УДК 517.925

ДВУСТОРОННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАЛОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

В.В. Абрамов

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

BILATERAL STABILITY OF SMALL PERIODIC SOLUTION

V.V. Abramov

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в гладкой правой части в терминах свойств нелинейного приближения оператора монодромии получен признак двусторонней устойчивости по параметру для малого периодического решения.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, малое периодическое решение, малый параметр, устойчивость, оператор монодромии.

For a system of ordinary differential equations with a small parameter in the smooth right-hand part in the terms of the properties of non-linear approximation of monodromy operator theorems were established about a bilateral stability on parameter for small periodic solution.

Keywords: system differential equations, small periodic solution, small parameter, stability, operator of monodromy.

Вначале приведем элементарный **пример**. Для скалярного уравнения с малым параметром μ

$$\dot{x} = \mu^2 x - x^3, \tag{0}$$

считая 1-периодической по t его правую часть, оценим последовательность (x_k) сдвигов решения на период $x_k = x(k,a,\mu)$, $x(0,a,\mu) = a$. Так как $x_k^2 = \mu^2 \big/ \left(1-(1-(\mu/a)^2)\exp(-2\mu^2 k)\right)$, то последовательность (x_k) задана на Z, то есть нелокально, причем для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом $|\mu|$ и $|a| < |\mu|$ имеем: $x_k^2 < \varepsilon^2$, $k \in Z$. В этом смысле нулевое решение уравнения (0) двусторонне устойчиво «по параметру», но по Ляпунову асимптотически устойчиво влево и неустойчиво вправо, поскольку $\lim\limits_{k\to-\infty} x_k^2 = 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^2 = \mu^2$. Очевидно, здесь двусторонний характер устойчивости нулевого решения порождается степенным разложением правой части уравнения на слагаемые, ограничивающие возмущенные решения как влево ($\mu^2 x$), так и вправо ($-x^3$).

Используем идею данного примера для распространения результатов работы [1].

Рассмотрим в R^n систему вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x,\mu) \tag{1}$$

с ω-периодической по t правой частью, гладко зависящей от x и от малого параметра $\mu \in R^m$, $f(t,0_n,\mu) \equiv 0_n$, $f'_x(t,0_n,0_m) \equiv 0_{nn}$.

Задача. Найти условия, при которых малое ω-периодическое решение $x(t,a^*,\mu^*)$, $a^* = a(\alpha) \neq 0_n$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} a^* = 0_n$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \mu^* = 0_m$, системы вида (1) двусторонне α-устойчиво.

Определение 2 [1] для односторонней устойчивости периодического решения в силу леммы 1 [1] можно сформулировать в терминах последовательности степеней оператора монодромии.

Определение. Малое ω-периодическое решение $x(t,a^*,\mu^*)$ является α-устойчивым вправо (влево), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1, \delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|u\| < \delta_1$, $0 < \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in Z_+$ ($s \in Z_-$) определено значение $x(s\omega, a^*+u, \mu^*)$ и справедлива оценка $\|x(s\omega, a^*+u, \mu^*) - a^*\| < \varepsilon$. Решение $x(t,a^*,\mu^*)$ двусторонне α-устойчиво, если оно α-устойчиво и вправо, и влево.

В силу гладкости правой части системы (1) будем предполагать, что имеет место представление вида

$$X(\omega)\int_0^{\omega} X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a, \mu)d\tau = p(a,\mu) + \tilde{p}(a,\mu), \tag{2}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, $p(a,\mu)$ – векторная форма,

$p(\alpha a, \alpha\mu) = \alpha^k p(a, \mu)$, $\quad \lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{-k} \|\tilde{p}(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$

(здесь и далее $\|*\|$ – какая-либо норма в R^n, а также согласованная с ней матричная норма). При условии (2) для системы (1) правый оператор монодромии локально имеет вид [1]

$$x(\omega, a, \mu) = X(\omega)a + p(a, \mu) + \psi(a, \mu), \qquad (3)$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{-k} \|\psi(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$.

Допустим, выполняется необходимое условие ветвления малого решения [2]

$$\det(X(\omega) - E) = 0 \qquad (4)$$

и существуют $a_0 \in \ker[X(\omega) - E] \setminus \{0_n\}$, $\mu_0 \neq 0_m$, для которых

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n, \quad rang\, J = n, \qquad (5)$$

где $J = [p'_a(a_0, \mu_0)K \;\; p'_\mu(a_0, \mu_0)]$ – $n \times (r+m)$-матрица, K – фундаментальная $n \times r$-матрица решений системы $[X(\omega) - E]a = 0_n$. При условиях (4)-(5) система (1) имеет малое ω-периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\|z(\alpha)\| = 0$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\|\bar{\mu}(\alpha)\| = 0$, с направлением ветвления (a_0, μ_0) [1].

Далее рассмотрим возмущение правого оператора монодромии $d^+(\alpha, u) = x(\omega, a^* + u, \mu^*) - a^* = X(\omega)u + p(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0) + \tilde{\psi}(\alpha, u)$, $\tilde{\psi}(\alpha, u) = (p(a^* + u, \mu^*) - p(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0)) + \psi(a^* + u, \mu^*)$. Так как $p(a, \mu)$ – вектор-форма порядка k от a и μ, то по условию (4) справедливо разложение $p(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0) = P_1 u + \sum\limits_{s=2}^{k} \alpha^{k-s} \bar{p}_s(u)$, в котором $P_1 = p'_a(a_0, \mu_0)$, $\bar{p}_s(u)$ – вектор-форма порядка s. В частности, $p_k(u) = p(u, 0_m)$.

Выделим какие-либо $n \times n$-матрицы $P(u)$: $P(u)u = p(a_0 + u, \mu_0)$ и $P_2(u)$: $P_2(u)u = p(u, 0_m)$.

Пусть существуют числа $c > 0$ и $b > 0$, для которых при всех $\lambda : \|\lambda\| = c$ и малых $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|X(\omega) + \alpha P(\lambda)\| \leq 1 - \alpha b. \qquad (6)$$

При условии (6) малое ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ будет α-устойчивым вправо [1].

Теперь оценим возмущения для левого оператора монодромии. Аналогично (2), допустим:

$$X(-\omega)\int_0^{-\omega} X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau = q(a, \mu) + \tilde{q}(a, \mu),$$

$q(a, \mu)$ – вектор-форма от a и μ, $q(\alpha a, \alpha\mu) = \alpha^k q(a, \mu)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{-k} \|\tilde{q}(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0.$ Тогда левый оператор монодромии локально имеет вид $x(-\omega, a, \mu) = X(-\omega)a + q(a, \mu) + \varphi(a, \mu),$ причем $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{-k} \|\varphi(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$. Рассмотрим возмущение $d^-(\alpha, u) = x(-\omega, a^* + u, \mu^*) - a^* = X(-\omega)u + q(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0) + \tilde{\varphi}(\alpha, u)$, $\tilde{\varphi}(\alpha, u) = (q(a^* + u, \mu^*) - q(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0)) + \varphi(a^* + u, \mu^*)$.

Замечание 1. При условиях (4)-(5) справедливо равенство $q(a_0, \mu_0) = 0_n$.

Действительно, так как $x(t, a^*, \mu^*)$ – малое ω-периодическое решение, то $d^-(\alpha, 0_n) = 0_n$ при всех α, достаточно близких к нулю. Тогда из условия $[X(-\omega) - E]a_0 = 0_n$ следует, что $d^-(\alpha, 0_n) = \alpha^k (q(a_0, \mu_0) + \alpha^{-k}\tilde{\varphi}(\alpha)) = 0_n$, причем $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{-k}\tilde{\varphi}(\alpha) = 0_n$. Итак, если $q(a_0, \mu_0) \neq 0_n$ для малых α, то имеем противоречие: $d^-(\alpha, 0_n) \neq 0_n$.

$q(a, \mu)$ – вектор-форма порядка k от a и μ, поэтому возможно разложение $q(\alpha a_0 + u, \alpha\mu_0) = \sum\limits_{s=0}^{k} \alpha^{k-s} \bar{q}_s(u)$, в котором $\bar{q}_s(u)$ – вектор-форма порядка s. В частности, из замечания 1 следует, что $\bar{q}_0(u) \equiv 0_n$. Кроме того, очевидно, $\bar{q}_k(u) = q(u, 0_m)$, $\bar{q}_1(u) = Q_1 u$, $Q_1 = q'_a(a_0, \mu_0)$.

Выделим какие-либо $n \times n$-матрицы $Q(u)$: $Q(u)u = q(a_0 + u, \mu_0)$ и $Q_2(u)$: $Q_2(u)u = q(u, 0_m)$.

Пусть существует число $b_1 > 0$, для которого при всех малых $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|X(-\omega) + \alpha Q_1\| \leq 1 - \alpha b_1. \qquad (7)$$

Выделив по переменной u линейное приближение, представим возмущение левого оператора монодромии в виде

$$d^-(\alpha, u) = [X(-\omega) + \alpha^{k-1}Q_1 + Q_2(\alpha) + H(\alpha, u)]u,$$

где $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{1-k} Q_2(\alpha) = 0_{nn}$, $\quad \lim\limits_{u\to 0_n} H(\alpha, u) \equiv 0_{nn}$.

В силу оценки (7) существует такое $\delta_1 > 0$, что $\|X(-\omega) + \alpha^{k-1}(Q_1 + \alpha^{1-k}Q_2(\alpha)\| \leq 1 - \alpha^k b_1 / 2$ для всех $\alpha < \delta_1$. Теперь найдем $\delta_2 > 0$, при котором $\|H(\alpha, u)\| \leq \alpha^{k-1} b_1 / 4$ для каждого фиксированного $\alpha < \delta_1$ и любого $u : \|u\| < \delta_2$. Тогда

$$\|d^-(\alpha, u)\| \leq (1 - \alpha^{k-1} b_1 / 4)\|u\| < \|u\| < \delta_2. \qquad (8)$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_2\}$. Рассмотрим последовательность степеней левого оператора монодромии $d_s^-(\alpha, u) = d^-(\alpha, d_{s-1}^-(\alpha, u))$, $d_0^-(\alpha, u) = u$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что при $\|u\| < \delta$ определено значение $d_2^-(\alpha, u)$. Значит, по индукции в силу неравенства (8) величины

$d_s^-(\alpha,u)$ определены при всех $s \in N$, и справедлива оценка $\| d_s^-(\alpha,u)\| < \| d_{s-1}^-(\alpha,u)\| < \ldots < \|u\| < \varepsilon$. Следовательно, по данному выше определению ω-периодическое решение $x(t,a^*,\mu^*)$ является α-устойчивым влево.

Итак, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполняются условия (3)–(7), то система (1) имеет двусторонне α-устойчивое малое ω-периодическое решение.

Замечание 2. Для малого периодического решения $x(t,a^*,\mu^*)$ система в вариациях имеет левую матрицу монодромии вида $Y^-(\alpha) = X(-\omega) + {}+\alpha^{k-1}Q_1 + Q_2(\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{1-k}Q_2(\alpha) = 0_{nn}$. Поэтому из оценки (7) следует, что спектральный радиус этой матрицы $\rho(Y^-(\alpha)) < 1$ для всех малых $\alpha > 0$. Значит, решение $x(t,a^*,\mu^*)$ асимптотически устойчиво влево по линейному приближению для всех малых $\alpha > 0$ [2].

Выделим по другому принципу первое приближение для $d^-(\alpha,u)$. Допустим, существуют числа $c_2 > 0$ и $b_2 > 0$, для которых при всех $\lambda : \|\lambda\| = c_2$ и малых $\beta > 0$ справедлива оценка

$$\|X(-\omega) + \beta Q_2(\lambda)\| \le 1 - \beta b_2. \qquad (9)$$

Возмущение левого оператора монодромии представим в виде

$$d^-(\alpha,u) = [X(-\omega) + Q_2(u) + G(\alpha,u) + V(\alpha,u)]u,$$

где $\lim\limits_{\beta\to 0} \beta^{1-k}\|G(\alpha,\beta u)\| \equiv 0$, $V(0,u) \equiv 0_{nn}$. Возьмем $u = \beta\lambda$, $\|\lambda\| = c_2$. Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех $\beta : \beta < \delta_1 / c_2$ и $\alpha : \alpha < \delta_1$ выполнялось неравенство $\|G(\alpha,\beta\lambda)\| \le \beta^{k-1}b_2 / 4$. Существует $\delta_2 : 0 < \delta_2 \le \delta_1$, для которого из условия $\alpha < \delta_2$ при всех $\beta : \delta_1 /(2c_2) \le \beta < \delta_1 / c_2$ верна оценка $\|V(\alpha,\beta\lambda)\| \le \beta^{k-1}b_2 / 4$. Без ограничения общности $\|X(-\omega) + Q_2(u) + G(\alpha,u) + V(\alpha,u)\| < 2$, если $\alpha < \delta_2$ и $\beta < \delta_1 /(2c_2)$. При этом $\| d^-(\alpha,u)\| < 2\|u\| < \delta_1$. Если же $\alpha < \delta_2$ и $\delta_1 /(2c_2) \le \beta < \delta_1 / c_2$, то $\| d^-(\alpha,u)\| \le (1 - \beta^{k-1}b_2 / 2)\|u\| < \delta_1$. Итак, произвольно выбрав $\varepsilon > 0$ получим, что $\| d^-(\alpha,u)\| < \varepsilon$ для всех $u : \|u\| < \delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ и $\alpha < \delta_2$. Тогда по индукции при всех $s \in N$ справедлива оценка $\| d_s^-(\alpha,u)\| < \varepsilon$. Значит, решение $x(t,a^*,\mu^*)$ является α-устойчивым влево по определению.

Итак, установлено следующее утверждение.

Теорема 2. Если выполняются условия (3)–(6) и (9), то система (1) имеет двусторонне α-устойчивое малое ω-периодическое решение.

Замечание 3. Если $\mu = 0_m$, то для системы (1) левый оператор монодромии принимает вид $x(-\omega,a,0_m) = X(-\omega)a + Q_2(a)a + \varphi(a,0_m)$, причем $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^{-k}\|\varphi(\alpha a,0_m)\| \equiv 0$. Поэтому в силу оценки (9) нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову влево при $\mu = 0_m$. В этом смысле для α-устойчивости влево имеет место некритический случай [3].

Если достаточные условия односторонней устойчивости переставить местами, то по аналогии с установленными теоремами 1 и 2 получим следующие утверждения.

Теорема 3. Если: 1) выполняются условия (3)-(5); 2) $\|X(-\omega) + \alpha Q(\lambda)\| \le 1 - \alpha b$ при всех λ: $\|\lambda\| = c$ и малых $\alpha > 0$, где $b > 0$ и $c > 0$ – некоторые числа; 3) $\|X(\omega) + \alpha P_1\| \le 1 - \alpha b_1$ при всех малых $\alpha > 0$, где $b_1 > 0$ – некоторое число, то система (1) имеет двусторонне α-устойчивое малое ω-периодическое решение.

Теорема 4. Если: 1) выполняются условия (3)-(5); 2) $\|X(-\omega) + \alpha Q(\lambda)\| \le 1 - \alpha b$ при всех λ: $\|\lambda\| = c$ и малых $\alpha > 0$, где $b > 0$ и $c > 0$ – некоторые числа; 3) $\|X(\omega) + \beta P_2(\lambda)\| \le 1 - \beta b_2$ при всех малых $\beta > 0$ и $\lambda : \|\lambda\| = c_2$, где $c_2 > 0$ и $b_2 > 0$ – некоторые числа, то система (1) имеет двусторонне α-устойчивое малое ω-периодическое решение.

Замечание 4. Если ω-периодичны все решения системы $\dot{x} = A(t)x$, то $X(\pm\omega) = E$. Тогда из равенства (2) следует, что $q(a,\mu) = -p(a,\mu)$.

При $X(\omega) = E$ в условии (5): $K = E$, $J = [P_1 \ \ p'_\mu(a_0,\mu_0)]$. Условие 3) теоремы 3 принимает вид $\|E + \alpha P_1\| \le 1 - \alpha b_1$. Тогда $\det P_1 \ne 0$ [4] и $rang\, J = n$. Итак, в силу замечания 4 по теоремам 1 и 3 справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Если выполняются условия: 1) $X(\omega) = E$; 2) существуют $a_0 \ne 0_n$, $\mu_0 \ne 0_m$, для которых $p(a_0,\mu_0) = 0_n$; 3) $\|E \pm \alpha P_1\| \le 1 - \alpha b_1$ при всех малых $\alpha > 0$, где $b_1 > 0$ – некоторое число; 4) $\|E \mp \alpha P(\lambda)\| \le 1 - \alpha b$ при всех $\lambda : \|\lambda\| = c$ и малых $\alpha > 0$, где $b > 0$, $c > 0$ – некоторые числа, то система (1) имеет двусторонне α-устойчивое малое ω-периодическое решение.

В силу замечания 4 по теоремам 2 и 4 справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Если выполняются условия: 1) $X(\omega)=E$, 2) существуют $a_0 \neq 0_n$, $\mu_0 \neq 0_m$, для которых $p(a_0,\mu_0)=0_n$; 3) $\|E \pm \alpha P_1\| \leq 1-\alpha b_1$ при всех малых $\alpha>0$, где $b_1>0$ – некоторое число; 4) $\|E \mp \beta P_2(\lambda)\| \leq 1-\beta b_2$ при всех малых $\beta>0$ и $\lambda: \|\lambda\|=c_2$, где $c_2>0$ и $b_2>0$ – некоторые числа, то система (1) имеет двусторонне α-устойчивое малое ω-периодическое решение.

Замечание 5. Теоремы 1-6 нетрудно распространить и на случаи, когда первые приближения односторонних операторов монодромии ($p(a,\mu)$ – для правого (см. (2)), $q(a,\mu)$ – для левого) оказываются векторными функциями с однородными компонентами различных порядков. Например, $p(\alpha a,\alpha\mu)=colon(\alpha^{k_1},\ldots,\alpha^{k_n})p(a,\mu)$.

Замечание 6. Если в теоремах 1-6 взять $a_0=0_n$ и проигнорировать условие (5) для ветвления малого периодического решения, то получим достаточные признаки двусторонней устойчивости нулевого решения проявляющейся при отклонении μ от нулевого значения вдоль луча $\alpha\mu_0$.

Пример. Рассмотрим систему вида (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1=\dfrac{\sin t}{2-\cos t}x_1+ \\ \quad +(\mu^2\phi(t)-\rho(x))(16\mu^2-\rho(x))x_1, \\ \dot{x}_2=\dfrac{\cos t}{2+\sin t}x_2+ \\ \quad +(\mu^2\phi(t)-\rho(x))(12\mu^2-\rho(x))x_2, \end{cases} \qquad (10)$$

$\phi(t)=6-4\cos t+\sin t-0{,}75\sin^2 t$, $\rho(x)=x_1^2+x_2^2$.

При отклонении μ от нулевого значения вдоль луча $\alpha\mu_0$ система (10) имеет по крайней мере 4 малых 2π-периодических решения

$$x_1(t)=\pm\mu(2-\cos t),\quad x_2(t)=\pm\mu(1+0{,}5\sin t)$$

с направлениями ветвления $(a_0,\mu_0): a_0=(\pm1,\pm1)$, расположенные в инвариантных четвертях координатной плоскости.

Выясним, каков характер устойчивости положительного малого периодического решения.

Для соответствующей линейной однородной системы $X(t)=\begin{pmatrix}2-\cos t & 0\\ 0 & 1+0{,}5\sin t\end{pmatrix}$ при $\mu=0$, $X(2\pi)=E$. Согласно (2): $p(a,\mu)=\dfrac{\pi}{64}\begin{pmatrix}p_1(a)\\ p_2(a\end{pmatrix}-$

$$-\mu^2\pi\begin{pmatrix}3175a_1a_2^2/64+3373a_1^3/16\\ 2797a_2a_1^2/16+2599a_2^3/64\end{pmatrix}+\mu^4\pi\begin{pmatrix}180a_1\\ 135a_2\end{pmatrix},$$

где $p_1(a)=227a_1a_2^4+3632a_1^5+1288a_1^3a_2^2$, $p_2(a)=$ $=3632a_2a_1^4+227a_2^5+1288a_1^2a_2^3$.

Выбрав значения $a_0=(1,1)$ и $\mu_0=1$ получим: $p(a_0,\mu_0)=0_2$, $J=-\dfrac{\pi}{32}\begin{pmatrix}4940 & 1433 & 6373\\ 2636 & 857 & 3493\end{pmatrix}$, $rangJ=2$. То есть достаточное условие типа (5), гарантирующее ветвление малого 2π-периодического решения по направлению (a_0,μ_0), выполняется для системы (10), что совпадает с предварительными выводами.

Найдем $P_1=p'_a(a_0,\mu_0)=-\dfrac{\pi}{32}\begin{pmatrix}4940 & 1433\\ 2636 & 857\end{pmatrix}$ и

$$p(u,0)=P_2(u)u=\frac{\pi}{64}\sigma(u)Eu,\quad \sigma(u)=\frac{p_1(u)}{u_1}=\frac{p_2(u)}{u_2}.$$

Выберем матричную норму: $\|M\|_2=\sqrt{\rho(M^TM)}$. При этом $\|E+\alpha P_1\|_2 \leq 1-\alpha$, если $\alpha\in(0;0{,}0003)$; $\|E-\beta P_2(u)\|_2 \leq 1-227\pi\beta/64$. Значит, выполняются условия 3) и 4) теоремы 6. Итак, малое 2π-периодическое решение системы (10) с направлением ветвления (a_0,μ_0) двусторонне α-устойчиво (в частности, асимптотически устойчиво по Ляпунову вправо). Этот вывод согласуется с расположением интегральных кривых системы (10) в окрестности кривой периодического решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамов В.В.** Устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. 2013. Т. 13. № 4. С. 3-5.
2. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
3. **Хапаев М.М.** Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.
4. **Хорн Р.А., Джонсон Ч.Р.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Абрамов Владимир Викторович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru