УДК 517.9

АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВЫНУЖДЕННЫХ И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

С.Н. Петрова, А.С. Мулкиджан
Уральский государственный экономический университет,
Московский государственный университет путей сообщения

ANALYSIS OF QUALITATIVE PROPERTIES OF CERTAIN CLASSES OF DYNAMIC SYSTEMS IN THE PRESENCE OF FORCED AND FREE OSCILLATIONS

S.N. Petrova, A.S. Mulkidzhan

Изучены качественные свойства нелинейных динамических систем при наличии вынужденных и свободных колебаний. Рассмотрен вопрос о параметрических колебаниях для дифференциальных уравнений второго порядка. Проанализирована устойчивость в смысле Н.Е. Жуковского свободных колебаний уравнения Дуффинга.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, параметрические колебания, свободные колебания, устойчивость.

Qualitative properties of nonlinear dynamic systems in the presence of forced and free fluctuations are studied. The question of parametrical oscillations for second order differential equations is considered. Stability of free fluctuations of the Duffing equation in the sense of N.E. Zhukovsky is analysed.

Keywords: nonlinear dynamical system, parametrical oscillations, free oscillations, stability.

Анализ качественных свойств динамических систем с колебательными режимами проводился в [1–6] и др. Основными методами исследования устойчивости и других свойств являются методы А.М. Ляпунова и их модификации [6]. Методы анализа устойчивости в смысле Н.Е. Жуковского разрабатывались в ряде работ, в том числе [8–14], в которых в качестве аналога первого метода Ляпунова предложен метод показателей Жуковского [12].

В настоящей статье анализируются свойства устойчивости по Ляпунову параметрических колебаний, а также свойства устойчивости по Жуковскому свободных колебаний некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка.

Как известно [1], колебание называется неавтономным, если оно описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

правая часть которого явно зависит от времени t. В противном случае колебание называется автономным.

Достаточно детально исследованы вынужденные колебания, описываемые уравнением вида

$$y'' = f_1(y, y') + f_2(t), \tag{2}$$

для которого функция $f_2(t)$ периодическая относительно времени t, а функция f_1 не зависит явно от t.

Если периодичны по времени коэффициенты (параметры) зависящего от y выражения в уравнении (1), то колебания называются параметрически возбуждаемыми, или просто параметрическими [1]. Наряду с этим, уравнение (1) называют также (в нелинейном случае) реонелинейным или (в линейном случае) реолинейным. Отметим, что для параметрических колебаний в отечественной литературе используется термин «динамическая устойчивость» [2]. Параметрически возбуждаемые колебания описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Для случая дифференциального уравнения Матье

$$y'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2t)y = 0 \tag{3}$$

была развита математическая теория, важнейшие результаты которой могут быть перенесены на общий случай параметрических колебаний.

Термин «параметрически возбуждаемый» указывает на физическое происхождение исследуемых колебаний. Зависящее от времени слагаемое в уравнении (1) физически обусловлено периодической вынуждающей силой, например периодической поперечной силой при изгибных колебаниях стержня. Напротив, параметрическое возбуждение приводит к колебаниям, которые происходят в направлении, отличном от направления вынуждающей силы. Стандартным примером параметрических колебаний служат изгибные колебания прямого стержня, нагруженного периодической продольной силой.

В работе [3] развита общая теория устойчивости реолинейных систем. Основополагающий характер по решению различных задач о параметрических колебаниях имели монографии В.В. Болотина и Г. Шмидта [2, 4]. Из всех направлений исследований оказалось особенно важным изучение нелинейностей, приведшее к теории комбинационных резонансов. Благодаря этому стала возможной оценка опасности параметрически возбуждаемых колебаний, исходя только из нелинейностей демпфирования без учета прочих нелинейностей.

Рассмотрим решение $u_i(\tau)$, $i = 1, 2, ..., N$, системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_i + P_i u_i = \Phi_i,\ i = 1, 2, \ldots, N\ , \qquad (4)$$

с вещественными коэффициентами при $0 \le \tau \le 2\pi$ и параметрами P_i, не обращающимися в нуль, и с функциями

$$\Phi_i = \Phi_i(u_\nu, \dot{u}_\nu, \varepsilon_\rho, \tau) = \Phi_i[\tau]\ , \qquad (5)$$

представляющими ряды по степеням переменных $u_1, ..., u_N, \dot{u}_1, \ \ldots,\ \dot{u}_N$ и параметров $\varepsilon_1(\tau), ..., \varepsilon_r(\tau)$, где точки означают дифференцирование по τ, индексом ν обозначена совокупность величин с индексами $1, 2, ..., N$, индексом ρ – совокупность с индексами $1, 2, ..., r$. Используются также сокращения $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{2N})$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_r)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_{2N}$, $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_r$.

Решение $u_i(\tau)$, $i = 1, 2, ..., N$, системы (4) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если все (не обязательно периодические) решения, являющиеся соседними в начальный момент $\tau = \tau_0$, остаются соседними и для всех значений $\tau > \tau_0$. Если это условие не выполнено, то решение $u_i(\tau)$ называется неустойчивым в смысле Ляпунова. Решение называется асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если при $\tau \to +\infty$ все соседние решения переходят в него.

Рассмотрим далее вопрос об асимптотической устойчивости и неустойчивости для реолинейных и реонелинейных дифференциальных уравнений.

Вычитая почленно дифференциальные уравнения (4), выписанные по отношению к переменным U_i и u_i, получим уравнения вариаций $v_i = U_i - u_i$ решений

$$\ddot{v}_i + P_i v_i = \Phi_i(u_\nu + v_\nu, \dot{u}_\nu + \dot{v}_\nu, \varepsilon_\rho, \tau) - \\ - \Phi_i(u_\nu, \dot{u}_\nu, \varepsilon_\rho, \tau). \qquad (6)$$

Выделяя в правых частях (6) линейные по v_i, $\dot{v}_i$ члены, получим уравнения вида

$$\ddot{v}_i + P_i v_i = \sum_j p_{ij} v_i + \sum_j q_{ij}\dot{v}_i + \Psi_i(v_\nu, \dot{v}_\nu)\ . \qquad (7)$$

Коэффициенты p_{ij} и q_{ij} линейных частей в (7) содержат исследуемое решение и его первую производную $\dot{u}_i$, а также ε_ρ и τ. Функции Ψ_i в (7) представляют совокупность членов второй и высших степеней по v_i и $\dot{v}_i$, коэффициенты при которых содержат исследуемое решение u_i и его первую производную $\dot{u}_i$, а также величины ε_ρ и τ.

Отбрасывая в (7) функции Ψ_i, получим линейную систему

$$\ddot{v}_i + P_i v_i = \sum_j p_{ij}\, v_i + \sum_j q_{ij}\dot{v}_i\ . \qquad (8)$$

Линейная система (8) является системой уравнений первого приближения, или линейной системой уравнений в вариациях [5, 6].

Для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{v} = a\,(\tau)\,v + b(\tau)\,\dot{v}\ , \qquad (9)$$

где $a(\tau)$ и $b(\tau)$ – непрерывные периодические функции периода 2π, имеет место следующее утверждение [5].

Если вещественные части обоих характеристических показателей отрицательны, то все решения уравнения (9) при $\tau \to \infty$ стремятся к нулю и, следовательно, имеет место асимптотическая устойчивость тривиального решения. Если вещественная часть хотя бы одного из характеристических показателей положительна, то существуют решения уравнения (9), неограниченно возрастающие при $\tau \to +\infty$, и, следовательно, имеет место неустойчивость тривиального решения.

Доказательство этого утверждения следует из теоремы Флоке – Ляпунова [5, 6] для уравнения (9) и вида решений уравнения (9).

Рассмотрим линейную систему (8), для которой функции $p_{ij}(\tau)$ и $q_{ij}(\tau)$ являются периодическими периода 2π и, кроме того, допускают абсолютно и равномерно сходящиеся разложения Фурье при достаточно малых абсолютных значениях. Пусть ряды Фурье для функций $p_{11}(\tau)$ и $q_{11}(\tau)$ имеют вид

$$p_{11}(\tau) = p_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(p_\nu \cos \nu\tau + P_\nu \sin \nu\tau)\ , \qquad (10)$$

$$q_{11}(\tau) = q_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(q_\nu \cos \nu\tau + Q_\nu \sin \nu\tau\right). \qquad (11)$$

Условия устойчивости, выраженные через коэффициенты разложений (10), (11), даются следующим утверждением.

В условиях простого резонанса решения системы (8) асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда выполнены два условия

$$q_0 < 0, \qquad (12)$$

$$n^2 q_0^2 > (p_{2n} - nQ_{2n})^2 + (P_{2n} + nq_{2n})^2 - p_0^2\ . \qquad (13)$$

Если хотя бы в одном из условий (12) и (13) знак неравенства изменится, то имеет место неустойчивость.

Утверждение следует из теоремы Флоке – Ляпунова [5, 6] для системы дифференциальных уравнений и вида решений системы (8).

Рассмотрены также вопросы об асимптотической устойчивости и неустойчивости реонелинейных уравнений (7) с помощью прямого метода Ляпунова и получены новые теоремы, относящиеся не к уравнениям в вариациях вида (8), а к полным уравнениям вида (7).

В настоящее время теория устойчивости траекторий по Жуковскому является интенсивно развивающимся направлением, имеющим свои специфические особенности по сравнению с другим направлением – теорией устойчивости по Ляпунову. Асимптотически устойчивые и асимптотически устойчивые по Жуковскому траектории дифференциальной системы имеют различный предельный режим при неограниченном возрастании времени, и этим асимптотическая устойчивость траекторий существенно отличается от асимптотической устойчивости траекторий по Жуковскому. Кроме того, в теории устойчивости Ляпунова в качестве уравнений первого приближения приняты уравнения в вариациях Пуанкаре, а в теории устойчивости траектории по Жуковскому используются уравнения в вариациях Жуковского. Если уравнения в вариациях Пуанкаре записываются для изохронного соответствия точек невозмущенной и возмущенной траекторий, то уравнения в вариациях Жуковского строятся для ортогонального соответствия точек этих траекторий.

Обозначим через Σ_τ множество всех гомеоморфизмов σ числового множества $R_\tau^+ ::= [\tau, \infty)$ на себя, для которых $\sigma(\tau) = \tau$. Полутраектория $C^+(p)$ решения $\varphi(t, p)$, $t \in R_{t_0}^+$, $\varphi(t_0, p) = p$, системы $\dot{x} = g(x)$ называется устойчивой в смысле Жуковского, если существует репараметризация $\sigma(t) \in \Sigma_{t_0}$, обладающая следующим свойством: для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $q \in B_\delta(p)$ имеет место $r_{\varphi,\sigma}(t, p, q) < \varepsilon\ \forall t \ge t_0$, где $r_{\varphi,\sigma}(t, p, q) ::= |\varphi(\sigma(t), q) - (t, p)|$.

Рассмотрим вопрос о репараметризации времени периодического решения уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos \omega t, \qquad (14)$$

где α, β, ω – постоянные.

Пусть периодическое решение $x(t)$ уравнения (14) сравнивается с соседним решением $x(t) + \delta x(t)$ этого уравнения, получающимся при малом изменении начальных условий.

Уравнения в вариациях для уравнения (14) имеют вид

$$\delta \ddot{x} + (\alpha + 3\beta x^2)\delta x = 0. \qquad (15)$$

Решение $x(t)$ будет устойчивым или неустойчивым в смысле Ляпунова в зависимости от того, оказываются ограниченными или неограниченными при $t \ge 0$ решения уравнения (15).

Будем изменять как начальные условия, так и физическое время t, то есть производить репараметризацию физического времени t. С этой целью рассмотрим семейство решений уравнения (14) вида $x(t; \lambda_1, \lambda_2)$, где параметры λ_1 и λ_2 зависят от начальных условий таким образом, что периодическое решение $x_0(t)$, устойчивость которого рассматривается, соответствует нулевым значениям параметров, то есть $x_0(t) = x(t; 0, 0)$. Будем считать, что вариации решений имеют вид $x[f(\lambda_1, \lambda_2)t, \lambda_1, \lambda_2]$, где функция $f(\lambda_1, \lambda_2)$ обращается в единицу при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Отметим, что указанные вариации не являются решениями уравнения (14).

Для достаточно малых значений λ_1, λ_2 определим функцию $f(\lambda_1, \lambda_2)$ так, чтобы разность $|x - x_0|$ была бы ограниченной при всех положительных значениях t. Ограничимся случаем, когда функция $f(\lambda_1, \lambda_2)$ является линейной относительно λ_1, λ_2, то есть

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = 1 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2, \qquad (16)$$

где c_i – некоторые постоянные. Другими словами, $f(\lambda_1, \lambda_2)$ представлена членами первой степени своего разложения по λ_1 и λ_2:

$$x[f(\lambda_1, \lambda_2)t; \lambda_1, \lambda_2] - x_0(t) = (tc_1 \dot{x}_0 + \partial x_0/\partial\lambda_1)\lambda_1 + \\ + (tc_2 \dot{x}_0 + \partial x_0/\partial\lambda_2)\lambda_2, \qquad (17)$$

где величины $\dot{x}_0$, $\partial x_0/\partial\lambda_1$ и $\partial x_0/\partial\lambda_2$ вычислены при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Таким образом, задача об устойчивости приводится к решению вопроса, можно ли сделать два члена в правой части (17) ограниченными для всех положительных значений t при помощи соответствующего выбора постоянных c_1 и c_2. Если эти члены можно сделать ограниченными, то рассматриваемое решение будет устойчивым в смысле Ляпунова при репараметризации времени t.

Рассмотрим случай свободных колебаний для уравнения Дуффинга, когда $F_0 = 0$. В этом случае $\dot{x}_0$ будет также решением уравнения (5), в чем можно убедиться дифференцированием (14) по t. Следовательно, значения параметров α и β в (15) таковы, что уравнение (15) имеет периодическое решение того же периода, что и функция $\alpha + 3\beta x^2$, в силу того, что периоды функций $\dot{x}_0$ и x совпадают. Следовательно, характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (15), имеет кратный корень и поэтому уравнение (15) имеет фундаментальные решения вида

$$\delta x_1 = \dot{x}_0(t), \delta x_2 = At\dot{x}_0(t) + \psi(t), \qquad (18)$$

где функция $\psi(t)$ того же периода, что и функция $x_0(t)$, A – некоторая постоянная. Частные производные $\partial x_0/\partial\lambda_i$, $i = 1, 2$, являются решениями уравнения (15) и, следовательно, являются линейными комбинациями от δx_1 и δx_2. Очевидно, что числа c_1 и c_2 могут быть выбраны так, чтобы член вида $Btx_0(t)$ оказался равным нулю. Это значит, что фундаментальные решения (18) являются ограниченными при всех $t \ge 0$. Следовательно, свободные колебания для уравнения Дуффинга будут устойчивыми в смысле Жуковского.

Из изложенного выше следует, что каждое решение уравнения (14), которое было устойчивым в смысле Ляпунова, будет устойчивым и в смысле Жуковского, так как для этого надо, чтобы $c_1 = c_2 = 0$. Кроме того, неустойчивые по Ляпунову решения уравнения (14) остаются неустойчивыми и после замены времени t, за исключением решений, соответствующих свободным колебаниям. В самом деле, известно, что каждое неограниченное решение $\partial x_0/\partial\lambda_i$ уравнения (15), которое соответствует внутренним точкам области неустойчивости уравнения Хилла, в этих случаях обращается в бесконечность по экспоненциальному закону, так что выражения $tc_i\dot{x}_0 + \partial x_0/\partial\lambda_i$ в равенстве (17) никаким выбором постоянных c_i нельзя сделать ограниченными, поскольку $\dot{x}_0$ есть периодическая функция.

Методы анализа устойчивости в смысле Н.Е. Жуковского нелинейных многомерных динамических систем развиты в [7–12]. Дальнейший теоретический и прикладной интерес представляет получение новых условий устойчивости и неустойчивости по Жуковскому для динамических моделей сложных технических систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-08-00710).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андронов А.А., Леонтович М.А.** О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами // Журнал русского физ.-хим. о-ва. (физ.). – 1927. – Вып. 59. – С. 429–443.
2. **Болотин В.В.** Динамическая устойчивость упругих систем. ¯ М.: Гостехиздат, 1956.
3. **Mettler E.** Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper // Ing.–Arch. – 1949. – Vol. 17. – P. 418–449.
4. **Шмидт Г.** Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978.
5. **Якубович В.А., Старжинский В.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972.
6. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
7. **Леонов Г.А., Пономаренко Д.В.** Критерии орбитальной устойчивости траекторий динамических систем // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 4. – С. 88–94.
8. **Леонов Г.А.** Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2006.
9. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** Прочность движения механических систем. – М.: РУДН, 1996.
10. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О предельных свойствах асимптотически устойчивых по Ляпунову и асимптотически прочных по Жуковскому траекторий динамической системы // Доклады Академии наук. – 2006. – Т. 409. – № 2. – С. 185–190.
11. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** Необходимые и достаточные условия существования автоколебаний в конечномерной непрерывной динамической системе // Доклады РАН. – 2008. –Т. 418. – № 1. – С. 37–41.
12. **Дружинина О.В.** Устойчивость и стабилизация по Жуковскому динамических систем: Теория, методы и приложения. – М.: URSS, 2013.
13. **Ding C.** The limit sets of Uniformly Asymptotically Zhukovskij Stable Orbits // Computers Math.
Appl. – 2004. – Vol. 47 (6/7). – P. 859–862.
14. **Yang X.** Liapunov asymptotically stability and Zhukovskij asymptotically stability // Chaos, Soliton and Fractals. – 2000. – Vol. 11. – P. 1995–1999.

Петрова Светлана Николаевна, к. пед. н., доцент кафедры прикладной математики Уральского государственного экономического университета
620219, г. Екатеринбург, ул. 8 Марта, 62,
тел. 8(343) 221 27 37, e-mail: axial_120@mail.ru