УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ПОРТАЛЬНОГО КРАНА, НА ОСНОВЕ ДИВЕРГЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

О.Н. Масина, Е.В. Игонина
Елецкий государственный университет имени И.А.Бунина

STABILITY RESEARCH OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS DESCRIBING MOVEMENT OF THE PORTAL CRANE ON THE BASIS OF DIVERGENT LYAPUNOV FUNCTIONS

O.N. Masina, E.V. Igonina

Исследована устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение портального крана, с помощью метода дивергентных функций Ляпунова. Указанный метод основан на совместном использовании функций Ляпунова и дивергентных функций поля скоростей.

Ключевые слова: устойчивость, обыкновенные дифференциальные уравнения, портальный кран, функция Ляпунова, дивергенция, логический регулятор.

Stability of solutions of the ordinary differential equations describing movement of the portal crane by aid of a method of divergent Lyapunov functions is researched The specified method is based on sharing of functions of Lyapunov and divergent functions of a field of speeds.

Keywords: stability, ordinary differential equations, portal crane, Lyapunov function, divergence, logic controller.

Введение.

Одним из эффективных методов анализа устойчивости решений дифференциальных уравнений является метод функций Ляпунова [1–4]. Методы исследования устойчивости с помощью обобщенных функций Ляпунова разработаны в [4]. В настоящей работе использованы результаты работ [5–7]. Индексно-дивергентный метод анализа устойчивости динамических систем развит в [6]. Современные методы анализа устойчивости динамических систем с логическими регуляторами представлены в работах [7, 8]. Перспективным направлением в изучении устойчивости динамических систем является применение комбинированных методов. В работе [9] на основе развития прямого метода Ляпунова установлены условия устойчивости систем интеллектного управления. В работах [10–12] с помощью различных методов получены условия устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение перевернутого маятника.

При изучении динамических систем актуальной проблемой является исследование устойчивости дифференциальных уравнений, описывающих движение портального крана [13–15]. Различные виды портальных кранов, применяемых на строительных площадках и в портах, были изучены в работах [13, 14].

Портальный кран представляет собой двухмассовую систему маятникового типа. Исследование устойчивости маятниковых систем проводится различными методами. В настоящей работе на основе дивергентных функций Ляпунова проведено исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих движение портального крана. Указанный метод основан на совместном использовании функций Ляпунова и дивергентных функций поля скоростей.

Предварительные сведения. Дифференциальные уравнения, описывающие движения портального крана под действием управляющей силы, имеют вид [15]

$$\begin{gathered} ml\ddot{x}\cos\varphi + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = -h_\varphi\dot{\varphi}, \\ (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = f(t) - h_x\dot{x}, \end{gathered} \tag{1}$$

где x – продольное смещение тележки, M – масса тележки, m – масса груза, l – длина жесткого стержня, φ – угол отклонения стержня от вертикали, h_φ – вязкое трение в узле крепления стержня к тележке, h_x – коэффициент трения при движении тележки по рельсам, $f(t)$ – управляющее воздействие, создаваемое электродвигателем.

Задача управления краном состоит в перемещении груза с помощью тележки из исходного неподвижного положения $x = 0$ в новое заданное неподвижное положение $x = x^*$.

Запишем уравнения (1) в терминах переменных состояния

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u, \qquad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\varphi, \dot{\varphi}, x - x^*, \dot{x})^T$ – вектор отклонений от состояния равновесия,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4 \\ x_4 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_4 \end{pmatrix}, \; b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = -\frac{(M+m)g}{Ml}, a_{22} = -\frac{(M+m)h_\varphi}{Mml^2},$$

$$a_{24} = \frac{1}{Ml}\left(\frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x\right), a_{41} = \frac{mg}{M}, a_{42} = \frac{h_\varphi}{Ml},$$

$$a_{44} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\gamma\varepsilon}{R\beta} + h_x\right), b_2 = -\frac{\gamma}{MRl}, b_4 = \frac{\gamma}{MR},$$

где R – сопротивление катушек ротора, β – коэффициент пропорциональности ЭДС к скорости вращения катушек, $\gamma = \mu_m\beta^{-1}$, μ_m – коэффициент пропорциональности вращающего момента вала электродвигателя к величине тока, ε – коэффициент скорости вращения вала электромотора.

Управление u вырабатывается логическим регулятором, функционирование которого описывается правилами вида

если x_1 есть X^i_1 и ... и x_n есть X^i_n, то $u = u_i(x)$,
$i = 1, \ldots, n$,

где X^i_1, X^i_n – нечеткие множества, $u \in U$, $U \subset R$, $u_i(x) = F_i(x)$ может рассматриваться как функция вектора состояния x.

Приведем результаты, которые будут использованы в дальнейшем при исследовании системы (2). Рассмотрим нелинейную систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = g(x,h), \; x \in R^n, h \in H \subset R^k, \qquad (3)$$

которое определено на множестве $B(r) \times H$, где $B(r) = \{x \in R^n\colon \|x\| \le r\}$, $r > 0$.

Предполагается, что функция $g(x,h)$ удовлетворяет условию Липшица относительно $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для каждого $h \in H \subset R^k$, то есть

$$\exists\, L = L(h) > 0\colon \left|g(x^1,h) - g(x^2,h)\right| \le L\left|x^1 - x^2\right|$$

$\forall x^1$, $x^2 \in B(r)$, и решения $x(t, x_0, h)$ уравнения (3) непрерывно зависят как от начальной точки $x_0 = x(0, x_0, h)$, так и от параметра $h = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ для $k \ge 1$.

Решение $x = 0$ называется равномерно устойчивым относительно множества $H \subset R^k$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\delta = \delta(\varepsilon) \; |x_0| < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x(t, x_0, h)| < \varepsilon \; \forall t \in R^+, \forall h \in H. \qquad (4)$$

В (4) число δ зависит от ε, но не зависит от выбора точки $h \in H$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [5]. Если тривиальное состояние равновесия $x = 0$ уравнения (3) асимптотически устойчиво для каждого h, принадлежащего компактному множеству $H \subset R^k$, то состояние равновесия $x = 0$ уравнения (3) равномерно устойчиво относительно множества H.

Понятие дивергентной функции Ляпунова рассмотрено в работах [10, 11]. Если z – асимптотически устойчивое состояние равновесия дифференциального уравнения вида $\dot{x} = g(x)$ и $V(x)$ – функция Ляпунова, для которой выполняется условие $-\dot{V} > \alpha_1 V^{\alpha_2}$, $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, то существует множитель Эйлера $\sigma(x)$, для которого дивергенция $\mathrm{div}(\sigma(x)f(x))$ является отрицательно определенной. Функция Ляпунова, обладающая указанным свойством, называется дивергентной функцией Ляпунова для состояния равновесия z.

Изучение системы (2) при сделанных предположениях можно свести к изучению системы вида

$$\dot{x} = g(x,u), \quad x \in R^n, u \in U \subset R, \qquad (5)$$

где множество U является компактным.

На основании теорем об устойчивости [6, 7], полученных дивергентным методом с применением дивергентной функции Ляпунова, можно сформулировать условия устойчивости для системы (5). Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2 [7]. Пусть div $g(x,u) \le 0$ в окрестности состояния равновесия $x = (x_1, ..., x_n) = 0$ системы (5) и существует дивергентная функция Ляпунова в силу указанной системы. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (5) асимптотически устойчиво для каждого $u \in U$.

Теорема 3 [7]. Пусть $\mathrm{div}[\sigma(x)\, g(x,u)] \le 0$ в окрестности состояния равновесия $x = (x_1, ..., x_n) = 0$ системы (5), где $\sigma(x)$ – множитель Эйлера, и пусть существует дивергентная функция Ляпунова в силу системы (5). Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (5) асимптотически устойчиво для каждого $u \in U$.

Теорема 4 [7]. Если состояние равновесия $x = 0$ системы (5) асимптотически устойчиво для каждого u, принадлежащего компактному множеству $U \subset R$, то состояние равновесия $x = 0$ системы (5) равномерно устойчиво относительно U.

Условия устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих движение портального крана.

На основе применения дивергентного метода с учетом (1), (2), (5) из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть для рассматриваемой модели портального крана (2) в окрестности состояния равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ выполнено условие

$$a_{22} + b_2\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} + a_{44} + b_4\frac{\partial F}{\partial x_4} \le 0$$

и существует дивергентная функция Ляпунова в силу системы. Тогда состояние равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову для каждого $u \in U$.

Из теоремы 4 с помощью применения дивергентного метода для модели портального крана получены следующие утверждения.

Теорема 6. Если выполняются условия теоремы 5 для каждого u, принадлежащего компактному множеству $U \subset R$, то состояние равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ равномерно устойчиво относительно множества U.

На основе применения дивергентного метода с учетом (1), (2), (5) из теоремы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 7. Пусть для рассматриваемой модели портального крана (2) в окрестности состояния равновесия выполнено условие

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial\sigma}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4 + b_2F(x)) + \\ + \frac{\partial\sigma}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial\sigma}{\partial x_4}\left(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_4 + b_4F(x)\right) + \\ + \sigma\left(a_{22} + b_2\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} + a_{44} + b_4\frac{\partial F}{\partial x_4}\right) \le 0,$$

где $\sigma(x)$ – множитель Эйлера, и пусть существует дивергентная функция Ляпунова в силу системы (2). Тогда состояние равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ асимптотически устойчиво для каждого $u \in U$.

Из теоремы 4 с помощью применения дивергентного метода для модели портального крана получена следующая теорема.

Теорема 8. Если выполняются условия теоремы 7 для каждого u, принадлежащего компактному множеству $U \subset R$, то состояние равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ равномерно устойчиво относительно множества U.

Результаты, полученные в настоящей статье, являются продолжением работ [10–12] по изучению устойчивости динамических систем маятникового типа и могут быть использованы в задачах исследования устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движения динамических систем при постоянно действующих возмущениях.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ (проект № 13-08-00710).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1955.
2. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. **Немыцкий В.В., Степанов В.В**. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949; 3-е изд. М.: УРСС, 2004.
4. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.
5. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О равномерной устойчивости состояния равновесия дифференциального уравнения, зависящего от многомерного параметра // Доклады Академии наук. 2001. Т. 377, № 4. С. 458–487.
6. **Дружинина О.В.** Индексно-дивергентный метод исследования устойчивости нелинейных динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2007.
7. **Масина О.Н., Дружинина О.В.** Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.
8. **Пегат А.** Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
9. **Дружинина О.В, Масина О.Н.** Развитие метода функций Ляпунова для исследования устойчивости дифференциальных уравнений, моделирующих системы предикатного управления // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13, № 4. С. 9–13.
10. **Масина О.Н., Игонина Е.В.** Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих движение перевернутого маятника, с помощью функций Ляпунова и логического регулятора // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13, № 4. С. 58–62.
11. **Дружинина О.В., Масина О.Н., Игонина Е.В.** Исследование устойчивости перевернутого маятника с помощью функций Ляпунова и свойств дивергенции поля скоростей // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. М.: ВЦ им. А.А. Дородницына, 2013. Вып. 15. С. 120–131.
12. **Игонина Е.В.** Алгоритмы исследования устойчивости управляемых маятниковых систем на основе дивергентных функций Ляпунова // «Проблемы управления безопасностью сложных систем»: тр. XXI Междунар. конф. М.: ИПУ РАН, 2013. С. 483–486.
13. **Бортяков Д.Е., Орлов А.Н.** Специальные грузоподъемные машины. Портальные, судовые и плавучие краны. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009.
14. **Полосин М.Д.** Устройство и эксплуатация подъемно-транспортных и строительных машин. М.: ACADEMIA, 1999.
15. **Баландин Д.В., Городецкий С.Ю.** Классические и современные методы построения регуляторов в примерах: электрон. учебно-метод. пособие. Нижний Новгород: Нижегор. гос.ун-т, 2012.

Масина Ольга Николаевна – д. ф.-м. наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления и математического обеспечения Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина
399770, Липецкая обл., г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28,
тел.: +7 (47467) 6-92-71, e-mail: olga121@inbox.ru