+L)^n\frac{(w-a)^n}{n!}\times\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|$. Следовательно, $\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|\le|\lambda|^n\times(p+L)^n\frac{(w-a)^n}{n!}\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|$ [4].

Учитывая, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_1|^n(p+L)^n\times\frac{(w-a)^n}{n!}\max\limits_{t\in[a,w]}|\overline{\mu}(t)|$ сходится, получим, что существует натуральное число n_0, удовлетворяющее неравенству $|\lambda_1|^{n_0}(p+L)^{n_0}\frac{(w+a)^n}{n_0!}<1$. Это значит $\max\limits_{[a,w]}|\overline{\mu}(t)|<\max\limits_{[a,w]}|\overline{\mu}(t)|$, что невозможно. Следовательно, при любом λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$ система (4) имеет единственное решение, принадлежащее множеству $H(r)$ измеримых на сегменте $[a,w]$ вектор-функций. Теорема доказана.

Определим условия существования решения двухточечной краевой периодической задачи системы (4) в предположении, что $K(t,s)$ – нулевая матрица. Для простоты рассуждений предположим, что $a=0$. Система (4) примет вид

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^t g(t,s,\varphi(s))ds+\sigma f(t). \qquad (7)$$

Теорема 6 определяет условия существования измеримого на сегменте $[0,w]$ решения системы (7).

Пусть $\varphi(t)$ – измеримое решение системы (7), выполнены условия теоремы 6, λ – фиксированное число.

Ставится задача: найти условия, при которых система (7) имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям $\varphi(w)=\varphi(0)$, то есть условия существования решения краевой двухточечной периодической задачи системы (7).

Найдем условия представления решения $\varphi(t)$ в виде $\varphi(t)=\sigma f(t)+o(|\sigma|)$.

Теорема 7. Если на множестве W $\lim\limits_{u\to0}g(t,s,u)/|u|=0$ равномерно по $(t,s)\in[0,w]$, то решение $\varphi(t)$ системы (7) на множестве $[0,w]$ представимо в виде $\varphi(t)=\sigma f(t)+\lambda o(|\sigma|)$.

Доказательство. При любом $t\in[0,w]$ $|\varphi(t)|\le$ $\le|\lambda|\int_0^t|g(t,s,\varphi(s))|ds+|\sigma||f(t)|\le|\sigma|\gamma+|\lambda|L\int_0^t|\varphi(s)|ds.$ Отсюда согласно лемме Гроноулла – Беллмана [5] следует, что при любом $t\in[0,w]$ $|\varphi(t)|\le$ $\le|\sigma|\gamma\exp\int_0^t|\lambda|Ld\xi\le|\sigma|\gamma\exp|\lambda|Lw$. Следовательно: 1) $\lim\limits_{\sigma\to0}\varphi(t)=0$ равномерно по $t\in[0,w]$ и λ $(|\lambda|\le\lambda_0)$; 2) $\frac{|\varphi(t)|}{|\sigma|}$ ограничено на множество $[0,w]\times\{\sigma:|\sigma|\le\sigma_0\}$. Тогда согласно условиям теоремы $\lim\limits_{\sigma\to0}\left|\frac{\int_0^t g(t,s,\varphi(s))ds}{|\sigma|}\right|\le\lim\limits_{\delta\to0}\int_0^w\frac{|g(t,s,\varphi(s))|}{|\varphi(s)|}\times\frac{|\varphi(s)|}{|\delta|}ds=0$ равномерно $t\in[0,w]$, то есть $\int_0^t g(t,s,\varphi(s))ds=o(|\sigma|)$ (если число $s_1\in[0,w]$ такое, что $\varphi(s_1)=0$, то выражение $\dfrac{g(t,s_1,\varphi(s_1))}{|\varphi(s_1)|}$ доопределяется согласно равенству $\dfrac{g(t,s_1,\varphi(s_1))}{|\varphi(s_1)|}=0$). Учитывая равенство (7), получим $\varphi(t)=\sigma f(t)+\lambda o(|\sigma|)$. Теорема доказана.

Поскольку параметр λ фиксирован, то далее без потери общности будем считать, что $\lambda o(|\sigma|)= = o(|\sigma|)$.

Предположим, что на множестве W вектор-функция $g(t,s,u)$ представлена равенством $g(t,s, u)=g_k(t,s,u)+o(|u|^k)$, в котором $k\geq 2$, $g_k(t,s, u)$ – вектор-форма порядка k относительно u, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{o(|u|^k)}{|u|^k}=0$ равномерно относительно $(t,s)\in \in[0,w]$. Учитывая, что $\varphi(t)=\sigma f(t)+o(\sigma)$, получим $\varphi(t)=\sigma f(t)+\lambda\int\limits_0^t g_k(t,s,\sigma f(s))ds+\lambda o(|\sigma|^k)$. Полагая, что $f(w)=f(0)$, получим $\varphi(w)-\varphi(0)=0$ тогда и только тогда, когда

$$g_k^*(\sigma)+o(|\sigma|^k)=0, \tag{8}$$

где $g_k^*(\sigma)=\int\limits_0^w g_k(w,s,\sigma f(s))$ – вектор-форма порядка k. Следовательно, задача нахождения условий существования решения $\varphi(t)$ системы (7), удовлетворяющего равенству $\varphi(w)=\varphi(0)$, свелась к задаче разрешимости системы (8).

В системе (8) сделаем замену переменных $\sigma=\rho e$, $\rho>0$, $e-n$-мерный вектор. Получим

$$g_k^*(e)+o(\rho,e)=0. \tag{9}$$

Пусть $S=\{e\in E_n : e=1\}$.

Теорема 8. Если при любом $e\in S$ $g_k^*(e)\neq 0$, то существует число $\rho^*>0$ такое, что при любых $\rho\in(0,\rho^*]$, $e\in S$ вектор $\sigma=\rho e$ не является решением системы (8), а вектор-функция $\varphi(t)=\rho e f(t)+\lambda o(\rho,|e|)$ не является решением краевой двухточечной периодической задачи.

Доказательство. Функция $|g_k^*(e)|$ на множестве S определена, непрерывна и при любом $e\in S$ $|g_k^*(e)|>0$. Тогда по теореме Вейерштрасса существует число $m>0$, удовлетворяющее неравенству $|g_k^*(e)|\geq m$ при любом $e\in S$.

Из того, что $\lim\limits_{\rho\to 0}O(\rho)=0$ $(|e|=1)$, следует: число $\rho^*>0$ можно выбрать так, что при любых $\rho\in(0,\rho^*]$, $e\in S$ $|O(\rho)|<\dfrac{m}{2}$ и, следовательно, $|g_k^*(e)+O(\rho)|\geq\big||g_k^*(e)|-|O(\rho)|\big|\geq\dfrac{m}{2}$. Это значит, что вектор-функция $\varphi(t)=\rho e f(t)+\lambda O(\rho,|e|)$ при любых $\rho\in(0,\rho^*]$, $e\in S$ и λ $(|\lambda|\leq\lambda_0)$ удовлетворяет неравенству $\varphi(w)\neq\varphi(0)$. Теорема доказана.

Пусть существует вектор $e^*\in S$ такой, что $|g_k^*(e^*)|=0$. Тогда, учитывая, что $g_k^*(e)$ – вектор-форма, $g_k^*(e)$ в окрестности e^* можно представить равенством $g_k^*(e)=\overline{D}(e^*)(e-e^*)+\sum\limits_{i=2}^k P_i(e^*; e-e^*)$, в котором $\overline{D}(e^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $g_k^*(e)$ в точке e^*; при любом $i=\overline{2,k}$ $P_i(e^*,e-e^*)$ – вектор-форма порядка i относительно $e-e^*$.

Для простоты записей введем обозначение $e-e^*=\tau$. Тогда система (9) примет вид

$$\overline{D}(e^*)\tau+\sum_{i=2}^k P_i(e;\tau)+O(\rho,|e|)=0. \tag{10}$$

Теорема 9. Если $\det D(e^*)\neq 0$, то существует окрестность точки $\sigma=0$, содержащая ненулевое решение системы (8).

Доказательство. Пусть $\Delta\in(0,1)$ – некоторое число. Тогда при любом τ $(|\tau|\leq\Delta)$ $|e|=|e^*+\tau|\leq \leq 1+\Delta$ и $|e|\geq 1-\Delta>0$. Это значит, что на множестве $T(\Delta)=\{\tau\in E_n : |\tau|\leq\Delta\}$ вектор-функция $e= =e^*+\tau$ ограничена и отлична от нуля.

Систему (10) запишем в виде $\tau=-\overline{D}^{-1}(e^*)\times \times[\sum\limits_{i=2}^k p_i(e^*;\tau)+O(p,|e|)]$. Оператор Γ определим равенством $\Gamma\tau=-\overline{D}^{-1}(e^*)[\sum\limits_{i=2}^k p_i(e^*;\tau)+O(p,|e|)$.

Из свойств вектор-функции $P_i(e^*;\tau)$ следует, что $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\sum_{i=2}^k P_i(e^*;\tau)}{|\tau|}=0.$ Следовательно, существует число $\delta_1\in(0,\Delta]$ такое, что при любом $\tau\in T(\delta_1)$ $|\sum\limits_{i=2}^k P_i(e^*;\tau)|<\dfrac{|\tau|}{2}\leq\dfrac{\delta_1}{2}$.

В силу ограниченности вектор-функции $e = e^* + \tau$ на множестве $T(\Delta)$ получим, что $\lim_{\rho\to 0} O(\rho,|e|) = 0$ равномерно относительно $\tau \in T(\Delta)$. Поэтому существует число $\rho^* > 0$ такое, что при любых $\rho \in (0,\rho^*]$, $\tau \in T(\delta_1)$ выполняется неравенство $|O(\rho,|e|)| < \frac{\delta_1}{2}$. Таким образом, при любом $\tau \in T(\delta_1)$ и любом фиксированном $\rho \in (0,\rho^*]$ $|\Gamma\tau| < \delta_1$. Из определения оператора Γ следует его непрерывность на множестве $T(\delta_1)$. Следовательно, оператор Γ на множестве $T(\delta_1)$ имеет неподвижную точку при любом фиксированном $\rho \in (0,\rho^*]$.

Фиксируем $\overline{\rho} \in (0,\rho^*]$, тогда существует точка $\overline{\tau} \in T(\delta_1)$, удовлетворяющая равенству $\Gamma\overline{\tau} = \overline{\tau}$. Отметим, что $\overline{e} = (e^* + \overline{\tau}) \neq 0$. Это значит, что $\overline{\sigma} = \overline{\rho}\overline{e} = \overline{\rho}(e^* + \overline{\tau})$ – ненулевое решение системы (8), а $\varphi(t) = \overline{\rho}\overline{e}f(t) + \lambda O(\overline{\rho},|\overline{e}|)$ – ненулевое решение системы (7). Теорема доказана.

Предположим, что $rangD(e^*) = \overline{r}$, $0 \le \overline{r} < n$. Тогда элементарными преобразованиями систему (10) можно свести к системе

$$\begin{aligned} &\overline{D}_1(e^*)\tau + \sum_{i=2}^{k}\overline{P}_i(e^*,\tau) + \overline{O}(\rho,|e|) = 0,\\ &\sum_{i=2}^{k}\overline{\overline{P}}_i(e^*,\tau) + \overline{\overline{O}}(\rho,|e|) = 0, \end{aligned} \qquad (11)$$

в которой $\overline{D}_1(e^*)$ – $\overline{r}\times n$-матрица, $rang\overline{D}_1(e^*) = \overline{r}$.

Предположим, что существует число $j \in \{2,...,k\}$ такое, что при любом $i < j$ $\overline{\overline{P}}_i(e^*,\tau) \equiv 0$, $\overline{\overline{P}}_j(e^*,\tau) \not\equiv 0$. Тогда систему (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\overline{D}_1(e^*)\tau + \sum_{i=2}^{k}\overline{P}_j(e^*,\tau) + \overline{O}(\rho,|e|) = 0,\\ &\overline{\overline{P}}_i(e^*,\tau) + O(|\tau|^j) + \overline{\overline{O}}(\rho,|\overline{e}|) = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Заменой переменных $\tau = \rho_1\xi$, $\rho_1 > 0$, систему (12) сведем к системе

$$\begin{aligned} &\overline{D}_1(e^*)\xi + O^*(\rho_1,|\xi|) + \frac{1}{\rho_1}\overline{O}(\rho,|e|) = 0,\\ &\overline{P}_j(e^*,\xi) + O^*(\rho_1,|\xi|) + \frac{1}{\rho_1}\overline{\overline{O}}(\rho,|e|) = 0, \end{aligned} \qquad (13)$$

в которой $\lim_{\rho_1\to 0} O^*(\rho_1,|\xi|) = 0$, $\lim_{\rho_1\to 0} O^{**}(\rho_1,|\xi|) = 0$ при фиксированном ξ.

Пусть $S_1 = \{\xi \in \xi_n : |\xi| = 1\}$.

Теорема 10. Если при любом $\xi \in S_1$ $colon(\overline{D_1}(e^*),\xi)$, $\overline{P}_j(e^*,\xi)) \neq 0$, то в любой окрестности точки $\sigma = 0$ существует множество, в котором нет решений системы (8).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8, устанавливается, что существуют числа $\rho^* > 0$, $\rho_1^* > 0$ такие, что при любом $\rho \in (0,\rho^*]$, любом фиксированном $\rho_1 \in (0,\rho_1^*]$ и любом $\xi \in S_1$

$$\left|\overline{P}_j(e^*,\xi) + O^{**}(\rho_1,|\xi|) + \frac{1}{\rho_1}\overline{\overline{O}}(\rho,|e|)\right| > 0.$$

Таким образом, необходимым условием существования ненулевого решения системы (8) является наличие точки $\xi^* \in S_1$, удовлетворяющей равенству $colon(\overline{D_1}(e^*),\xi^*,\overline{p_j}(e^*,\xi^*)) = 0$.

Вектор-форму $\overline{P}_j(e^*,\xi)$ в окрестности точки ξ^* представим равенством $\overline{P}_j(e^*,\xi) = \overline{D}_2(\xi^*)(\xi - \xi^*) + \sum_{i=2}^{j}Q_i(\xi^*,\xi-\xi^*)$, в котором $\overline{D}_2(\xi^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $\overline{P}_j(e^*,\xi)$ в точке ξ^*, при любом $i = \overline{2,j}$ $Q_i(\xi^*,\xi-\xi^*)$ – вектор-форма порядка i относительно $\xi - \xi^*$. Положим, что $\xi - \xi^* = \overline{u}$, $|\overline{u}| \le \Delta$, $\Delta \in (0,1)$, и систему (13) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\overline{D}_1(e^*)\overline{u} + O^*(\rho_1,|\xi|) + \frac{1}{\rho_1}\overline{O}(\rho,|e|) = 0,\\ &\overline{D}_2(\xi^*)\overline{u} + \sum_{i=2}^{j}Q_i(\xi^*,\overline{u}) + O^{**}(\rho_1,|\xi|) +\\ &+\frac{1}{\rho_1}\overline{\overline{O}}(\rho,|e|) = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Пусть

$$\overline{R} = colon(\overline{D}_1(e^*),\overline{D}_2(\xi^*)),\ colon(0,\sum_{i=2}^{j}Q_i(\xi^*,u)) =$$

$$= \sum_{i=2}^{j}Q_i^*(\xi^*;\overline{u}),\ colon(O^*(\rho_1,|\xi|),\ O^{**}(\rho_1,|\xi|)) =$$

$$= O(\rho_1,|\xi|),\ colon(\overline{O}(\rho,|e|),\overline{\overline{O}}(\rho,|e|)) = O(\rho,|e|).$$

Систему (14) можно записать следующим образом:

$$\overline{R}\overline{u} + \sum_{i=2}^{j}Q_i^*(\xi,\overline{u}) + O(\rho_1,|\xi|) + \frac{1}{\rho_1}O(\rho,|e|) = 0. \qquad (15)$$

Теорема 11. Если $\det\overline{R} \neq 0$, то существует окрестность точки $\sigma = 0$, в которой содержится ненулевое решение системы (8).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9, при этом следует учесть, что

$$\lim_{\bar{u}\to 0}\Big(\sum_{i=2}^{j} Q_i^*(\xi^*;\bar{u})\Big)/(|\bar{u}|=0,\ \lim_{\rho_1\to 0} O(\rho_1,|\xi|))=0$$

равномерно относительно $\xi\in\{\xi\in E_n:\xi=\xi^*+\tau\}$, при любом фиксированном $\rho_1\neq 0$ $\lim_{\rho\to 0} O(\rho,|e|)\frac{1}{\rho_1}=0$ равномерно относительно $e\in\{e\in E_n: e=e^*+\tau\}$.

Пусть $rang\,\bar{R}=\bar{r}_1$, $0\le\bar{r}_1<n$. Очевидно, что $\bar{r}_1\ge r$. Элементарными преобразованиями систему (15) сведем к системе

$$\begin{aligned}&\bar{R}_1u+O(|\bar{u}|)+O_1(\rho_1,|\xi|)+\frac{1}{\rho_1}O_1(\rho,|e|)=0,\\&\sum_{i=2}^{j}\bar{Q}_i(\xi^*;\bar{u})+O_2(\rho_1,|\xi|)+\frac{1}{\rho_1}O_2(\rho,|e|)=0.\end{aligned}\qquad(16)$$

Полагая, что существует число $j_1\in\{2,...,\ j\}$ такое, что при $i<j_1$ $\bar{Q}_i(\xi,\bar{u})\equiv 0$, при $i=j_1$ $\bar{Q}_{j1}(\xi,\bar{u})\equiv 0$, систему (16) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\bar{R}_1u+O(|\bar{u}|)+O_1(\rho_1,|\xi|)+\frac{1}{\rho_1}O_1(\rho,|e|)=0,\\&\bar{Q}_{j_1}(\xi^*;\bar{u})+O_2(\rho_1,|\xi|)+\frac{1}{\rho_1}O_2(\rho,|e|)=0.\end{aligned}\qquad(17)$$

Заменой переменных $\bar{u}=\rho_2\theta$, $\rho_2>0$ систему (17) сведем к системе

$$\begin{aligned}&\bar{R}_1\theta+O(\rho_2,|\bar{\theta}|)+\frac{O_1(\rho_1,|\xi|)}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_1\rho_2}O_1(\rho,|e|)=0,\\&\bar{Q}_{j_1}(\xi^*;\theta)+\frac{1}{\rho_2}O_2(\rho_1,|\xi|)+\frac{1}{\rho_1\rho_2}O_2(\rho,|e|)=0.\end{aligned}\qquad(18)$$

Теорема 12. Если при любом θ $(|\theta|=1)$ $colon(\bar{R}_{1\theta},\bar{Q}_{j1}(\xi^*,\theta))\neq 0$, то в любой окрестности точки $\sigma=0$ существует множество, в котором нет решения системы (8).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10 (с соответствующими пояснениями).

Пусть существует θ^* $(|\theta^*|=1)$ такое, что $colon(\bar{R}_1\theta^*,\ \bar{Q}_{j_1}(\xi^*,\theta^*))=0$. В окрестности точки θ^* вектор-функцию $\bar{Q}_{j_1}(\xi^*,\theta)$ представим равенством

$$\bar{Q}_{j_1}(\xi^*,\theta)=\bar{R}_2(\theta^*)(\theta-\theta^*)+\sum_{i=2}^{j_1}\bar{\bar{Q}}_i(\theta^*,\theta-\theta^*),$$

в котором $\bar{R}_2(\theta^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $\bar{Q}_{j_1}(\xi^*,\theta^*)$ в точке θ^*, при любом $i=\overline{2,j_1}$ $\bar{\bar{Q}}_i(\theta^*,\theta-\theta^*)$ – вектор-форма порядка i относительно $\theta-\theta^*$. Тогда, полагая $\theta-\theta^*=v$, систему (18) можно записать в виде системы (14). Если $\det[colon(R_1,R_2(\theta^*))]\neq 0$, то будет справедлива теорема, аналогичная тереме 11. Если же $rang\,R_2=r_2$ $(0\le r_2<n,\ r_2\ge r_1)$, то процесс определения условий существования (или отсутствия) ненулевого решения системы (8) продолжается. И так далее. В результате продолжения указанного процесса получим на конечном шаге либо систему, для которой выполнены условия, аналогичные условиям теоремы 10, либо систему, для которой выполнены условия, аналогичные условиям теоремы 11, (на этом процесс определения условий существования (отсутствия) ненулевого решения системы (8) заканчивается), либо процесс продолжается неограниченно. В этом случае указанным методом проблема определения условий существования (отсутствия) ненулевого решения системы (8) не может быть разрешима.

Замечание:

1) при $\bar{r}=0$ система (11) совпадает с системой $\sum_{i=2}^{k}p_i(e^*,\tau)+O(p,|e|)=0$, к исследованию которой применим изложенный в работе метод;

2) все утверждения остаются в силе, если в системе (4) слагаемое $\sigma f(t)$ заменить $F(t)\sigma$, $F(t)$ – $n\times n$-матрица, $\|F(t)\|\le\gamma$ при любом $t\in[a,w]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красносельский М.А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 390 с.
2. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 2. – 415 с.
3. **Натансон И.П.** Теория Функций вещественной переменной. – М.:Гостехиздат,1957. – 552 с.
4. **Михлин С.**Г. Лекции линейным интегральным уравнениям. – М.: Гостехиздат, 1959. – 232 с.
5. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Терехин Михаил Тихонович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru