УДК 517.938

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

М.Т. Терёхин, М.В. Юханова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE INVESTIGATION OF CONTROLLABLE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WICH AUTOMATICAL FEEDBACK

M.T. Teryokhin, M.V. Yuhanova

Исследуется проблема управляемости нелинейной системы дифференциальных уравнений с управлением, зависящим от фазовой переменной.

В предположении, что правые части системы и управление удовлетворяют условиям Каратеодори и Липшица, доказаны теоремы об условиях управляемости системы. Получены неравенства, посредством которых может быть найдена область, на которой система управляемая.

Ключевые слова: измеримые матрицы, абсолютно непрерывные функции, оператор, зависящий от параметра, неподвижная точка, сочетание.

The problem about controllability of nonlinear system of differential equations which control, dependent from phase variable, is investigated.

In assumption, what right-hand parts of system and control satisfy conditions of Caratheodory and Lipschitz, theorems about conditions of controllability system are proved. It are received the ineqnalities by means of which maybe found domain of controllability of system.

Keywords: measurable matrix, absolutely continuous function, dependent from parameter operator, fixed point, combination.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \eta(t, x, u), \qquad (1)$$

в которой $x - n$-мерный вектор, $u - m$-мерный вектор-управление, $A(t)$, $B(t)$ – матрицы, $\eta(t, x, u) - n$-мерная вектор-функция.

Определение 1. Вектор-функция $x(t)$ называется решением системы (1), соответствующим управлявшего $u(t)$, если $x(t)$ является решением системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \eta(t, x, u(t))$.

Решение $x(t)$ системы (1), соответствующее управлению $u(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = \alpha$, обозначим символом $x(t, \alpha, u(\circ))$, $x(0, \alpha, u(\circ)) = \alpha$.

Определение 2. Система (1) называется управляемой на множестве V, если существует такой сегмент $[0, T]$, $T > 0$, что для любого $\alpha \in V$ существует определенное на сегменте $[0, T]$ управление $u(t)$, при котором решение $x(t, \alpha, u(\cdot))$ системы (1) удовлетворяет равенству $x(T, \alpha, u(\cdot)) = 0$.

Ставится задача: определить условия существования множества V, на котором система (1) управляемая.

Проблеме управляемости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящен ряд исследований, среди которых отметим исследования, выполненные в работах [1-3]. В настоящей статье исследование проблемы управляемости нелинейных систем проводится методом неподвижной точки нелинейного оператора, зависящего от параметра и заданного на множестве равномерно ограниченных и равномерно непрерывных вектор-функций.

В основе исследований об управляемости системы (1) лежит следующая теорема (о неподвижной точке нелинейного оператора [4]).

Теорема 1. Пусть

1) K и Λ – непустые, замкнутые компактные множества некоторых линейных нормированных пространств, K – выпуклое множество;

2) на множестве $K \times \Lambda$ определен оператор F_λ такой, что для любого $x \in K$ существует единственное $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющее включению $F_\lambda \ x \in K$;

3) из того, что $x_n \to x_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $y_n = F_{\lambda_n} x_n$, $y_n \to y_0$, следует, что $y_0 = F_{\lambda_0} x_0$.

Тогда существуют $x^* \in K$, $\lambda^* \in \Lambda$ такие, что $x^* = F_{\lambda^*} x^*$.

Управление будем искать в виде вектор-функции $u(t)$, определённой равенством

$$u(t) = S(t)x + R(t)c + \varphi(t, x, c) \equiv \overline{\varphi}(t, x, c), \quad (2)$$

в котором $S(t)$, $R(t)$ – известные матрицы. Матрица $S(t)$ не тождественно равна нулю, $\varphi(t, x, c)$ – известная вектор-функция, c – постоянный вектор.

Систему (1) с управлением $u(t)$, определенным равенством (2), будем называть управляемой системой дифференциальных уравнений с автоматической обратной связью.

Множество управлений U определим равенством $U = \{u(t) : u(t) = S(t)x + R(t)c + \varphi(t, x, c)\}$. При любом $u(t) \in U$ система (1) примет вид

$$\dot{x} = H(t)x + N(t)c + f(t, x, c), \quad (3)$$

в котором $H(t) = A(t) + B(t)S(t)$, $N(t) = B(t)R(t)$ – матрицы, $f(t, x, c) = B(t)\varphi(t, x, c) + \eta(t, x, \overline{\varphi}(t, x, c))$.

Введем следующие обозначения: $|y| = \max\limits_i\{|y_i|\}$, $\|Y(t)\| = \sup\limits_{|y|\le 1}|Y(t)y|$, $\|Y(\cdot)\| = \sup\limits_{t\in[0,T_0]}\|Y(t)\|$, $Y(t)$ – матрица, $D_1(a,b) = \{(t, x, c) : t \in [0, T_0], x \in E_n, |x| \le a, c \in E_n, |c| \le b\}$, $W_1(\gamma) = \{\alpha \in E_n : |\alpha| \le \gamma\}$, $C(b) = \{c \in E_n : |c| \le b\}$, $W_2(a) = \{x \in E_n : |x| \le a\}$, a, b, γ, T_0 – некоторые положительные числа.

Будем предполагать, что на сегменте $[0, T_0]$ матрицы $H(t)$, $N(t)$ измеримы, $\|N(\cdot)\|$, $\|H(\cdot)\|$ – конечные, положительные числа, вектор-функция $f(t, x, c)$ определена, ограничена на множестве $D(a, b)$, удовлетворяет на этом множестве условию Каратеодори (непрерывна по x, c, измерима по t [5]).

Заметим, что если вектор-функция $x(t)$ измерима на сегменте $[0, T_0]$, то вектор-функция $u(t) = S(t)x(t) + R(t)c + \varphi(t, x(t), c)$ измерима на этом множестве при любом фиксированном $c \in C(\gamma)$.

Далее будем предполагать, что на множестве $D(a,b)$ вектор-функция $f(t, x, c)$ обладает свойством: для любых $t \in [0, T_0]$, $(x_1, x_2) \in W_2(a)$, $C(b)$ справедливо неравенство

$|f(t, x_2, c_2) - f(t, x_1, c_1)| \le L_1|x_2 - x_1| + L_2|c_2 - c_1|$,

в котором L_1, L_2 – постоянные числа.

Символом $P(a)$ обозначим множество определенных на сегменте $[0, T_1], (T_1 \in (0, T_0])$ вектор-функций $x(t)$, обладающее свойствами:

1) $P(a)$ – множество равномерно ограниченных вектор-функций, то есть для любой вектор-функции $x(t) \in P(a)$ выполнено неравенство $|x(t)| \le a$ при любом $t \in [0, T_1]$;

2) $P(a)$ – множество равностепенно непрерывных на множестве $[0, T_1]$ вектор-функций, то есть для любого $\varepsilon > 0$, любых $(t_1, t_2) \in [0, T_1]$ и любой вектор-функции $x(t) \in P(a)$ выполнено неравенство $|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon$, как только $|t_2 - t_1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$, где $L = \|H(\circ)\|a + \|N(\circ)\|b + L_1 a + {}$ $+ L_2 b$ (величины $\|H(\cdot)\|$, $\|N(\cdot)\|$, L_1, L_2 определены на сегменте $[0, T_0]$ и множестве $D(a, b)$);

3) $P(a)$ – множество вектор-функций $x(t)$, удовлетворяющих равенству $x(T_1) = 0$.

Очевидно, что $P(a)$ – замкнутое, компактное, выпуклое множество.

На множестве $P(a) \times C(b)$ оператор F_c определим равенством $(F_c x)(t) = \alpha + \int\limits_0^t [H(\tau)x(\tau) + {}$ $+ N(\tau)C + f(\tau, x(\tau), c)]d\tau$.

Поставленную выше задачу можно сформулировать так: найти условия существования числа $T_1 \in (0, T_0]$, вектор-функции $x^*(t) \in P(a)$ и векторов $\alpha^* \in W_1(\gamma)$, $c^* \in C(b)$, удовлетворяющих равенствам $(F_{c^*}x^*)(t) = x^*(t)$, $(F_{c^*}x^*)(T_1) = 0$.

2. Решение задачи об управляемости системы (3) без непосредственного использования фундаментальной матрицы системы линейного приближения.

Пусть $\overline{x}(t) \in P(a), c \in C(b)$. Для удобства записей положим, что $(F_c\overline{x})(t) = \tilde{x}(t)$.

Теорема 2. Пусть $a > \gamma$. Тогда существует число $T_1 \in (0, T_0]$ такое, что:

а) при любом $t \in [0, T_1]$, любых векторов $\alpha \in W_1(\gamma)$, $c \in C(b)$ и любой вектор-функции $\overline{x}(t) \in P(a)$ выполняется неравенство $|\tilde{x}(t)| \le a$;

б) для любого $\varepsilon > 0$, любых $(t_1, t_2) \in [0, T_1]$ и любой вектор-функции $\overline{x}(t) \in P(a)$ выполняется неравенство $|\tilde{x}(t_2) - \tilde{x}(t_1)| < \varepsilon$, как только $|t_2 - t_1| < \delta = \varepsilon / L$.

Доказательство. Докажем утверждение а).

Число T_1 определим неравенством $T_1 \le {}$ $\le \min\{(a - \gamma)/L, T_0\}$. Следовательно, $a - \gamma \ge LT_1$. Тогда при любом $t \in [0, T_1]$, при любых векторах $\alpha \in W_1(\gamma)$, $c \in C(b)$, любой вектор-функции $\overline{x}(t) \in P(a)$

$$|\tilde{x}(t)| \le |\alpha + \int_0^t [H(\tau)\bar{x}(\tau) + N(\tau)c +$$

$$+ f(\tau, \bar{x}\tau), c)]\,dt| \le \gamma + \|H(\cdot)\|aT_1 + \|N(\cdot)\|bT_1 +$$

$$+L_1aT_1 + L_2bT_1 = \gamma + LT_1 \le a,$$

то есть для любых $\alpha \in W_1(\gamma)$, $c \in C(b)$ и любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in P(a)$ $|\tilde{x}(t)| \le a.$

Докажем утверждение б). Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Для любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in P(a)$, любого вектора $c \in C(b)$ получим, что

$$|\tilde{x}(t_2) - \tilde{x}(t_1)| = |\int_{t_1}^{t_2} [H(t)\bar{x}(t) + N(t)c +$$

$$+ f(t, \bar{x}(t), c)]dt \le L|t_2 - t_1|.$$

Определив $\delta = \varepsilon / L$ получим, что при любых $(t_1, t_2) \in [0, T_1]$ $|\tilde{x}(t_2) - \tilde{x}(t_1)| < \varepsilon,$ как только $|t_2 - t_1| < \delta.$ Теорема доказана.

Определим условия, при которых выполнено равенство $\tilde{x}(T_1) = 0.$ С этой целью рассмотрим систему уравнений вида

$$\alpha + N_1(T_1)c +$$

$$+ \int_0^{T_1} H(t)\bar{x}(t)dt + \int_0^{T_1} f(t, \bar{x}(t), c)dt = 0 \qquad (4)$$

относительно переменных α, c; $(N_1(T_1) = \int_0^{T_1} B(t)R(t)dt).$

Теорема 3. Если матрица $N_1(T)$ неособенная при любом $T \in (0, T_0]$, то существуют числа $T_1 \in (0, T_0]$ и $\gamma > 0$ такие, что при любом векторе $\alpha \in W_1(\gamma)$ и любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in P(a)$ система (4) имеет единственное решение во множестве $C(b)$.

Доказательство. Число $T_1 \in (0, T_0]$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|N^{-1}{}_1(T_0)\|L_2T_1 = d < 1,$$

$$\|N^{-1}{}_1(T_0)\|H(\circ)\|\|aT_1 < \frac{1}{4}b,$$

$$\|N^{-1}{}_1(T_0)\|L_1aT_1 < \frac{1}{4}b, \qquad (5)$$

$$\|N^{-1}{}_1(T_0)\|L_2T_1 < \frac{1}{4}.$$

Оператор Γ согласно системе (4) определим равенством

$$\Gamma c = -N_1^{-1}(T_1)(\alpha + \int_0^{T_1} [H(t)\bar{x}(t) + f(t, \bar{x}(t), c)]dt).$$

Убедимся, что оператор Γ является оператором сжатия на множестве $C(b)$. Действительно, для любых векторов $(c_1, c_2) \in C(b)$

$$|\Gamma c_2 - \Gamma c_1| \le$$

$$\le \|N_1^{-1}(T_1)\| \left| \int_0^{T_1} [f(t, \bar{x}(t), c_2) - f(t, \bar{x}(t), c_1)dt \right| \le$$

$$\le \|N_1^{-1}(T_0)L_2\| \|c_2 - c_1\| T_1 = d|c_2 - c_1|.$$

Докажем, что оператор Γ отображает множество $C(b)$ в себя. С этой целью запишем, что

$$|\Gamma c| \le$$

$$\le \|N_1^{-1}(T_1)\|(|\alpha| + \int_0^{T_1} |H(t)\bar{x}(t)dt| + \int_0^{T_1} |f(t, \bar{x}(t), c)dt| \le$$

$$\le \|N_1^{-1}(T_0)\|(|\alpha| + \|H(\cdot)\|aT_2) + L_1aT_1 + L_2bT_1.$$

Тогда с учетом неравенств (5) получим $|\Gamma c| \le \|N_1^{-1}(T_0)\||\alpha| + \frac{3}{4}b.$

Число $\gamma > 0$ выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\|N_1^{-1}(T_0)\||\alpha| \le \|N_1^{-1}(T_0)\|\gamma < b/4.$$

Отсюда $0 < \gamma < b/(4\|N_1^{-1}(T_0)\|).$

Фиксируем число γ_1, удовлетворяющее неравенствам $0 < \gamma_1 < \min\left\{\frac{b}{4\|N_1^{-1}(T_0)\|}, a\right\}.$ Тогда приходим к выводу о том, что при любом фиксированном $\alpha \in W_1(\gamma_1)$, любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in P(a)$, любом векторе $c \in C(b)$ имеет место включение $\Gamma c \in C(b).$

По теореме Банаха существует единственный вектор $c \in C(b)$, удовлетворяющий равенству $\Gamma c = c.$ Это значит, что для любого фиксированного вектора $\alpha \in W_1(\gamma_1)$, любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in P(a)$ система (4) имеет единственное решение $c \in C(b).$ Теорема доказана.

Теорема 4. Если выполнены условия теорем 2, 3, то система (3) (следовательно, и система (1)) управляемая на множестве $W_1(\gamma_1)$.

Доказательство. Выберем число $T_1 > 0$, удовлетворяющее неравенствам (5) и неравенству $T_1 \le \min\{(a - \gamma)/L, T_0\}$. Из условия теоремы 2 следует, что для любых векторов $\alpha \in W_1(\gamma_1)$, $c \in C(b)$ и любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in P(a)$ вектор-функция $(F_c\bar{x})(t)$ равномерно непрерывная на сегменте $[0, T_1]$ с той же зависимостью δ от ε, что и любая вектор-функция $\bar{x}(t) \in P(a)$, удовлетворяет неравенству $|(F_c\bar{x})(t)| \le a$ при любом $t \in [0, T_1]$.

Из условия теоремы 3 следует, что для любого фиксированного вектора $\alpha^* \in W_1(\gamma_1)$ и любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in P(a)$ существует единственный вектор $c \in C(b)$, удовлетворяющий равенству $(F_c \bar{x})(T_1) = 0$.

Таким образом, приходим к выводу: для любого фиксированного вектора $\alpha^* \in W_1(\gamma_1)$, любой вектор-функции $x(t) \in P(a)$ существует единственный вектор $c \in C(b)$, при котором имеет место включение $(F_c \bar{x})(t) \in P(a)$.

Из определения оператора F_c следует его непрерывность на множестве $P(a) \times C(b)$. Тогда по теореме 1 существуют вектор-функция $x^*(t) \in P(a)$, $x^*(t) \in P(a)$, вектор $c^* \in C(b)$, удовлетворяющие равенству $(F_{c^*} x^*)(t) = x^*(t)$ или, что все равно, равенству

$$x^*(t) = \alpha^* + \int_0^t [H(\tau)x^*(\tau) + N(\tau)c^* + f(\tau, x^*(\tau), c^*)]dt.$$

Из этого равенства получим [6]: вектор-функция $x^*(t)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[0, T_1]$, производная $\dot{x}^*(t)$ которой почти везде на сегменте $[0, T_1]$ удовлетворяет равенству $\dot{x}^*(t) = H(t)x^*(t) + N(t)c^* + f(t, x^*(t), c^*)$ и, следовательно, равенству

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) + \eta(t, x^*(t), u^*(t)),$$

где $u^*(t) = S(t)x^*(t) + R(t)c^* + \phi(t, x^*(t), c^*)$ – управление с обратной связью, $H(t) = A(t) + B(t)S(t)$, $f(t, x^*(t), c^*) = B(t)\phi(t, x^*(t), c^*) + \eta(t, x^*(t), \bar{\phi}(t, x^*(t), c^*)$. Отсюда в силу произвольности вектора $\alpha^* \in W_1(\gamma_1)$ следует, что для любого вектора $\alpha \in W_1(\gamma_1)$ существует управление $u(t) \in U$, при котором система (1) имеет решение $x(t, \alpha, u(\cdot))$, определенное на сегменте $[0, T_1]$, удовлетворяющее равенству $x(T_1, \alpha, u(\cdot)) = 0$, то есть система (1) – управляемая на множестве $W_1(\gamma_1)$. Теорема доказана.

Одним из существенных требований в изложенных выше условиях является требование неособенности матрицы $N_1(T), T \in (0, T_0]$. Рассмотрим один способ задания матрицы $R(t)$ с целью нахождения условий неособенности матрицы $N_1(T)$.

Матрицу $R(t)$ определим равенством

$$R(t) = \sum_{\nu=1}^{k} (r_{ij}^{(\nu)} \phi_{ij}^{(\nu)}(t))_{1\,1}^{mn}, \tag{6}$$

в котором $r_{ij}^{(\nu)}$ – постоянное число, подлежащее определению, $\phi_{ij}^{(\nu)}(t)$ – известная, ограниченная, измеримая на сегменте $[0, T]$ функция.

Вектор r порядка kmn определим равенством $r = (r_1, r_2, ..., r_m, r_{m+1}, r_{m+2}, ..., r_{2m}, ..., r_{kmn})$, в котором $r_1 = r_{11}^{(1)}$, $r_2 = r_{21}^{(1)}$, … , $r_m = r_{m1}^{(1)}$, $r_{m+2} = r_{22}^{(1)}$, … , $r_{2m} = r_{m2}^{(1)}$, … , $r_{mn} = r_{nm}^{(1)}$, $r_{mn+1} = r_{11}^{(2)}$, $r_{mn+2} = r_{21}^{(2)}$, … , $r_{kmn} = r_{nm}^{(k)}$. Тогда, вычисляя определитель матрицы $N_1(T) = \int_0^T B(t)R(t)dt$, получим, что

$$\det N_1(T) = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in D} a_{(i_1, i_2, ..., i_n)}^{(T)} \, r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_n},$$

$a_{(i_1, i_2, ..., i_n)}^{(T)}$ – известное число, D – множество сочетаний из натуральных чисел $\overline{1, kmn}$. В некоторых практических случаях может оказаться полезным следующее утверждение.

Теорема 5 [7]. Для того, чтобы матрица $N_1(T)$ была неособенной, необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно сочетание $(i_1, i_2, ..., i_n) \in D$, при котором $a_{(i_1, i_2, ..., i_n)}^{(T)} \neq 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть существует сочетание $(i_1, i_2, ..., i_n) \in D$, удовлетворяющее неравенству $a_{(i_1, i_2, ..., i_n)}^{(T)} \neq 0$. Тогда, выбирая произвольные, но фиксированные, отличные от нуля числа $r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_n}$ и полагая $r_j = 0$ при $\bar{j} \in \{i_1, i_2, ..., i_n\}$, получим неособенную матрицу $N_1(T)$, определитель которой $\det N_1(T) = a_{(i_1, i_2, ..., i_n)}^{(T)} \, r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_n} \neq 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 5 следует, что если $a_{(i_1, i_2, ..., i_n)}^{(T)} \neq 0$ при любом $i \in \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ $r_i = r \neq 0$, а при любом $\bar{j} \in \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ $r_j = 0$, то $\det N_1(T_1) = a_{(i_1, i_2, ..., i_n)}^{(T)} r^n$, матрица $N_1(T) = r\overline{N}(T)$, $\overline{N}(T)$ – неособенная матрица $\|\overline{N}(T)\| = \frac{1}{\gamma}\|N_1(T)\|$.

3. Решение задачи об управляемости системы (3) с использованием фундаментальной матрицы системы линейного приближения.

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = H(t)x$, $X(0) = E$, E – единичная матрица и пусть число $\overline{L} = \| X(\cdot) \| \| X(\cdot)^{-1} \| \times \times (\|N(\cdot)\| b + L_1 a + L_2 b)$ (величины $\|X(\cdot)\|$, $\|X(\cdot)^{-1}\|, \|N(\cdot)\|, L_1, L_2$ определены на множестве $D(a,b)$). Оператор F_c на множестве $P(a)$ определим равенством $(F_c \overline{x})(t) = X(t)\alpha + X(t) \times \times \int_0^t X^{-1}(\tau)[N(\tau)c + f(t, \overline{x}(t), c)]d\tau$, где $\overline{x}(t) \in P(a)$, $P(a)$ – ранее введенное множество вектор-функций, определенных на сегменте $[0, T_1]$, $\delta = \varepsilon / \overline{L}$ (число T_1 может быть другим).

Как и ранее, для простоты записей примем, что $(F_c \overline{x})(t) = \tilde{x}(t)$, $\overline{x}(t) \in P(a)$.

Теорема 6. Пусть $a > \|X(\circ)\|\gamma$. Тогда существует такое число $T_1 \in (0, T_0]$, что

а) при любом $t \in (0, T_1]$, любых векторов $\alpha \in \in W_1(\gamma)$, $c \in C(b)$ и любой вектор-функции $\overline{x}(t) \in P(a)$ выполняется неравенство $|\tilde{x}(t)| \le a$;

б) для любого $\varepsilon > 0$, любых $(t_1, t_2) \in [0, T_1]$ и любой вектор-функции $\overline{x}(t) \in P(a)$ выполняются неравенства $|\tilde{x}(t_2) - \tilde{x}(t_1)| \le \varepsilon$; как только $|t_2 - t_1| < < \delta = \varepsilon / L$

Доказательство. Докажем утверждение а).

Число T_1 определим неравенством $0 < T_1 \le \le \min\{(a - \|X(\cdot)\|\gamma) / \overline{L}, T_0\}$. Следовательно, $a - - \| X(\cdot) \| \gamma \ge \overline{L}_1 T_1$. Тогда при любом $t \in [0, T_1]$, любых векторах $\alpha \in W_1(\gamma)$, $c \in C(b)$, любой вектор-функции $\overline{x}(t) \in P(a)$

$$|\tilde{x}(t)| = \left| X(t)\alpha + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)[N(\tau)c + \right.$$

$$\left. + f(t, \overline{x}(t), c)\right] d\tau \Big| \le \|X(\cdot)\|\gamma + \|X(\cdot)\| \|X^{-1}(\cdot)\|$$

$$[\|N(\cdot)\| b + L_1 a + L_2 b] T_1 \le \|X(\cdot)\|\gamma + \overline{L} T_1 \le a,$$

то есть $|\tilde{x}(t)| \le a$.

Доказательство утверждения б) аналогично доказательству утверждения б) в теореме 2. Теорема доказана.

Определим условия, при которых выполняется равенство $\tilde{x}(T) = 0$. Рассмотрим систему уравнений

$$\alpha + N_2(T_1)c + \int_0^{T_1} X^{-1}(t) f(t, \overline{x}(t), c)dt = 0 \qquad (6)$$

относительно переменных α и c,

$$N_2(T_1) = \int_0^{T_1} X^{-1}(t) N(t) dt.$$

Теорема 7. Если матрица $N_2(T)$ неособенная при любом $T \in (0, T_0]$, то существуют числа $T_1 \in (0, T_0]$ и $\gamma > 0$ такие, что при любом векторе $\alpha \in W_1(\gamma)$ и любой вектор-функции $\overline{x}(t) \in P(a)$ система (6) имеет единственное решение на множестве $C(b)$.

Доказательство. Число $T_1 \in (0, T_0]$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|N_2^{-1}(T_0)\| \|X^{-1}(\circ)\| L_2 T_1 = d < 1,$$

$$\|N_2^{-1}(T_0)\| \|X^{-1}(\circ)\| L_1 a T_1 < \frac{b}{3},$$

$$\|N_2^{-1}(T_0)\| \|X^{-1}(\circ)\| L_2 T_1 < \frac{1}{3}.$$

Оператор Γ определим равенством

$$\Gamma c = -N_2^{-1}(T_1)(\alpha + \int_0^{T_1} X^{-1}(t) f(t, \overline{x}(t),\ c)dt)$$

согласно системе (6). Остальные рассуждения совершенно аналогичны соответствующим рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы 3.

Теорема 8. Если выполнены условия теорем 6 и 7, то система (3) (следовательно, и система (1)) управляемая на множестве $W_1(\gamma_1)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.

Отметим, что если $R(t)$ определить согласно равенству (6), а $N_1(T_1)$ заменить на $N_2(T_1)$, то получим теорему, аналогичную теореме 5.

Пример. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t, x), \qquad (7)$$

в которой $A(t)$ – 3×3-матрица, $B(t) = = [colon(t, 1, 0),\ colon(0, t, 1)]$, $t \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$ – некоторое число, $f(t, x)$ – трехмерная вектор-функция.

Найдем множество управляемости системы (7).

Согласно принятым ранее обозначениям получим, что

$W_2(a) = \{x \in E_3 : |x| \le a\}$, $C(b) = \{c \in E_3 :\ |c| \le b\}$.

Управление $u(t)$ будем искать в виде $u(t) = = S(t)x + R(t)c$, $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$. Тогда система (7) может быть записана так:

$$\dot{x} = H(t)x + N(t)c + f(t, x),$$

где $H(t) = A(t) + B(t)S(t)$, $N(t) = B(t)R(t)$.

Далее будем предполагать, что матрицы $A(t)$, $S(t)$ определены и непрерывны на сегменте $[0, T_0]$, вектор-функция $f(t, x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L_1 на множестве $[0, T_0] \times W_2(a)$, матрица

$$R_1(t)=[colon\,(2r_{11}^{(1)},\ 3t^4 r_{21}^{(1)}),$$
$$colon\,(3t^4 r_{12}^{(1)},\, r_{22}^{(1)}),\quad colon\,(2t^2 r_{13}^{(1)},\ \ r_{23}^{(1)} t\sin^2 t)],$$
$$R_2(t)=[colon\,(r_{11}^{(2)}t^2,\, r_{21}^{(2)}t^4),$$
$$colon\,(r_{12}^{(2)}3t\sin t,\, r_{22}^{(2)}t^4\cos t),$$
$$colon\,(r_{13}^{(2)}t,\ \ r_{23}^{(2)}t\sin^2 t)].$$

Для нахождения матрицы $N_1(t)$, такой, чтобы при любом $\beta\in(0,T_0]$ матрица $N_1(\beta)=\int_0^{\beta}N(t)dt$ была неособенной, введем вектор $r=(r_1,r_2,r_3,...,r_{12})$ [7], элемент которого определим равенствами $r_1=r_{11}^{(1)}$, $r_2=r_{21}^{(1)}$, $r_3=r_{12}^{(1)}$, $r_4=r_{22}^{(1)}$, …, $r_{10}=r_{22}^{(2)}$, $r_{11}=r_{13}^{(2)}$, $r_{12}=r_{23}^{(2)}$.

Путем вычисления находим, $\det N_1(\beta)=r_1r_4r_{11}\beta^5\frac{1}{6}+...$ Тогда, полагая, что $r_1=r_4=r_{11}=1$, при любом $j\overline{\in}\{1,4,11\}$ $r_j=0$, получим, что $R(t)=[colon(2,0),colon(0,1),colon(t,0)]$. Следовательно, матрица $N_1(\beta)$=$[colon(\beta^2,2\beta,0)$, $colon(0,\frac{\beta^2}{2},\beta),\quad colon(\frac{\beta^3}{3},\frac{\beta^2}{2},0)]$.

Пусть $\gamma\in(0,a)$ – некоторое число, $b=\left\|N_1^{-1}(T_0)\right\|(\gamma+\|H(\cdot)\|aT_0+L_1aT_0)$, $L=\|H(\cdot)\|a+\|N(\circ)\|b+L_1a$, $T_1=\min\{\frac{a-\gamma}{L},T_0\}$. Тогда согласно теореме 2 для любых векторов $\alpha\in W_1(\gamma)$, $c\in C(b)$ и любой вектор-функции $\overline{x}(t)\in P(a)$ выполняется неравенство $|\overline{x}(t)|\le a$ и вектор-функция $\tilde{x}(t)$ на $[0,T_1]$ равномерно непрерывна с числом $\delta=\varepsilon/L$.

Вектор c определим равенством

$$c=-N_1^{-1}(T_1)(\alpha+\int_0^{T_1}H(t)\overline{x}(t)dt+\int_0^{T_1}f(t,\overline{x}(t))dt. \quad (8)$$

Убедимся, что $c\in C(b)$. Действительно, $|c|\le\left\|N_1^{-1}(T_1)\right\|(\gamma+\|H(\circ)\|aT_1+L_1aT_1\le\left\|N_1^{-1}(T_0)\right\|(\gamma+\|H(\circ)\|aT_0+L_1aT_0)=b,$ то есть $c\in C(b)$. Это значит, что для любого вектора $\alpha\in W_1(\gamma)$, любой вектор-функции $\overline{x}(t)\in P(a)$ существует единственный вектор $c\in C(b)$, удовлетворяющий системе (8). Следовательно, для любого фиксированного вектора $\alpha^*\in W_1(\gamma)$, любой вектор-функции $\overline{x}(t)\in P(a)$ существует единственный вектор $c\in C(b)$, при котором имеет место включение $(F_c\overline{x})(t)\equiv\tilde{x}(t)\in P(a),\quad t\in\ \in[0,T_1]$.

Непрерывность оператора на множестве $P(a)\times C(b)$ следует из его определения на этом множестве. Тогда на основании теоремы 1 существуют такие вектор $c^*\in C(b)$ и вектор функция $x^*(t)\in P(a)$, что

$$x^*(t)=\alpha^*+\int_0^t H(\tau)x^*(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t N(\tau)c^*d\tau+\int_0^t f(\tau,x^*(t))d\tau.$$

Отсюда $\dot{x}^*(t)=H(t)x^*(t)+N(t)c^*+f(t,x^*(t))$. Это значит, что система (7) управляемая на множестве $W_1(T_1)$ с управлением $u^*(t)=S(t)x^*(t)+R(t)c^*$, $t\in[0,T_1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Альбрехт Э.Г.** Об управлении движением нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 324–334.
2. **Арутюнов А.В., Розова В.Н.** Регулярные нули квадратичного отображения и локальная управляемость нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 6. С. 723–728.
3. **Тонков Е.Л.** Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 599–606.
4. **Терёхин М.Т.** Бифуркация периодических решений функционально-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. 1999. № 10. С. 37-42.
5. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1954. Т. 2. 415 с.
6. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной. М.: Гостехниздат, 1957. 552 с.
7. **Потапова И.С.** Необходимые и достаточные условия полной управляемости линейных систем дифференциальных уравнений. Управление специального вида // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2010. № 15. С.95–98.

Терёхин Михаил Тихонович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: m.terehin@rsu.edu.ru