УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

А.А. Шестаков, О.В. Дружинина
Московский государственный университет путей сообщения,
Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН

STABILITY RESEARCH OF DYNAMICAL SYSTEMS BY THE AID OF DIFFERENTIAL GEOMETRY METHODS

A.A. Shestakov, O.V. Druzhinina

На основе сочетания методов теории устойчивости движения и методов дифференциальной геометрии получены условия устойчивости решений дифференциальных уравнений. Даны признаки устойчивости в смысле Дж. Синджа траекторий голономных консервативных систем.

Ключевые слова: динамическая система, устойчивость движения, тензорное уравнение для компонент возмущенного вектора, риманова кривизна.

Stability conditions of mathematical models of dynamical systems are obtained on the basis of combination of stability theory methods and differential geometry methods. Conditions of stability in the sense of G. Synge of trajectories of holonomic conservative systems.

Keywords: dynamical system, stability of motion, tensor equation for perturbed vector, Riemannian curvature.

1. Введение

Настоящая статья посвящена исследованию устойчивости решений дифференциальных уравнений, задаваемых в римановом пространстве, на основе сочетания методов теории устойчивости и дифференциально-геометрических методов.

В статье рассмотрена статическая устойчивость движения при $t \to +\infty$ и даны признаки статической устойчивости при $t \to +\infty$ голономной консервативной системы. Полученные результаты являются развитием исследований У. Томсона и П. Тета [1], Н.Е. Жуковского [2], Т. Леви-Чивита [3], Дж. Синджа [4], К. Якоби [5], К. Пака [6], А.А. Шестакова и О.В. Дружининой [7–15].

Рассмотренные виды устойчивости относятся к типу сильной орбитальной устойчивости, которая соответствует устойчивости в смысле Н.Е. Жуковского. В настоящее время теория устойчивости по Жуковскому траекторий является интенсивно развивающимся направлением, имеющим свои специфические особенности по сравнению с теорией устойчивости по Ляпунову (см. библиографию в [7, 8]). В частности, асимптотически устойчивые по Ляпунову и асимптотически устойчивые по Жуковскому траектории динамической системы, описываемой многомерным дифференциальным уравнением, имеют различный предельный (финальный) режим при неограниченном возрастании времени. Кроме того, изучение устойчивости по Жуковскому актуально при анализе хаотического поведения детерминированных динамических систем [7, 8].

2. Обозначения и определения

Введем обозначения и терминологию:

1) $\mathfrak{R}_k$ – конфигурационное риманово пространство размерности k;

2) x^σ – контравариантный, бесконечно малый вектор смещения относительно линейного элемента действия при консервативных возмущениях и при изометрическом соответствии точек возмущенной и невозмущенной траекторий;

3) $\dot{x}^\sigma (x^{\sigma\prime})$ – производная контравариантного вектора x^σ по времени t (по параметру s);

4) x – модуль контравариантного вектора x^σ;

5) $\overline{x}^\sigma$ – контравариантная производная контравариантного вектора x^σ вдоль кривой, то есть $\overline{x}^\sigma ::= x^{\sigma\prime} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} x^\alpha x^{\beta\prime}$;

6) $\hat{x}^\sigma$ – контравариантная производная по времени функции x^σ от времени вдоль траектории, то есть $\hat{x}^\sigma ::= \dot{x}^\sigma + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} x^\alpha \dot{x}^\beta$;

7) $e^{\sigma}_{(i)}$ – единичный вектор i-й нормали, $i = 1, ..., k$, где k – число степеней свободы.

Рассмотрим голономную консервативную систему с кинетической энергией $T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta}$ и потенциальной энергией $\Pi = \Pi(q^1, \ldots, q^k)$. Тензор $g_{\alpha\beta}$ позволяет ввести инвариантный линейный элемент действия в конфигурационном q-пространстве $\mathfrak{R}_k$, в котором координатами изображающей точки являются k обобщенных координат q^{α}, следующим образом: $ds^2 = (E - \Pi) g_{\alpha\beta} dq^{\alpha} dq^{\beta}$. Динамическая система представляется точкой в пространстве $\mathfrak{R}_k$, в котором задан линейный элемент действия. Движение $q^{\sigma} = q^{\sigma}(t)$ определяет кривую в пространстве и в каждой точке кривой контравариантный вектор скорости $v^{\sigma} = \dot{q}^{\sigma}$, который можно записать в виде $v^{\sigma} = v e^{\sigma}_{(0)}$, где $e^{\sigma}_{(0)} = dq^{\sigma}/ds$ – единичный вектор касательно к кривой. Ковариантное ускорение выражается формулой $a_i = g_{i\sigma} a^{\sigma} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}$. Лагранжевы уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i,$$

где Q_i – обобщенная сила.

Пусть x^{α} – бесконечно малый вектор, проведенный из точки M невозмущенной траектории C к соответственной точке $\bar{M}$ возмущенной траектории $\hat{C}$. Если O и $\bar{O}$ – фиксированные соответственные точки двух траекторий и если $OM = s$, $\bar{O}\bar{M} = \bar{s}$, то примем закон соответствия $s = \bar{s}$. Следовательно, уравнения траектории $\hat{C}$ можно записать в виде

$$r^{\sigma\prime\prime} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} r^{\alpha\prime} r^{\beta\prime} = 0, \qquad (1)$$

где $r^{\sigma} = q^{\sigma} + x^{\sigma}$ и штрих означает производную по s.

Движение q^{σ} в конфигурационном пространстве $\mathfrak{R}_k$ называется статически устойчивым при $t \to +\infty$ по Синджу, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что имеет место

$$x^{\sigma}(s_0) < \delta \Rightarrow x^{\sigma}(s) < \varepsilon \quad \forall s \geq s_0.$$

В противном случае движение q^{σ} называется статически неустойчивым при $t \to +\infty$ по Синджу.

3. Тензорные уравнения для компонент возмущенного вектора и критерии устойчивости

С помощью геодезического уравнения траектории C для вектора возмущения x^{σ} нетрудно получить дифференциальное уравнение:

$$\bar{\bar{x}}^{\sigma} + G_{\alpha\mu\beta} x^{\mu} q^{\alpha\prime} q^{\beta\prime} = 0, \qquad (2)$$

или в ковариантной форме

$$g_{\sigma\mu} \bar{\bar{x}}^{\mu} + G_{\sigma\alpha\mu\beta} q^{\alpha\prime} x^{\mu} q^{\beta\prime} = 0, \qquad (3)$$

где $g_{\alpha\beta}$ – фундаментальный тензор для линейного элемента действия, $G_{\alpha\beta\mu\theta}$ – тензор кривизны [4].

Уравнение (2) или (3) является тензорным уравнением для компонент возмущенного вектора x^{σ} относительно линейного элемента действия. Запишем теперь уравнение для модуля x возмущенного вектора x^{σ}. Пусть u^{σ} – единичный вектор, коллинеарный возмущенному вектору x^{σ}. Нетрудно получить уравнение вида

$$g_{\sigma\theta} \bar{x}^{\sigma} u^{\theta} = x'' - x g_{\sigma\theta} \bar{u}^{\sigma} \bar{u}^{\theta}. \qquad (4)$$

Умножая (3) на u^{σ} и суммируя, получим уравнение

$$x'' - x g_{\sigma\theta} \bar{u}^{\sigma} \bar{u}^{\theta} + G_{\sigma\alpha\beta\mu} u^{\sigma} q^{\alpha\prime} x^{\mu} q^{\beta\prime} = 0, \qquad (5)$$

которое представимо в виде

$$x'' + x\left(G_{\alpha\beta\mu\theta} u^{\alpha} q^{\beta\prime} u^{\mu} q^{\theta\prime} - \bar{u}^2\right) = 0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) является инвариантным уравнением для длины возмущенного вектора относительно метрики $ds^2 = (E - \Pi) g_{\alpha\beta} dq^{\alpha} dq^{\beta}$. Без ограничения общности будем считать, что начальные точки O и $\bar{O}$ выбраны так, что $O\bar{O}$ ортогонален траектории C. Тогда и $M\bar{M}$ будет ортогонален траектории C, что означает ортогональность u^{σ} и $q^{\sigma\prime}$. Поэтому имеем

$$g_{\alpha\beta} u^{\alpha} q^{\beta\prime} = 0. \qquad (7)$$

Следовательно, $G_{\alpha\beta\mu\theta} u^{\alpha} q^{\beta\prime} u^{\mu} q^{\theta\prime}$ есть риманова кривизна многообразия конфигураций, соответствующая элементу, определенному с помощью u^{σ} и направления траектории C.

Описанный подход аналогичен подходу, базирующемуся на использовании ортогональной (нормальной) параметризации траекторий динамической системы, описываемой конечномерным нелинейным дифференциальным уравнением [8–10].

Теорема 1. Пусть риманова кривизна многообразия конфигураций, соответствующая двумерному элементу, содержащему направление траектории невозмущенного движения, отрицательна или равна нулю для всех точек траектории. Тогда невозмущенное движение $q^{\sigma}(s)$ *статически* неустойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу.

Утверждение теоремы 1 следует из уравнения (6) и определения статической неустойчивости при $t \to +\infty$.

Пусть $e^{\sigma}_{(0)}$ – единичный касательный вектор невозмущенной траектории C и $e^{\sigma}_{(1)}, e^{\sigma}_{(2)}, \ldots, e^{\sigma}_{(k-1)}$ – совокупность взаимно ортогональных единичных векторов, перпендикулярных вектору $e^{\sigma}_{(0)}$ и перенесенных параллельно вдоль кривой C (в смысле Леви-Чивита). Возмущенный вектор может быть записан в виде

$$x^{\sigma} = x_{(1)}\, e^{\sigma}_{(1)} + x_{(2)}\, e^{\sigma}_{(2)} + x_{(k-1)}\, e^{\sigma}_{(k-1)}. \qquad (8)$$

Нетрудно показать, что дифференциальные уравнения для определения величины $x_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, *имеют вид*

$$x''_{(i)} + \sum_{j=1}^{k-1} K_{(i,j)}\, x_{(j)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \qquad (9)$$

где $K_{(i,j)} ::= G_{\alpha\beta\mu\theta}\, e^{\alpha}_{(i)} e^{\beta}_{(0)} e^{\mu}_{(j)} e^{\theta}_{(0)}$, $i, j = 0, 1, \ldots, k-1$. Очевидно, что величины $K_{(i,i)}$ симметричны по i и j и величина $K_{(i,i)}$ равна римановой кривизне многообразия конфигураций, соответствующей двумерному элементу, определенному касательной и направлением $e^{\sigma}_{(i)}$.

Изохронную устойчивость, то есть устойчивость, рассматриваемую при изохронном соответствии точек невозмущенной и возмущенной траекторий, будем называть кинематической устойчивостью при $t \to +\infty$ по Синджу.

Теорема 2. Для того чтобы движение голономной консервативной системы было статически устойчивым при $t \to +\infty$ по Синджу, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение $x_{(1)} = x_{(2)} = \ldots = x_{(k-1)} = 0$ дифференциальной системы (9) было кинематически устойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу.

Утверждение теоремы 2 следует из соотношения

$$x^2 = (x_{(1)})^2 + (x_{(2)})^2 + \ldots + (x_{(k-1)})^2. \qquad (10)$$

Теорема 3. Пусть коэффициенты уравнений системы (9) постоянны и движение голономной консервативной системы является установившимся, то есть вдоль траектории движения все величины $K_{(i,j)}$, $i, j = 1, \ldots, k-1$, постоянны. Тогда установившееся движение статически устойчиво при $t \to +\infty$ тогда и только тогда, когда риманова кривизна многообразия конфигураций, соответствующая каждому двумерному элементу, содержащему касательную к невозмущенной траектории, положительна.

Доказательство. Для уравнения поверхности

$$G_{\alpha\beta\mu\theta}\, \xi^{\alpha} e^{\beta}_{(0)} \xi^{\mu} e^{\theta}_{(0)} = c, \qquad (11)$$

где c – постоянная, условием сопряженности направлений $e^{\sigma}_{(0)}$ и $e^{\sigma}_{(i)}$ является

$$K_{(i,i)} = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, k-1. \qquad (12)$$

В случае установившегося движения, когда все коэффициенты уравнений (9) постоянны, векторы $e^{\sigma}_{(i)}$, $i = 1, \ldots, k-1$, могут быть выбраны лежащими в главных направлениях поверхности второго порядка (11). Касательное направление $e^{\sigma}_{(0)}$, очевидно, является главным направлением. Когда нормальные векторы выбраны указанным образом, уравнения системы (9) можно переписать в виде

$$x''_{(i)} + K_{(ii)}\, x_{(i)} = 0, \quad i = 1, \ldots, k-1. \qquad (13)$$

Очевидно, что статическая устойчивость при $t \to +\infty$ по Синджу движения уравнений (13) имеет место тогда и только тогда, когда все коэффициенты $K_{(i\,i)}$ положительны ($i = 1, \ldots, k-1$). Но риманова кривизна многообразия конфигураций, соответствующая любому двумерному элементу, содержащему касательное направление, может быть представлена в виде

$$K = G_{\alpha\beta\mu\theta}\, \xi^{\alpha} e^{\beta}_{(0)} \xi^{\mu} e^{\theta}_{(0)}, \qquad (14)$$

где

$$\xi^{\sigma} = y_{(1)}\, e^{\sigma}_{(1)} + y_{(2)}\, e^{\sigma}_{(2)} + \ldots + y_{(k-1)}\, e^{\sigma}_{(k-1)}, \qquad (15)$$

$$(y_{(1)})^2 + (y_{(2)})^2 + \ldots + (y_{(k-1)})^2 = 1. \qquad (16)$$

Следовательно, с учетом (14)–(16), получим

$$(y_{(1)})^2 + (y_{(2)})^2 + \ldots + (y_{(k-1)})^2 = 1. \qquad (17)$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Отдельно рассмотрим двумерный и трехмерный случаи.

Теорема 4. Пусть $k = 2$. Движение голономной консервативной системы статически устойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу, если гауссова кривизна многообразия конфигураций положительна для всех точек траектории движения, и статически неустойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу, если она отрицательна или равна нулю для всех точек траектории движения.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда вектор смещения коллинеарен нормали к кривой и можно положить $u^{\sigma} = \alpha e^{\sigma}_{(0)}$, $\alpha = \pm 1$. Следовательно, $\bar{u}^{\sigma} = \alpha \bar{e}^{\sigma}_{(1)}$, $\bar{u} = \bar{e}_{(1)}$, но так как траектория является геодетикой, то $\bar{e}^{\sigma}_{(1)} = 0$ и $\bar{u} = 0$. Таким образом, инвариантное уравнение (6) для модуля вектора возмущения можно записать в виде

$$x''_{(1)} + K\, x_{(1)} = 0, \qquad (18)$$

где K – гауссова кривизна многообразия конфигураций. По определению $x > 0$. Пусть $y_{(1)} = g_{\alpha\beta}\, x^{\alpha}_{(1)}\, e^{\beta}_{(1)}$. Тогда $y_{(1)} = x_{(1)}$, если $\alpha > 0$, и $y_{(1)} = -x_{(1)}$, если $\alpha < 0$. Следовательно, задача о статической устойчивости при $t \to +\infty$ по Синджу в случае $k = 2$ сводится к задаче исследования кинематической устойчивости при $t \to +\infty$ по Синджу нулевого решения $y_{(1)} = 0$ дифференциального уравнения вида

$$y''_{(1)} + K\, y_{(1)} = 0\,. \qquad (19)$$

Решение $y_{(1)} = 0$ уравнения (19) кинематически устойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу, если $K > 0$, и кинематически неустойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу, если $K \le 0$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть k = 3. Для того чтобы движение голономной консервативной системы было статически устойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу, необходимо и достаточно, чтобы решение $x_{(1)} = x_{(2)} = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &x''_{(1)} + K_{(1,1)}\, x_{(1)} + K_{(1,2)}\, x_{(2)} = 0,\\ &x''_{(2)} + K_{(2,2)}\, x_{(2)} + K_{(1,2)}\, x_{(1)} = 0, \end{aligned} \qquad (20)$$

где $x^{\sigma} = x_{(1)}\, e^{\sigma}_{(1)} + x_{(2)}\, e^{\sigma}_{(2)}$ – разложение вектора возмущения вдоль нормалей, а касательная компонента $x_{(0)}$ равна нулю, было кинематически устойчивым при $t \to +\infty$ по Синджу.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 5. Используя условия параллельного переноса в смысле Леви-Чивита, получим $\overline{\overline{x}}^{\sigma} = x''_{(1)}\, e^{\sigma}_{(1)} + x''_{(2)}\, e^{\sigma}_{(2)}$ и, следовательно, имеем

$$x''_{(1)} = g_{\sigma\mu}\, \overline{\overline{x}}^{\sigma}\, e^{\mu}_{(1)}, \quad x''_{(2)} = g_{\sigma\mu}\, \overline{\overline{x}}^{\sigma}\, e^{\mu}_{(2)}\,. \qquad (21)$$

Из (3) находим, что

$$\begin{aligned} g_{\sigma\mu}\, \overline{\overline{x}}^{\mu}\, e^{\sigma}_{(1)} &= -G_{\sigma\alpha\mu\beta}\, e^{\sigma}_{(1)}\, q^{\alpha'}\, x^{\mu}\, q^{\beta'} =\\ &= -K_{(1,1)}\, x_{(1)} - K_{(1,2)}\, x_{(2)}. \end{aligned}$$

Аналогично $g_{\sigma\mu}\, \overline{\overline{x}}^{\mu}\, e^{\sigma}_{(2)} = -K_{(1,2)}\, x_{(1)} - K_{(2,2)}\, x_{(2)}$. Сравнивая с (21), получим дифференциальную систему вида (20, где

$$\begin{aligned} K_{(1,1)} &:= G_{\alpha\beta\mu\theta}\, e^{\alpha}_{(1)}\, e^{\beta}_{(0)}\, e^{\mu}_{(1)}\, e^{\theta}_{(0)},\\ K_{(1,2)} &:= G_{\alpha\beta\mu\theta}\, e^{\alpha}_{(1)}\, e^{\beta}_{(0)}\, e^{\mu}_{(2)}\, e^{\theta}_{(0)},\\ K_{(2,2)} &:= G_{\alpha\beta\mu\theta}\, e^{\alpha}_{(2)}\, e^{\beta}_{(0)}\, e^{\mu}_{(2)}\, e^{\theta}_{(0)}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Так как $x^2 = (x_{(1)})^2 + (x_{(2)})^2$, то задача о статической устойчивости при $t \to +\infty$ по Синджу движения в $\mathfrak{R}_3$ сводится к задаче исследования кинематической устойчивости при $t \to +\infty$ по Синджу решения $x_{(1)} = x_{(2)} = 0$ дифференциальной системы (20). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть $k = 3$. Для того чтобы установившееся движение голономной консервативной системы было статически устойчивым при $t \to +\infty$ по Синджу, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$K_{(1,1)} + K_{(2,2)} > 0, \quad K_{(1,1)} K_{(2,2)} > (K_{(1,2)})^2. \qquad (23)$$

Пусть выполнены неравенства (23). Тогда уравнение частот для системы (20) имеет чисто мнимые корни, значит, нулевое решение системы кинематически устойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу и, следовательно, невозмущенное движение системы (2) статически устойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу.

Пусть теперь невозмущенное движение статически устойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу. Если не выполнено одно из неравенств (23), то вековое уравнение будет иметь положительный корень или два комплексно сопряженных корня и нулевое решение уравнений (20) будет кинематически неустойчивым при $t \to +\infty$ по Синджу и, следовательно, невозмущенное движение системы (20) будет статически неустойчиво при $t \to +\infty$ по Синджу. Полученное противоречие доказывает необходимость выполнения неравенств (23). Теорема 6 доказана.

Приведем иллюстрирующие примеры. Рассмотрим сначала движение на плоскости частицы единичной массы, причем $ds^2 = (\mathrm{E} - \Pi)(dx^2 + dy^2)$, где E – полная энергия, Π – потенциальная энергия и (x, y) – декартовы координаты. Гауссова кривизна определяется формулой

$$K = \frac{1}{2}(E - \Pi)^{-3} \times \times \left\{ (E - \Pi)\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 \right\}.$$

Так как $(E - \Pi) > 0$ для всех точек невозмущенной траектории C, то невозмущенное движение частицы единичной массы статически устойчиво при $t \to +\infty$ (статически неустойчиво при $t \to +\infty$), если величина

$$(E - \Pi)\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2$$

положительна (отрицательна или нуль) для всех точек траектории C невозмущенного движения.

Рассмотрим теперь движение частицы единичной массы в плоскости под влиянием силы, направленной к фиксированной точке и изменяющейся обратно пропорционально c-й степени расстояния ($c > 1$) (в евклидовой метрике). В этом случае гауссова кривизна

$$K = \frac{1}{2} k (1-c)\, r^{-c-1} (E-П)^{-3} E\,,$$

где kr^{-c-1} – притягивающая сила и E равна нулю в бесконечности. Движение частицы будет статически устойчивым (статически неустойчивым) при $t \to +\infty$ в зависимости от того, будет ли полная энергия отрицательной (положительной), а потенциальная энергия равной нулю на бесконечности.

4. Замечания исторического характера

Важно отметить, что К. Якоби [5] в задаче движения точки по гладкой поверхности без внешних сил рассмотрел дифференциальное уравнение первого приближения (называемое часто «уравнением Якоби» [5]) для определения геодетики, смежной с невозмущенной геодетикой. В этом уравнении, имеющем вид $d^2y/ds^2 + \theta y = 0$, искомой функцией y является смещение по нормали, независимой переменной – длина дуги вдоль невозмущенной геодетики. Коэффициент θ (гауссова кривизна поверхности) является функцией точки $(s, 0)$ невозмущенной геодетики C. Если вдоль невозмущенной геодетики величина θ постоянна и положительна, то имеет место статическая устойчивость при $t \to +\infty$ по Синджу невозмущенной геодетики C. У. Томсон – П. Тет [1] рассмотрели дифференциальное уравнение смежной возмущенной траектории $d^2y/dx^2 + 2\theta_1\, dy/dx + \theta_2 y = 0$, где θ_i – некоторые функции точки $(x, 0)$ невозмущенной траектории C. Развитие идей Дж. Синджа и применение к анализу устойчивости колебаний даны в [6].

Н.Е. Жуковский [2] продолжил исследования К. Якоби, и У. Томсона – П. Тета и создал основы теории устойчивости траектории под названием «прочность движения».

В монографиях [7, 8] понятие статической устойчивости при $t \to +\infty$ по Синджу при изоэнергетических возмущениях названо «устойчивостью по Жуковскому». Эта терминология оправдана, так как понятие статической устойчивости по Синджу является разновидностью понятия устойчивости по Жуковскому. В [7, 8] представлен современный подход к исследованию устойчивости в смысле Жуковского и даны развитие и модификации первого и второго методов А.М. Ляпунова для анализа устойчивости по Н.Е. Жуковскому.

Рассмотренный в работе подход базируется на сочетании методов теории устойчивости движения и методов дифференциальной геометрии с применением ортогональной параметризации траекторий. Сформулированные в настоящей работе условия устойчивости и неустойчивости могут быть использованы при изучении устойчивости моделей нелинейной динамики.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 13-08-00710-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Thomson W., Tait P.** Treatise on natural philosophy. London: MacMillan and Co., 1867 (Пер. с англ. *Томсон У., Тэт П.* Трактат по натуральной философии. В 2-х ч. М.; Ижевск: Ижев. ин-т компьютерных исследований, 2010).
2. **Жуковский Н.Е.** О прочности движения // Ученые записки Московского университета. Отд. физ.-мат. 1882. Вып. 4. С. 1–104.
3. **Levi-Civita T.** Rend. Circolo math. Palermo. 1917. V. 42. P. 173–205.
4. **Synge J.L.** On the geometry of dynamics // Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A. 1926. V. 226. P. 31–106.
5. **Якоби К**. Лекции по динамике. М.–Л.: ОНТИ НКТП, 1936.
6. **Pak C.H.** Synge’s concept of stability applied to nonlinear normal mode // Non-Linear Mechanics. 2006. V. 41. № 5. P. 657–664.
7. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** Прочность движения механических систем. М.: РУДН, 1996.
8. **Дружинина О.В.** Устойчивость и стабилизация по Жуковскому динамических систем. М.: URSS, 2013.
9. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О понятиях орбитальной устойчивости и фазовой устойчивости движений динамической системы // ДАН. 1997. Т. 355, № 3. С. 339–341.
10. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О сохранении свойства асимптотической прочности в смысле Жуковского интегрального множества при возмущениях нелинейного дифференциального уравнения // ДАН. 2002. Т. 384, № 1. С. 52–56.
11. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** Об условиях прочности в смысле Жуковского траекторий динамических систем // ДАН. 2003. Т. 393, № 4. С. 478–482.
12. **Дружинина О.В., Шестаков А.А** О прочности в смысле Жуковского почти периодических траекторий и свойствах предельных движений дина-

мических систем // ДАН. 2004. Т. 398, № 5. С. 615–619.
13. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О предельных свойствах асимптотически устойчивых по Ляпунову и асимптотически прочных по Жуковскому траекторий динамических систем // ДАН. 2006. Т. 409, № 2. С. 185–190.
14. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** Необходимые и достаточные условия существования автоколебаний в конечномерной непрерывной динамической системе // ДАН. 2008. Т. 418, № 1. С. 37–41.
15. **Шестаков А.А., Дружинина О.В.** Финальные свойства асимптотически прочных и фазово асимптотически устойчивых траекторий и конечномерных динамических потоков // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2006. № 11. С. 251–255.

Шестаков Александр Андреевич, д. ф.-м. н., профессор, Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Дружинина Ольга Валентиновна, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник Вычислительного центра имени А.А. Дородницына РАН
119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40.
тел.: +7 (499) 135-44-98, e-mail: ovdruzh@mail.ru