УДК 517.925

НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.А. Нелюхин
Рязанский государственный радиотехнический университет

THE FINDING OF A GENERAL SOLUTION OF SECOND ORDER SPECIAL KIND SYSTEM ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

S.A. Nelyukhin

Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами специального вида приводится метод нахождения ее общего решения, основанный на использовании пары квадратичных форм. Рассматривается случай, когда обе квадратичные формы являются вырожденными.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, задача о паре квадратичных форм, процесс ортогонализации Грамма – Шмидта, общий диагонализирующий базис.

We develop a method of finding a general solution of a linear system of second order special kind differential equations with constant coefficients. The method uses a pair of quadratic forms. We focus on a case when both the forms are degenerate.

Keywords: system differential equations, the problem of a pair of quadratic forms, The Gram–Schmidt process of orthogonalization, the general diagonalizable basis.

В механике изучается так называемое дифференциальное уравнение Лагранжа второго рода [1, 2]. Если состояние динамической системы описывается в обобщенных (лагранжевых) координатах q_1, q_2, …, q_n и начало координат есть точка равновесия, то поведение этой системы определяется уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0 \ \ (i=\overline{1,n}),$$

где $\overline{q}=\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)^T \in \mathbf{R}^n$. В этих уравнениях потенциальная энергия системы аппроксимируется функцией $V=\overline{q}^T A\overline{q}$, являющейся квадратичной формой с вещественной симметрической матрицей $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ ($A^T=A$), а кинетическая энергия – функцией $T=\dot{\overline{q}}^T B\dot{\overline{q}}$, являющейся квадратичной формой с вещественной симметрической матрицей $B=\left(b_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ ($B^T=B$).

Уравнения Лагранжа в общем виде взаимосвязаны, и решать их достаточно сложно. Поэтому возникает задача упростить эти уравнения, то есть привести к такому виду, чтобы они были не взаимосвязаны. Это означает, например, что необходимо найти такое общее преобразование, в результате которого обе квадратичные формы $\overline{q}^T A\overline{q}$, $\dot{\overline{q}}^T B\dot{\overline{q}}$ примут канонический вид (матрицы A и B этих форм соответственно – диагональный вид). Тогда уравнения Лагранжа распадутся на отдельные n линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в матричной форме записи

$$A\ddot{\overline{x}}+A\dot{\overline{x}}+B\overline{x}=0$$
$$\left(\overline{x}=\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T \in \mathbf{R}^n\right). \tag{1}$$

Задача о паре квадратичных форм заключается в том, чтобы найти линейное преобразование

$$\overline{x}=U\,\overline{y} \tag{2}$$

($\overline{y}=\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)^T \in \mathbf{R}^n$) с матрицей U, в результате которого квадратичные формы $\dot{\overline{x}}^T A\dot{\overline{x}}$, $\overline{x}^T B\overline{x}$ примут диагональный вид:

$$\dot{\overline{x}}^T A\dot{\overline{x}}=\left(U\dot{\overline{y}}\right)^T AU\,\dot{\overline{y}}=\dot{\overline{y}}^T U^T AU\,\dot{\overline{y}}=\dot{\overline{y}}^T A'\,\dot{\overline{y}},$$

$$\overline{x}^T B\overline{x}=\left(U\,\overline{x}\right)^T BU\,\overline{x}=\overline{x}^T U^T BU\,\overline{x}=\overline{x}^T B'\,\overline{y},$$

где $A' = U^T A U = \operatorname{diag}\{\alpha_{11}, ..., \alpha_{nn}\}$, $B' = U^T B U = = \operatorname{diag}\{\beta_{11}, ..., \beta_{nn}\}$ – диагональные матрицы. В результате преобразования (2) (с последующим умножением обеих частей слева на матрицу U^T) система (1) примет вид системы из n отдельных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\alpha_{ii}\ddot{y}_i + \alpha_{ii}\dot{y}_i + \beta_{ii} y_i = 0 \ (i = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Дальнейшее исследование системы (1) зависит от матриц A, B. Случай, когда одна из матриц A или B является невырожденной, рассматривался в [3]. В настоящей работе представлен случай, когда обе матрицы A и B являются вырожденными ($\det A = 0$, $\det B = 0$).

Пусть заданы две квадратичные формы $L_1(\overline{x}) = \overline{x}^T A \overline{x}$, $L_2(\overline{x}) = \overline{x}^T B \overline{x}$ и порождающие их симметрические билинейные формы $f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}^T A \overline{y}$, $g(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}^T B \overline{y}$.

Определение 1. Нуль-подпространством симметрической билинейной формы $f(\overline{x}, \overline{y})$, заданной в пространстве $\mathbf{R}^n$, называется множество $N(f)$, определяемое в виде $N(f) = \left\{\overline{x} \in \mathbf{R}^n : f(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \overline{y} \in \mathbf{R}^n\right\}$. Это же множество будем называть нуль-подпространством квадратичной формы $L_1(\overline{x})$, порожденной симметрической билинейной формой $f(\overline{x}, \overline{y})$, и обозначать $N(L_1)$.

Если квадратичная форма $L_1(\overline{x}) = \overline{x}^T A \overline{x}$ задана в базисе матрицей A, то множество $N(L_1)$ относительно этого базиса описывается однородной системой линейных уравнений с основной матрицей A.

Определение 2. Нуль-подпространством $N(L_1, L_2)$ пары квадратичных форм $L_1(\overline{x})$, $L_2(\overline{x})$ называется множество, равное пересечению нуль-подпространств $N(L_1)$ и $N(L_2)$: $N(L_1, L_2) = N(L_1) \cap N(L_2)$.

Определение 3. Пара (L_1, L_2) квадратичных форм называется невырожденной, если размерность $\dim N(L_1, L_2)$ подпространства $N(L_1, L_2)$ равна нулю. В противном случае пара (L_1, L_2) квадратичных форм называется вырожденной.

Определение 4. Собственным подпространством пары (L_1, L_2) невырожденных квадратичных форм называется нуль-подпространство квадратичных форм $\mu L_1(\overline{x}) - \lambda L_2(\overline{x})$, если:

1) его размерность больше нуля;

2) числа μ, λ не равны нулю одновременно.

При этом пару (μ, λ) называют собственной парой чисел пары (L_1, L_2) квадратичных форм. Собственное подпространство пары (L_1, L_2) будем обозначать в виде $L(\mu, \lambda)$.

По определению $L(\mu, \lambda) = N(\mu L_1 - \lambda L_2) = = \{\overline{x} \in V : \mu L_1(\overline{x}) - \lambda L_2(\overline{x}) = 0\}$, $\dim L(\mu, \lambda) > 0$, $\mu^2 + \lambda^2 \neq 0$.

У любой пары (L_1, L_2) вырожденных квадратичных форм обязательно существуют, по крайней мере, два собственных подпространства:

1) при $\mu = 1$, $\lambda = 0$ собственное подпространство $L(1, 0) = N(L_1)$;

2) при $\mu = 0$, $\lambda = 1$ собственное подпространство $L(0, 1) = N(L_2)$.

Предположим, что необходимо найти собственное подпространство $L(\mu, \lambda)$ пары (L_1, L_2) квадратичных форм при условии, что $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$. В этом случае необходимо выполнение условия $\det(\mu A - \lambda B) = 0$, что в силу $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, равносильно условию $\det\left(A - \frac{\lambda}{\mu} B\right) = 0$. Итак, пара (L_1, L_2) форм имеет собственное подпространство $L(1, \lambda)$ ($\lambda \neq 0$) тогда и только тогда, когда число λ удовлетворяет условию

$$\det(A - \lambda B) = 0. \quad (4)$$

Определение 5. Уравнение (4) называется характеристическим уравнением пары (L_1, L_2) квадратичных форм, а множество его корней Λ – спектром этой пары.

Характеристическое уравнение (4) имеет степень, не превышающую размерность основного пространства. Встречаются пары квадратичных форм, для которых соответствующее характеристическое уравнение этой пары имеет нулевую степень. В этом случае можно считать, что любое действительное число λ удовлетворяет уравнению (1), а значит спектр Λ пары (L_1, L_2) квадратичных форм бесконечный. В дальнейшем будем предполагать, что степень уравнения (4) выше нулевой. В этом случае спектр Λ пары (L_1, L_2) квадратичных форм обязательно конечный.

Рассмотрим основные свойства собственных подпространств пары квадратичных форм.

Лемма 1. Различные собственные подпространства невырожденной пары (L_1, L_2) квадратичных форм пересекаются только по нулевому вектору.

Доказательство леммы проводится непосредственными вычислениями.

Лемма 2. Два различных собственных подпространства невырожденной пары (L_1, L_2) квадратичных форм ортогональны (сопряжены) относительно симметрической билинейной формы, порождающей эти квадратичные формы:

$$\forall \overline{x} \in L(1, \lambda_i)\, \forall \overline{y} \in L(1, \lambda_j)\ (\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j)$$
$$f(\overline{x}, \overline{y}) = 0,\ g(\overline{x}, \overline{y}) = 0. \qquad (5)$$

Доказательство леммы проводится непосредственными вычислениями.

Лемма 3. Если характеристическое уравнение (4) невырожденной пары (L_1, L_2) квадратичных форм имеет степень выше нулевой, то собственные подпространства этой пары образуют прямую сумму подпространств.

Доказательство. Если характеристическое уравнение (4) имеет степень выше нулевой, то спектр Λ пары (L_1, L_2) квадратичных форм конечный. Тогда существует конечное число различных собственных подпространств пары (L_1, L_2) квадратичных форм. Согласно лемме 1, различные собственные подпространства пары (L_1, L_2) квадратичных форм пересекаются только по нулевому вектору. Так как семейство собственных подпространств пары (L_1, L_2) квадратичных форм в совокупности является независимым, то собственные подпространства пары (L_1, L_2) образуют прямую сумму подпространств. Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. (Необходимое и достаточное условия существования общего диагонализирующего базиса для пары квадратичных форм.) Невырожденная пара (L_1, L_2) квадратичных форм в пространстве $\mathbf{R}^n$ имеет общий диагонализирующий базис тогда и только тогда, когда сумма размерностей всех собственных подпространств этой пары равна размерности всего пространства.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\dim V = n$ и для невырожденной пары (L_1, L_2) квадратичных форм существует общий диагонализирующий базис $\mathbf{B}_N = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$. В этом базисе матрицы A', B' квадратичных форм $L_1(\overline{x})$, $L_2(\overline{x})$ имеют диагональный вид $A' = \operatorname{diag}(a_1', a_2', \ldots, a_n')$, $B' = \operatorname{diag}(b_1', b_2', \ldots, b_n')$. Предположим, что $\operatorname{rang} B' = r$, причем $r < n$ (квадратичная форма $L_2(\overline{x})$ – вырожденная). Тогда без ограничения общности можно считать, что в силу закона инерции [4] квадратичных форм в последовательности канонических коэффициентов $b_1', b_2', \ldots, b_n'$ первые $n-r$ коэффициентов равны нулю: $\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r}, b_{n-r+1}', \ldots, b_n'$. При этом, так как пара (L_1, L_2) квадратичных форм является невырожденной, в последовательности канонических коэффициентов $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ первые $n-r$ коэффициентов обязательно отличны от нуля.

Так как $\operatorname{rang} B' = r$ ($r < n$), то собственное подпространство $L(0, 1)$ имеет размерность $n-r$. Остальные собственные подпространства имеют вид $L(1, \lambda)$, где $\lambda \in \Lambda$ – корень характеристического уравнения (1), которое в данном случае имеет вид

$$\det(A' - \lambda B') \equiv$$
$$\equiv \underbrace{a_1' \cdot a_2' \cdot a_{n-r}'}_{n-r} \cdot \underbrace{(a_{n-r+1}' - \lambda b_{n-r+1}') \cdot \ldots \cdot (a_n' - \lambda b_n')}_{r} = 0.$$

Тогда размерность каждого собственного подпространства $L(1, \lambda)$ совпадает с алгебраической кратностью корня λ этого уравнения. Следовательно, сумма размерностей всех собственных подпространств $L(1, \lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) равна r. В результате $\dim L(0, 1) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim L(1, \lambda) = (n-r) + {}$ $+r = n = \dim \mathbf{R}^n$.

Достаточность. Пусть сумма размерностей собственных подпространств $L(1, \lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) и $L(0, 1)$ равна размерности всего пространства. В этом случае степень характеристического уравнения (4) пары (L_1, L_2) выше нулевой. Тогда собственные подпространства этой пары образуют прямую сумму подпространств. Объединение базисов всех собственных подпространств будет являться базисом всего пространства V. Покажем, как построить общий диагонализирующий базис.

Случай 1. Пусть размерность каждого собственного подпространства $L(1, \lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) и $L(0, 1)$ равна единице. В этом случае общий диагонализирующий базис $\mathbf{B}_N = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$ представляет собой объединение базисов всех собственных подпространств. Действительно, в силу леммы 2, для любых векторов $\{\overline{e}_i, \overline{e}_j\} \in \mathbf{B}_N$ $(i \neq j;\ i, j = \overline{1, n})$, принадлежащих различным собственным подпространствам, имеем ортогональность относительно симметрической билинейной формы:

$$f(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \overline{e}_i^T A\, \overline{e}_j = 0,$$
$$g(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \overline{e}_i^T B\, \overline{e}_j = 0$$
$$(i \neq j;\ i, j = \overline{1, n}). \qquad (6)$$

В результате, если составить матрицу $U = (\overline{e}_1 \mid \overline{e}_2 \ldots \mid \overline{e}_n)$, столбцами которой являются векторы базиса $\mathbf{B}_N$, то в силу выполнения равенств (6) в этом базисе матрицы A', B' форм $L_1(\overline{x})$, $L_2(\overline{x})$ примут диагональный вид:

$$A' = U^T AU = \left(\overline{e}_i^T A\overline{e}_i\right)_{i,j=1}^{n,n} = \operatorname{diag}\{a_1', a_2', \ldots, a_n'\},$$

$$B' = U^T BU = \left(\overline{e}_i^T B\overline{e}_j\right)_{i,j=1}^{n,n} = \operatorname{diag}\{b_1', b_2', ..., b_n'\},$$

где обозначены $a_i' = \overline{e}_i^T A\,\overline{e}_i$, $b_i' = \overline{e}_i^T B\,\overline{e}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Случай 2. Пусть размерность одного из собственных подпространств пары квадратичных форм больше единицы. Предположим сначала, что $\dim L(1,\ 0) = \dim N(L_1) = k > 1$ и система векторов $\mathbf{G} = (\overline{g}_1,\ \overline{g}_2,\ \ldots,\ \overline{g}_k)$ ($\overline{g}_i \in L(1,\ 0)$, $i = \overline{1,\ k}$) является базисом подпространства $L(1,\ 0)$. В общем случае $g\left(\overline{g}_i,\ \overline{g}_j\right) = \overline{g}_i^T B\overline{g}_j \neq 0$ ($i \neq j$; $i,j = \overline{1,k}$), то есть векторы, взятые из собственного подпространства $L(1,\ 0)$, не ортогональны относительно симметрической билинейной формы $g(\overline{x},\ \overline{y})$ (при этом $f\left(\overline{g}_i,\ \overline{g}_j\right) = 0$ ($i \neq j$; $i,j = \overline{1,k}$)).

Проведем для базиса $\mathbf{G}$ процесс ортогонализации относительно симметрической билинейной формы $g(\overline{x},\ \overline{y})$ по схеме, аналогичной процессу ортогонализации Грамма – Шмидта:

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = \overline{g}_1,\ \overline{e}_1 \in L(1,0), \\ \overline{e}_2 = \overline{g}_2 - \dfrac{f(\overline{e}_1, \overline{g}_2)}{f(\overline{e}_1, \overline{e}_1)} \cdot \overline{e}_1,\ \overline{e}_2 \in L(1,0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{e}_k = \overline{g}_k - \dfrac{f(\overline{e}_1, \overline{g}_k)}{f(\overline{e}_1, \overline{e}_1)} \cdot \overline{e}_1 - \ldots - \\ - \dfrac{f(\overline{e}_{k-1}, \overline{g}_k)}{f(\overline{e}_{k-1}, \overline{e}_{k-1})} \cdot \overline{e}_{k-1},\quad \overline{e}_k \in L(1,0). \end{cases} \tag{7}$$

Получим базис $\mathbf{G}_0 = (\overline{e}_1, \overline{e}_2,\ \ldots, \overline{e}_k)$, ортогональный относительно обеих симметричных билинейных форм, то есть $f\left(\overline{e}_i, \overline{e}_j\right) = 0$, $g\left(\overline{e}_i, \overline{e}_j\right) = 0$ ($i \neq j$; $i,j = \overline{1,k}$).

Пусть размерность $\dim L(1,\ \lambda) = k > 1$ ($\lambda \neq 0$) и $\mathbf{G} = (\overline{g}_1,\ \overline{g}_2,\ \ldots, \overline{g}_k)$ – базис подпространства $L(1,\ \lambda)$. В этом случае для любого вектора $\overline{z} \in \mathbf{R}^n$ справедливо $f(\overline{g}_i, \overline{z}) - \lambda g(\overline{g}_i, \overline{z}) = 0$ $\left(i = \overline{1,k}\right)$.

Ортогонализировав базис $\mathbf{G}$ относительно симметрической билинейной формы $g(\overline{x},\ \overline{y})$, получим базис $\mathbf{G}_0 = (\overline{e}_1, \overline{e}_2,\ \ldots, \overline{e}_k)$ такой, что при всех $\overline{z} \in \mathbf{R}^n$ справедливы равенства

$$\begin{cases} f\left(\overline{e}_i,\ \overline{e}_j\right) = 0\ \left(i \neq j,\ i,j = \overline{1,k}\right), \\ f\left(\overline{e}_i,\ \overline{z}\right) - \lambda g\left(\overline{e}_i,\ \overline{z}\right) = 0\ \left(i = \overline{1,k}\right). \end{cases}$$

Если предположить, что в последней системе $\overline{z} = \overline{e}_j \in L(1,\ \lambda)$ $(i \neq j,\ \lambda \neq 0)$, то

$$\begin{cases} f\left(\overline{e}_i,\ \overline{e}_j\right) = 0, \\ f\left(\overline{e}_i,\ \overline{e}_j\right) - \lambda g\left(\overline{e}_i,\ \overline{e}_j\right) = 0\ \left(i \neq j,\ i,j = \overline{1,k}\right), \end{cases}$$

а это возможно только в том случае, когда

$$f\left(\overline{e}_i,\ \overline{e}_j\right) = 0,\ g\left(\overline{e}_i,\ \overline{e}_j\right) = 0\ \left(i \neq j,\ i,j = \overline{1,k}\right).$$

Итак, построенный базис $\mathbf{G}_0$ является ортогональным относительно обеих симметрических билинейных форм $f(\overline{x},\ \overline{y})$, $g(\overline{x},\ \overline{y})$.

Если $\dim L(0,\ 1) = \dim N(L_2) = k > 1$, то базис в собственном подпространстве $L(0,\ 1)$ необходимо ортогонализировать относительно симметрической билинейной формы $f(\overline{x},\ \overline{y})$. Путем объединения построенных базисов каждого собственного подпространства получим общий диагонализирующий базис $\mathbf{B}_N$. Теорема доказана.

Пусть квадратичные формы $L_1(\overline{x}) = \overline{x}^T A\overline{x}$, $L_2(\overline{x}) = \overline{x}^T B\overline{x}$ являются вырожденными, причем пара форм $(L_1,\ L_2)$ оказывается вырожденной, то есть $\dim N(L_1,\ L_2) = k \geq 1$, $N(L_1,\ L_2) = N(L_1) \cap N(L_2)$.

Пусть система векторов $(\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \ldots, \overline{e}_k)$ есть базис пространства $N(L_1,\ L_2)$. Составим матрицу $S = \left(\overline{e}_1|\ \ \overline{e}_2|\ \ldots\ \ \overline{e}_k|\ \ \overline{e}_{k+1}|\ \ldots\ \ \overline{e}_n|\right)$ n-го порядка, где $(\overline{e}_1, \overline{e}_2,\ \ldots, \overline{e}_k, \overline{e}_{k+1}, \ldots, \overline{e}_n)$ – базис $\mathbf{R}^n$, первые k векторов которого образуют базис $N(L_1,\ L_2)$. Составим матрицы $\widetilde{A} = S^T AS$, $\widetilde{B} = S^T BS$. Установлено [2], что если система векторов $(\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \ldots, \overline{e}_k)$ – базис $N(L_1,\ L_2)$, то матрицы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ могут быть приведены к следующему блочному виду:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} O_{k,\,k} & O_{k,\,n-k} \\ O_{n-k,\,k} & A_1 \end{pmatrix},\ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} O_{k,\,k} & O_{k,\,n-k} \\ O_{n-k,\,k} & B_1 \end{pmatrix},$$

где A_1, B_1 – матрицы $(n-k)$-го порядка, $O_{p,r}$ – нулевая матрица размера $p \times r$.

В результате преобразования

$$\overline{x} = S\,\overline{y}, \tag{8}$$

система уравнений (1) примет вид

$$A_1\ddot{\bar{u}} + A_1\dot{\bar{u}} + B_1\bar{u} = 0\,, \qquad (9)$$

где $\bar{u} = (y_{k+1},\ y_{k+2},\ \ldots,\ y_n)^T \in \mathbf{R}^{n-k}$ ($y_1, \ldots, y_k$ – произвольные функции). Дальнейшее исследование системы уравнений (9) зависит от структур матриц A_1, B_1. Возможен случай, при котором одна из матриц A_1, B_1 является невырожденной.

Применим полученные результаты для приведения системы (1), состоящей из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и вырожденными матрицами при производных к n отдельных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 & 4 \\ -12 & 24 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -12 & 0 & 3 \\ -12 & 21 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

для которых $\det A = 0,\ \det B = 0$. Решив однородные системы линейных алгебраических уравнений с матрицами A, B, найдем собственные подпространства

$$L(1, 0) = \left\{\bar{x} \in \mathbf{R}^4 : x_1 = 2x_2, x_2 \in \mathbf{R}, x_3 \in \mathbf{R}, x_4 = 0\right\},$$

$$\left\{L(0,1) = \left\{\bar{x} \in \mathbf{R}^4 : x_1 = -3x_4, x_2 = -x_4, x_3 = 2x_4, x_4 \in \mathbf{R}\right\}\right.$$

и соответствующие базисы

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2)\,,\ \bar{g}_1 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)^T\,,\ \bar{g}_2 = (2,\ 1,\ 0,\ 0)^T\,;$$

$$(\bar{g}_3),\ \bar{g}_3 = (-3, -1,\ 2,\ 1)^T\,.$$

При этом $\dim L(1,\ 0) = 2$, $\dim L(0,\ 1) = 1$.

Характеристическое уравнение (4) и спектр для пары квадратичных форм, соответствующих указанным матрицам A и B, имеют вид $\det(A - \lambda B) \equiv 2\lambda^3 - 4\lambda^2 = 0$, $\Lambda = \{0,\ 2\}$ (алгебраическая кратность числа 0 равна 2, алгебраическая кратность числа 2 равна 1).

Найдем собственное подпространство $L(1,\ 2)$ как решение однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $A - 2B$:

$$L(1, 2) = \left\{\bar{x} \in \mathbf{R}^4 : x_1 = -\tfrac{x_4}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 \in \mathbf{R}\right\}.$$

Базис в этом подпространстве имеет вид

$$(\bar{g}_4)\,,\ \bar{g}_4 = \left(-\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 1\right)^T,$$

его размерность – $\dim L(1,\ 2) = 1$. Тогда сумму размерностей всех собственных подпространств запишем следующим образом:

$$\dim L(0,\ 1) + \dim L(1,\ 0) + \sum_{\substack{\lambda_i \in \Lambda, \\ \lambda_i \neq 0}} \dim L(1,\ \lambda_i) =$$

$$= \dim L(0,\ 1) + \dim L(1,\ 0) + \dim L(1,\ 2) =$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4\,,$$

то есть пара квадратичных форм является невырожденной. Так как сумма размерностей всех собственных подпространств равна размерности всего пространства, то по теореме 1 для пары квадратичных форм можно построить общий диагонализирующий базис $\mathbf{B}_N$.

В силу того, что $\dim L(1,\ 0) = 2$, для базиса $\mathbf{G} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ подпространства $L(1,\ 0)$ проведем процесс ортогонализации (7) относительно симметрической билинейной формы $g(\bar{x},\ \bar{y})$. В результате получим базис $\mathbf{G}_0 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ подпространства $L(1,\ 0)$:

$$\bar{e}_1 = \bar{g}_1\,,\ \bar{e}_2 = \bar{g}_2 + \alpha\bar{e}_1\,,$$

$$\alpha = -\frac{g(\bar{e}_1,\ \bar{g}_2)}{g(\bar{e}_1,\ \bar{e}_1)} = -\frac{\bar{e}_1^T B\bar{g}_2}{\bar{e}_1^T B\bar{e}_1} = -\frac{-4}{-2} = -2\,,$$

$$\bar{e}_1 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)^T\,,\ \bar{e}_2 = (2,\ 1,\ -2,\ 0)^T\,.$$

Остальные собственные подпространства имеют размерности, равные единице. Путем объединения базисов трех собственных подпространств получим общий диагонализирующий базис $\mathbf{B}_N = (\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3,\ \bar{e}_4) = (\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{g}_3,\ \bar{g}_4)$.

Составим матрицу

$$U = (\bar{e}_1 \mid \bar{e}_2 \mid \bar{e}_3 \mid \bar{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

неособенного линейного преобразования $\bar{x} = U\bar{y}$ и найдем матрицы квадратичных форм в базисе $\mathbf{B}_N$:

$$A' = U^T A U = \left(\bar{e}_i^T A\bar{e}_j\right)_{i,j=1}^{4,\ 4} = \operatorname{diag}\left\{\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0, 1\right\},$$

$$B' = U^T B U = \left(\bar{e}_i^T B\bar{e}_j\right)_{i,j=1}^{4,\ 4} = \operatorname{diag}\left\{\tfrac{1}{4},\ -2,\ 1,\ 0\right\}.$$

Система (1) при этом примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\ddot{y}_1 + \frac{1}{2}\dot{y}_1 + \frac{1}{4}y_1 = 0, \\ -2y_2 = 0, \\ y_3 = 0, \\ \ddot{y}_4 + \dot{y}_4 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Общие решения систем (8) и (1) имеют соответственно вид ($C_{ij} = \text{const}$):

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} e^{-0,5t}\left(C_{11}\cos\frac{t}{2} + C_{12}\sin\frac{t}{2}\right) \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} + C_{42}e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2C_{21} - 3C_{31} - \frac{1}{2}\left(C_{41} + C_{42}e^{-t}\right) \\ C_{21} - C_{31} \\ e^{-0,5t}\left(C_{11}\cos\frac{t}{2} + C_{12}\sin\frac{t}{2}\right) - 2C_{21} + 2C_{31} \\ C_{31} + C_{41} + C_{42}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $\det A = 0$, $\det B = 0$. Базис в пространстве $N(L_1, L_2)$ состоит из одного вектора $\bar{e}_1 = (-1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$, а значит его размерность $\dim N(L_1, L_2) = 1$ (то есть и пара квадратичных форм является вырожденной). Дополняя его до базиса пространства $\mathbf{R}^4$, составим матрицу

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате преобразования (8) система (1) примет вид (9), в которой $\bar{u} = (y_2,\ y_3,\ y_4)^T$,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} O_{1,1} & O_{1,3} \\ O_{3,1} & A_1 \end{pmatrix},\ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} O_{1,1} & O_{1,3} \\ O_{3,1} & B_1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 25 & 7 & 3 \\ 7 & -7 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $\det A_1 \neq 0$, y_1 – произвольная функция.

Следуя рассуждениям, изложенным в работе [3], составим матрицу $C = A_1^{-1}B_1$ сопровождающего оператора пары квадратичных форм:

$$C = A_1^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & -\frac{11}{17} & -\frac{21}{17} \\ \frac{46}{17} & \frac{58}{17} & \frac{69}{34} \\ -\frac{99}{17} & -\frac{45}{17} & -\frac{36}{17} \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен и соответствующие собственные значения матрицы C имеют вид $P_3(\lambda) = -\frac{72}{17} + \frac{59}{17}\lambda + \frac{25}{17}\lambda^2 - \lambda^3$, $\lambda_1 = -1,79$, $\lambda_2 = 1,09$, $\lambda_3 = 2,17$. Так как все собственные значения матрицы C вещественные и простые, то соответствующие собственные подпространства имеют размерности, равные единице. Базисы в этих подпространствах имеют по одному вектору:

$$\bar{g}_1 = \begin{pmatrix} -0,14 \\ 0,42 \\ -0,89 \end{pmatrix},\ \bar{g}_2 = \begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,42 \\ -0,86 \end{pmatrix},\ \bar{g}_3 = \begin{pmatrix} 0,21 \\ -0,93 \\ -0,28 \end{pmatrix}.$$

Тогда в результате преобразования $\bar{x} = U\bar{z}$ ($\bar{z} = (z_1,\ z_2,\ z_3)^T$) с матрицей $U = (\bar{g}_1 \mid \bar{g}_2 \mid \bar{g}_3)$ система (10) примет вид

$$\ddot{z}_i + \dot{z}_i + \lambda_i z_i = 0\ \ (i = \overline{1,3}). \qquad (11)$$

Общее решение системы (11) имеет вид

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} C_{11}e^{k_1 t} + C_{12}e^{k_2 t} \\ e^{-0,5t}\left(C_{21}\cos(\beta_2 t) + C_{22}\sin(\beta_2 t)\right) \\ e^{-0,5t}\left(C_{31}\cos(\beta_3 t) + C_{32}\sin(\beta_3 t)\right) \end{pmatrix},$$

где $C_{ij} = \text{const}$, $k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda_1}}{2}$, $\beta_j = \frac{\sqrt{4\lambda_j - 1}}{2}$, $j = \overline{1,2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. – М.: Механика, 2004. – Т. 1.
2. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. – М., 1989.
3. **Нелюхин С.А.** Исследование на устойчивость системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами специального вида // Математические методы в экономических исследованиях: сб. науч. тр. – Рязань: РГРТУ, 2014. – С. 37–43.
4. **Гантмахер Ф.Р.** Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966.

Нелюхин Сергей Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры эконометрики и математического моделирования Рязанского государственного радиотехнического университета
390005, г. Рязань, ул. Гагарина, 59/1
тел.: +7 (4912) 46-03-35, e-mail: sergey-nel@yandex.ru