УДК 517.91

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОЦЕНОК ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

А.З. Пчелова
Чувашский государственный педагогический университет имени И.Я. Яковлева

CONSTRUCTION OF APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN THE ANALYCITY REGION

A.Z. Pchelova
I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с подвижными особыми точками, в общем случае не интегрируемое в квадратурах. Приводится доказательство теоремы существования и единственности решения этого уравнения в области аналитичности. Предлагаются аналитические приближенные решения уравнения с точными и возмущенными значениями начальных условий. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Ключевые слова: нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, подвижная особая точка, приближенное решение, возмущение начальных данных, область аналитичности.

The article considers a nonlinear ordinary differential equation with movable special points which is not solvable in quadratures in a common case. The proof of the existence and uniqueness theorem for the solution of this equation in the analyticity region is provided. The authors suggest analytical approximate solutions of the equation with exact and approximate values of initial conditions. These results are accompanied by examples of calculations.

Keywords: nonlinear ordinary differential equation, movable special point, approximate solution, perturbation of the initial conditions, analyticity region.

Актуальность и методы исследования.

Решение многих задач из различных областей науки и техники приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям либо линейным, либо нелинейным. Теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно полно разработана и обладает точными и приближенными методами решения. Теория нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений менее развита. Нелинейные дифференциальные уравнения являются одной из сложных категорий дифференциальных уравнений в силу наличия у их интегралов подвижных особых точек. Как отмечается в работе [1], нелинейные дифференциальные уравнения являются не разрешимыми в квадратурах в общем случае. Существующие приближенные методы решения линейных дифференциальных уравнений не применимы к нелинейным дифференциальным уравнениям. В связи с этим является актуальной задача нахождения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе применяется приближенный метод решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками алгебраического типа. Идея этого метода представлена в работах [2–11] и состоит в разделении области поиска решения на область аналитичности и окрестность подвижных особых точек, а затем в построении приближенных решений в этих областях. Алгоритм приближенного метода связан с решением следующих задач.

1. Доказательство теорем существования и единственности решения дифференциального уравнения в области аналитичности и в окрестности подвижной особой точки.

2. Построение аналитических приближенных решений рассматриваемого уравнения как в области аналитичности, так и в окрестности подвижной особой точки.

3. Исследование влияния возмущения начальных данных и подвижной особой точки на приближенное решение соответственно в области аналитичности и в окрестности подвижной особой точки.

4. Нахождение точных границ области применения приближенного решения рассматриваемого уравнения в окрестности возмущенных значений подвижных особых точек.

5. Получение необходимых и достаточных условий существования подвижных особых точек рассматриваемого уравнения и построение алгоритма нахождения этих точек с заданной точностью на конечном промежутке.

Данный метод ранее применялся не только к скалярным дифференциальным уравнениям Пенлеве, Риккати, Абеля, но и к матричным дифференциальным уравнениям Риккати [2–11].

В настоящей работе рассматривается задача построения приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с полиномиальной правой частью в области аналитичности.

Результаты исследований и их обсуждение.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'(x)=\sum_{i=0}^{5} f_i\, y^i(x)\,, \tag{1}$$

где f_i, $i=0,1,\dots,5,$ – функции вещественной переменной x, в общем случае не разрешимое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками.

С помощью подстановки $y=w(x)\,u(\xi)-\dfrac{f_4}{5f_5}$ при условиях $\dfrac{f_4}{5f_5}=\dfrac{f_3}{2f_4}=\dfrac{f_2}{f_3}$, где $w=$ $=\exp\displaystyle\int\left(f_1-\frac{f_2 f_4}{10 f_5}\right)dx$, $\xi=\int f_5\, w^4 dx$, уравнение (1) приводится к виду

$$u'(\xi)=u^5(\xi)+I(x)\,, \tag{2}$$

при этом $f_5\, w^5 I=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f_4}{5f_5}\right)+f_0-\dfrac{1}{5}\dfrac{f_1 f_4}{f_5}+$ $+\dfrac{4}{5^5}\dfrac{f_4^5}{f_5^4}$. Уравнение (2) будем называть нормальной формой уравнения (1).

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(x)=y^5(x)+r(x), \tag{3}$$

$$y(x_0)=y_0\,. \tag{4}$$

Докажем существование и единственность аналитического решения этой задачи. Известные теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения – теорема Коши и теорема Пикара [12, 13], относящиеся к одному подходу доказательства теорем, не позволяют нам решить поставленную задачу. В работах [2–11] предложен другой подход к доказательству теорем – метод мажорант (Лагранжа), который применяется не к правой части дифференциального уравнения, как в классическом случае, а к самому решению уравнения. Такой подход позволяет получить решение поставленной задачи.

Теорема 1. Пусть функция $r(x)$ задачи Коши (3)–(4) удовлетворяет следующим условиям:

1) $r(x)\in C^{\infty}$ в области $|\,x-x_0\,|<\rho_1$, где $\rho_1=const>0$;

2) $\exists\, M_1:\dfrac{|\,r^{(n)}(x_0)\,|}{n!}\le M_1$, где $M_1=const,$ $n=0,1,2\dots$

Тогда решение этой задачи Коши является аналитической функцией

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(x-x_0)^n \tag{5}$$

в области $|\,x-x_0\,|<\rho_2$, $\rho_2=\min\left\{\rho_1,\dfrac{1}{4\,(M_2+1)^4}\right\}$,

$$M_2=\max\left\{|\,y_0\,|,\ \sup_n\frac{|\,r^{(n)}(x_0)\,|}{n!}\right\},\ n=0,1,2,\dots$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $r(x)$ является аналитической в области $|\,x-x_0\,|<\rho_1$ и может быть представлена в виде

$$r(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(x-x_0)^n. \tag{6}$$

Подставляя ряд (5) в уравнение (3) и учитывая выражение (6), получим $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(x-x_0)^n\right)'=$ $=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(x-x_0)^n\right)^5+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(x-x_0)^n$. Выполнив соответствующие преобразования, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_n\,(x-x_0)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{D}_n(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(x-x_0)^n$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_n(x-x_0)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\hat{D}_n+A_n)(x-x_0)^n, \tag{7}$$

где $\hat{D}_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_{n-i}D_i^*$, $D_n^*=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} D_{n-i}D_i$, $D_n=$ $=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_{n-i}C_i$, $n=0,1,2,\dots$

Равенство (7) обратится в тождество при условиях

$$n\,C_n=\hat{D}_{n-1}+A_{n-1},\ n=1,2,\dots \tag{8}$$

Это рекуррентное соотношение позволяет однозначно определить все коэффициенты C_1, $C_2,\dots,C_n,\dots$ и получить таким образом формальное единственное представление решения задачи (3)–(4) в области $|x-x_0|<\rho_1$ в виде степенного ряда (5).

На основании соотношения (8) для коэффициентов структуры решения (5) будем иметь

$$C_n = P_{4n+1}(C_0, A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}),\ n=1,2,\ldots,$$

где P_{4n+1} – полином степени $(4n+1)$ от C_0, $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ с положительными рациональными коэффициентами.

Докажем сходимость ряда (5) в области $|x-x_0|<\rho_2$. Обозначим

$$M_2=\max\left\{|y_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\},\ n=0,1,2,\ldots$$

Из соотношения (8) с учетом вышеуказанного обозначения имеем:

$$|C_1|\le M_2(M_2+1)^4,\ |C_2|\le \frac{5}{2} M_2(M_2+1)^8,$$

$$|\tilde{N}_3|\le \frac{15}{2}M_2(M_2+1)^{12},\ \ |\tilde{N}_4|\le \frac{195}{8}\cdot M_2(M_2+1)^{16},$$

$$|\tilde{N}_5|\le \frac{663}{8}M_2(M_2+1)^{20},\ \ldots$$

Учитывая закономерность образования коэффициентов C_n, методом математической индукции подтверждаем гипотезу о структуре оценок этих коэффициентов

$$|C_n|\le \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(4i+1)}{n!} M_2(M_2+1)^{4n},\ n=2,3,\ \ldots \quad (9)$$

Рассмотрим ряд

$$M_2+M_2(M_2+1)^4(x-x_0)+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(4i+1)}{n!}M_2(M_2+1)^{4n}(x-x_0)^n,$$

являющийся мажорирующим для ряда (5). На основании признака Даламбера получаем сходимость этого ряда в области $|x-x_0|<\dfrac{1}{4(M_2+1)^4}$.

Следовательно, эта область будет областью сходимости и для ряда (5).

Полагая $\rho_2=\min\left\{\rho_1, \dfrac{1}{4(M_2+1)^4}\right\}$, получаем сходимость ряда (5) в области $|x-x_0|<\rho_2$, что и завершает доказательство теоремы.

Оценки для коэффициентов C_n ряда (5), полученные в теореме 1, позволяют построить приближенное решение

$$y_N(x)=\sum_{n=0}^{N}C_n(x-x_0)^n \quad (10)$$

задачи Коши (3)–(4).

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1, 2 теоремы 1. Тогда для аналитического приближенного решения (10) задачи Коши (3)–(4) справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x)\le$$
$$\le\frac{\prod_{i=1}^{N}(4i+1)}{(N+1)!}\cdot\frac{M_2(M_2+1)^{4N+4}|x-x_0|^{N+1}}{1-4(M_2+1)^4|x-x_0|}$$

в области $|x-x_0|<\rho_2$, $\rho_2=\min\left\{\rho_1, \dfrac{1}{4(M_2+1)^4}\right\}$,

$$M_2=\max\left\{|y_0|,\ \sup_n\frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\},\ n=0,1,2,\ldots$$

Доказательство. С учетом оценок (9) для коэффициентов C_n имеем

$$\Delta y_N(x)=|y(x)-y_N(x)|=$$
$$=|\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n-\sum_{n=0}^{N}C_n(x-x_0)^n|=$$
$$=|\sum_{n=N+1}^{\infty}C_n(x-x_0)^n|\le$$
$$\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(4i+1)}{n!}M_2(M_2+1)^{4n}|x-x_0|^n\le$$
$$\le\frac{\prod_{i=1}^{N}(4i+1)}{(N+1)!}\cdot\frac{M_2(M_2+1)^{4N+4}|x-x_0|^{N+1}}{1-4(M_2+1)^4|x-x_0|}.$$

Следовательно, теорема доказана.

Пример 1. Найдем приближенное решение задачи Коши (3)–(4), где $r(x)\equiv 0$, $y(0)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{11}}$.

Эта задача имеет точное решение

$$y=\frac{1}{\sqrt[4]{11-4x}}.$$

Вычислим радиус аналитичности с учетом начального условия задачи Коши

$$\rho_2=0{,}043413185.$$

Выберем значение $x=0{,}015$, принадлежащее области аналитичности $|x-x_0|<\rho_2$. Расчеты, связанные с оценкой приближенного решения уравнения в случае точного значения начального условия в области аналитичности, представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

x	y	y_3
0,015	0,54985182329	0,54985182325

Примечание: y – значение точного решения данного уравнения; y_3 – значение приближенного решения.

Таблица 2

Δ	Δ_1'	Δ_2'
$4{,}7\cdot 10^{-11}$	0,00113851	10^{-6}

Примечание: Δ – абсолютная погрешность; Δ_1' – априорная погрешность, полученная по теореме 2; Δ_2' – апостериорная погрешность.

С помощью теоремы 2 можно решить обратную задачу теории погрешности, связанную с нахождением апостериорной погрешности, а именно определить значение N по заданной точности приближенного решения ε. Для случая $\varepsilon = 10^{-6}$ получаем значение $N = 9$. Фактически для $N = 4, 5, \ldots, 9$ получаем уточнения приближенного решения, которые в общей сумме не превышают требуемой точности ε. Следовательно, мы можем ограничиться в структуре приближенного решения значением $N = 3$. Таким образом, получаем апостериорную погрешность Δ_2' для приближенного решения y_3, равную значению $\varepsilon = 10^{-6}$.

Ранее для задачи Коши (3)–(4) рассматривался случай точного значения начального условия и было построено приближенное решение (10). При осуществлении аналитического продолжения возникает задача исследования влияния возмущения начальных данных на приближенное решение

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (x - x_0)^n, \qquad (11)$$

где $\tilde{C}_n$ – возмущенные значения коэффициентов.

Рассмотрим задачу Коши с возмущенным начальным условием

$$y'(x) = y^5(x) + r(x), \qquad (12)$$

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0. \qquad (13)$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1, 2 теоремы 1 и известна абсолютная величина возмущения начального условия $|\tilde{y}_0 - y_0| = \Delta\tilde{y}_0$.

Тогда для аналитического приближенного решения (11) задачи Коши (12)–(13) справедлива оценка погрешности

$$\Delta\tilde{y}_N(x) \le$$

$$\le \frac{\prod_{i=1}^{N}(4i+1)}{(N+1)!}\cdot\frac{M_3(M_3+1)^{4N+4}|x-x_0|^{N+1}}{1-4(M_3+1)^4|x-x_0|} +$$

$$+\Delta M\left(1+\frac{5(M_3+\Delta M+1)^4|x-x_0|}{1-5(M_3+\Delta M+1)^4|x-x_0|}\right)$$

в области $|x - x_0| < \rho_5$, где $\Delta M = \Delta\tilde{y}_0$,

$$M_3 = \max\left\{|\tilde{y}_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\}, \qquad n = 0,1,2, \ldots,$$

$$\rho_5 = \min\{\rho_3, \rho_4\}, \quad \rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{4(M_3+1)^4}\right\}, \quad \rho_4 = \frac{1}{5(M_3+\Delta M+1)^4}.$$

Доказательство. Используя классический подход, имеем

$$\Delta\tilde{y}_N(x) = |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \le$$

$$\le |y(x)-\tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x)-\tilde{y}_N(x)| =$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N}\tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| +$$

$$+\left|\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{C}_n - C_n)(x-x_0)^n\right| \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty}|\tilde{C}_n||x-x_0|^n + \sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\,|x-x_0|^n =$$

$$= \Delta_1 + \Delta_2,$$

где $|\tilde{C}_n - C_n| = \Delta\tilde{C}_n$.

Для выражения Δ_1 с учетом (9) по теореме 2 имеем

$$\Delta_1 \le \frac{\prod_{i=1}^{N}(4i+1)}{(N+1)!}\cdot\frac{M_3(M_3+1)^{4N+4}|x-x_0|^{N+1}}{1-4(M_3+1)^4|x-x_0|}.$$

На основании метода математической индукции для выражения $\Delta\tilde{C}_n$ следует оценка

$$\Delta\tilde{C}_n \le \frac{\prod_{i=1}^{n}(4i+1)}{n!}\Delta M\,(M_3+\Delta M+1)^{4n},$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

где $\Delta M = \Delta\tilde{y}_0$.

Таким образом, для выражения Δ_2 получаем оценку

$$\Delta_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n|x-x_0|^n =$$

$$= \Delta\tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n|x-x_0|^n \le \Delta M +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}(4i+1)}{n!}\Delta M\,(M_3+\Delta M+1)^{4n}\,|x-x_0|^n \le$$

$$\le \Delta M\left(1+\frac{5(M_3+\Delta M+1)^4|x-x_0|}{1-5(M_3+\Delta M+1)^4|x-x_0|}\right),$$

справедливую в области

$$|x-x_0| < \rho_4 = \frac{1}{5(M_3+\Delta M+1)^4}.$$

С учетом области действия оценки для Δ_1 окончательно для выражения $\Delta\tilde{y}_N(x)$ получаем область $|x - x_0| < \rho_5$, где $\rho_5 = \min\{\rho_3, \rho_4\}$,

$$\rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{4(M_3+1)^4}\right\}.$$

Таким образом, доказательство теоремы 3 завершено.

Пример 2. Построим первое аналитическое продолжение для приближенного решения задачи Коши, рассмотренной в примере 1.

Начальное условие задачи Коши

$$\tilde{y}_0(0{,}015) = 0{,}549851823\!25.$$

Задача имеет точное решение $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{11-4x}}$.

Вычислим радиус аналитичности

$$\rho_5 = 0{,}03466325$$

Выберем значение $x = 0{,}031$, принадлежащее области аналитичности $|x - x_0| < \rho_5$. Расчеты, связанные с оценкой приближенного решения уравнения в случае возмущенного значения начального условия в области аналитичности, представлены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

x	y	$\tilde{y}_3$
0,031	0,55065894741	0,55065894730

Примечание: y – значение точного решения; $\tilde{y}_3$ – значение приближенного решения.

Таблица 4

Δ	Δ_1''	Δ_2''
$1{,}1\cdot 10^{-10}$	0,001543362	10^{-6}

Примечание: Δ – абсолютная погрешность; Δ_1'' – априорная погрешность, полученная по теореме 3; Δ_2'' – апостериорная погрешность.

Аналогичным образом, как и в примере 1, получаем решение обратной задачи теории погрешности, а вместе с ней и апостериорную погрешность. Определяем значение N с заданной точностью ε приближенного решения (11). В случае $\varepsilon = 10^{-6}$ получаем $N = 10$. Фактически для $N = 4, 5, 6, \ldots, 10$ получаем уточнения аналитического приближенного решения, которые в общей сумме не превышают требуемой точности ε. Следовательно, можно ограничиться в структуре аналитического приближенного решения значением $N = 3$. При этом получаем апостериорную погрешность Δ_2'' для приближенного решения $\tilde{y}_3$, равную значению $\varepsilon = 10^{-6}$.

Выводы. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в вещественной области, для которого построено аналитическое приближенное решение и исследовано влияние возмущения начального условия на приближенное решение. Теоретические результаты подтверждены расчетами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Орлов В.Н.** Связь нелинейного дифференциального уравнения с наличием и характером подвижных особых точек // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий: сб. статей по материалам международной научно-практической конференции, 12–15 августа, 2013 г. Чебоксары, 2013. С. 30–35.
2. **Орлов В.Н., Лукашевич Н.А.** Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 10. С. 1829–1832.
3. **Орлов В.Н., Фильчакова В.П.** Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. ІМ НАН України. Киев. 1998. Т. 19. С. 155–165.
4. **Орлов В.Н.** О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.
5. **Орлов В.Н.** Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати // Научно-технические ведомости С.-Петерб. гос. политехн. ун-та. 2008. № 4. С.102–108.
6. **Орлов В.Н.** Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник Моск. авиац. ин-та. 2008. Т. 15, № 5. С. 128–135.
7. **Орлов В.Н.** Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точ-

ки // Вестник Воронеж. гос. техн. ун-та. 2009. Т. 5, № 10. С. 192–195.
8. **Орлов В.Н.**, **Редкозубов С.А.** Математичекое моделирование решения дифференциального уравнения // Известия Ин-та инженерной физики. 2010. № 3/17. С. 2–3.
9. **Орлов В.Н.** Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2/8. С. 399–405.
10. **Орлов В.Н**. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Чебоксары: Перфектум, 2012. 112 с.
11. **Орлов В.Н**. Метод приближенного решения первого и второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.
12. **Голубев В.В.** Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
13. **Матвеев Н.М.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб: Специальная литература, 1996. 372 с.

Пчелова Алевтина Зиноновна – старший преп. кафедры алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38,
тел: +7(352)62-30-84, e-mail: apchelova@mail.ru