УДК 517.91

ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТНОГО КОЛЬЦА СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ НА УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА

С.С. Мамонов, А.О. Харламова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

INFLUENCE OF THE FREQUENCY RING OF SYSTEM OF THE PHASE AUTO-ADJUST ON LIVING CONDITIONS OF CYCLES OF THE SECOND KIND

S.S. Mamonov, A.O. Kharlamova

Рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты. Получены условия существования предельных циклов второго рода, зависящие от параметров частотного кольца. Рассмотрен пример математической модели системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка в цепях управления.

Ключевые слова: предельный цикл второго рода, система матричных уравнений, вращение векторного поля.

We consider a system of differential equations is a mathematical model of the system-frequency phase-locked loop. Conditions for the existence of limit cycles of the second kind, which depend on the frequency of the ring. The example of the mathematical model of the frequency-phase-locked to the first-order filter in control circuits.

Keywords: limit cycle of the second kind, the system of matrix equations, the rotation of the vector field.

Введение. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1–5]. Для системы ЧФАП продолжены исследования, проведенные в работе [6], решается задача определения условий существования циклов второго рода, изучается влияние частотного кольца на вращательные режимы. Вращательные режимы представляют интерес, так как они предшествуют режиму синхронизации, а система ЧФАП может быть использована как генератор модулированных по фазовой переменной нелинейных колебаний. Известно, что добавление частотного кольца в систему фазовой автоподстройки может приводить как к увеличению области параметров системы для режимов синхронизации [1-3], так и к расширению области параметров для циклов второго рода. Базовая математическая модель системы ЧФАП приводится к системе дифференциальных уравнений [1–3]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d\,\frac{2kc^T x}{1+\tau^2(c^T x)^2}, \quad \dot{\sigma} = c^T x, \qquad (1)$$

где $x,b,c,d \in R^n$, $k,\tau \in R$, $\varphi(\sigma)-\Delta$-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. При исследовании системы (1) в работе используются результаты, полученные в [4–6]. Для системы (1) с матрицей A, имеющей собственные значения с мнимой частью, возникает необходимость нахождения решения системы трех матричных уравнений, два из которых – модифицированные уравнения Ляпунова, третье – уравнение линейной связи. Использование матричных уравнений вместо неравенств позволяет получить в качестве одного из условий существования цикла второго рода – определение промежутков знакопостоянства функции одной переменной. В работе численно-аналитическими методами показано, что применение вращения векторного поля позволяет расширить область параметров системы (1) для циклов второго рода, полученную с использованием теоремы Брауэра.

Теоретические исследования. Условия, обеспечивающие вращательные режимы системы ЧФАП, определяются результатами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = = \xi > 0$, $l^T d = -r < 0$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k < 0$, $rang\|c,l\| = 2$;

2) система матричных уравнений

$$A^T H + HA = -L_1 + 2\varepsilon_1 cc^T - 2\alpha H, \qquad (2)$$

$$(A+2kdc^T)^T H + H(A+2kdc^T) = = -L_2 + 2\varepsilon_2 cc^T - 2\alpha H, \qquad (3)$$

$$Hb = c \qquad (4)$$

относительно матриц H, L_1, L_2 при $\varepsilon_1 > 0$, $\alpha > 0$ имеет решение $H = H^T$, $L_1 = L_1^T \geq 0$, $L_2 = L_2^T \geq 0$, матрица H имеет одно отрицательное и $n-1$ положительное собственное значение;

3) матрицы H, L_1, L_2 удовлетворяют соотношениям

$$H = -\gamma_1 cc^T + \gamma_2 (l + \nu\Gamma^{-1}c)(l + \nu\Gamma^{-1}c)^T, \tag{5}$$

$$L_1 = 2\eta_1 (l + \eta_2 c)(l + \eta_2 c)^T, \tag{6}$$

$$L_2 = 2\nu_1 (l + \nu_2 c)(l + \nu_2 c)^T, \tag{7}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2 \in R^+$;

4) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma) - \frac{2k\xi y}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2 \Gamma y^2)}, \quad \dot{\sigma} = y \tag{8}$$

при $\mu = \mu_2 = \nu\Gamma^{-3/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$;

5) система уравнений (8) при $\mu = \mu_1$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma)$, $0 < F_1(\sigma) < F_2(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $M_1 = \max\limits_{\sigma} F_1(\sigma)$, $m_1 = \min\limits_{\sigma} F_1(\sigma)$, $u_F = \max\limits_{\sigma}(F_1(\sigma) F_2^{-1}(\sigma))$;

6) если $\delta = \nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \beta_1 > 0$, $D = \delta + 2kr - 2k\xi\nu\Gamma^{-1}$, то выполняется неравенство

$$D + \delta\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma) > 0 \text{ для любого } \sigma \in (-\infty; +\infty); \tag{9}$$

7) справедливы соотношения

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -\varepsilon_0 < 0, \tag{10}$$

$$q_1 = -\frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2 \Gamma M_1^2)} > 0; \tag{11}$$

8) для функций

$$f_1(u) = \tau^2 \Gamma \eta_1 u^2 ((\eta_2 \sqrt{\Gamma} - \nu\Gamma^{-1/2})u - \\ - \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2})^2,$$

$$f_2(u) = \nu_1 ((\nu_2 \sqrt{\Gamma} - \nu\Gamma^{-1/2})u - \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2})^2,$$

$$f_3(u) = \varepsilon_1 \Gamma u^2 - \mu_1 \sqrt{\Gamma} u - q_1 \sqrt{\Gamma} u + \alpha$$

выполняется неравенство

$$f(u) = m_1^2 f_1(u) + f_2(u) - f_3(u)(1 + \tau^2 \Gamma M_1^2 u^2) + \\ + \varepsilon_0 \Gamma u^2 > 0 \quad \text{для } u \in [1; u_F]. \tag{12}$$

Тогда система (1) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(z) = x^T H x + F_1^2(\sigma)$, $V_2(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma)$, $W_1(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям 4), 5) теоремы. Пусть $\Omega_1 = \{z : V_1(z) \leq 0, c^T x \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{z : V_2(z) \leq 0\}$, $\Omega_3 = \{z : W_1(z) \leq 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$. Исходя из условий 1), 5) и соотношения (4) множество Ω не является пустым, множество $\Omega_0 = \Omega \cap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ ограничено. Граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, c^T x > 0, W_1(z) \leq 0, V_2(z) \leq 0\},$$

$$\partial\Omega_2 = \{z : V_2(z) = 0,\ V_1(z) \leq 0, W_1(z) \leq 0\},$$

$$\partial\Omega_3 = \{z : W_1(z) = 0,\ V_1(z) \leq 0, V_2(z) \leq 0, c^T x \geq 0\}.$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_2$, если $z \in \partial\Omega_2$, то справедливы соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma),\ l^T x \leq -\nu\Gamma^{-1} c^T x. \tag{13}$$

В силу условий 1), 4) теоремы и (13) получим, что производная функции $V_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_3$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{V}_2(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) + \frac{2k\xi c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \sqrt{\Gamma} \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} c^T x \leq$$

$$\leq -\nu\Gamma^{-1/2} F_2(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) + \frac{2k\xi\sqrt{\Gamma} F_2(\sigma)}{1 + \tau^2 \Gamma F_2^2(\sigma)} -$$

$$-\Gamma \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} F_2(\sigma) = -\nu\Gamma^{-1/2} F_2(\sigma) -$$

$$-\Gamma F_2(\sigma) \left(\frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} + \frac{\varphi(\sigma)}{F_2(\sigma)} - \frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2 \Gamma F_2^2(\sigma))} \right) =$$

$$= -\nu\Gamma^{-1/2} F_2(\sigma) + \mu_2 \Gamma F_2(\sigma) =$$

$$= \Gamma F_2(\sigma)(\mu_2 - \nu\Gamma^{-3/2}) < 0. \tag{14}$$

Пусть $z \in \partial\Omega_3$, тогда выполняются соотношения

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1} c^T x, \tag{15}$$

$$\sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) \leq c^T x \leq \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma). \tag{16}$$

Используя условия 1), 6) теоремы и (15), (16), найдем производную функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_3$

$$\dot{W}_1(z) = -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x + \nu\varphi(\sigma) - \frac{2krc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} +$$

$$+ \nu\Gamma^{-1} l^T x - \nu\varphi(\sigma) + \frac{2k\xi\nu c^T x}{\Gamma(1 + \tau^2 (c^T x)^2)} =$$

$$= -(\nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \beta_1) c^T x +$$

$$+ \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} (\xi\nu\Gamma^{-1} - r) = -\delta c^T x +$$

$$+ \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} (\xi\nu\Gamma^{-1} - r) = -\frac{c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} \times$$

$$\times (\delta + \delta\tau^2 (c^T x)^2 - 2k\xi\nu\Gamma^{-1} + 2kr) \leq$$

$$\leq -\frac{c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} (D + \delta\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma)) < 0. \tag{17}$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_1$. Если $z \in \partial\Omega_1$ то, справедливы соотношения (16),

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x \le 0, \quad (18)$$

$$-\gamma_1 (c^T x)^2 + \gamma_2 (l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x)^2 = -F_1^2(\sigma). \quad (19)$$

Используя (18), (19), получим

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1} c^T x - \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 (c^T x)^2 - F_1^2(\sigma))^{1/2}. \quad (20)$$

Из условий 2), 3), 5) теоремы, производная функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$ удовлетворяет равенству

$$\dot V_1(z) = x^T (A^T H + HA) x + 2cx^T \varphi(\sigma) + \\ + \frac{2k}{1+\tau^2 (c^T x)^2} x^T (cd^T H + Hdc^T) x + \\ + 2F_1(\sigma) \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma} c^T x = \frac{1}{1+\tau^2 (c^T x)^2} \times \\ \times \Big(\tau^2 (c^T x)^2 x^T (A^T H + HA) x + \\ x^T \Big((A + 2kdc^T)^T H + H(A + 2kdc^T)\Big) x\Big) + \\ + 2c^T x F_1(\sigma) \left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_1(\sigma)} + \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma}\right) = \frac{1}{1+\tau^2 (c^T x)^2} \times \\ \times (\tau^2 (c^T x)^2 (-x^T L_1 x + 2\varepsilon_1 (c^T x)^2 + 2\alpha F_1^2(\sigma)) + \\ + (-x^T L_2 x + 2\varepsilon_2 (c^T x)^2 + 2\alpha F_1^2(\sigma))) - \\ - 2c^T x F_1(\sigma) \left(\mu_1 - \frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma))}\right) = \\ = -\frac{1}{1+\tau^2 (c^T x)^2} (\tau^2 (c^T x)^2 x^T L_1 x + x^T L_2 x) + \\ + \frac{2}{1+\tau^2 (c^T x)^2} (\tau^2 (c^T x)^2 (\varepsilon_1 (c^T x)^2 + \alpha F_1^2(\sigma)) + \\ + \varepsilon_1 (c^T x)^2 + \alpha F_1^2(\sigma) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(c^T x)^2) - \\ - 2\mu_1 (c^T x) F_1(\sigma) + 2(c^T x) F_1(\sigma) \frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma))} = \\ = -\frac{1}{1+\tau^2 (c^T x)^2} (\tau^2 (c^T x)^2 x^T L_1 x + x^T L_2 x) + \\ + 2\varepsilon_1 (c^T x)^2 + 2\alpha F_1^2(\sigma) - \frac{2\varepsilon_0 (c^T x)^2}{1+\tau^2 (c^T x)^2} - 2\mu_1 (c^T x) \times \\ \times F_1(\sigma) + 2(c^T x) F_1(\sigma) \frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma))} = \\ = -\frac{2}{1+\tau^2 (c^T x)^2} (\tau^2 (c^T x)^2 \eta_1 (l^T x + \eta_2 c^T x)^2 + \\ + \nu_1 (l^T x + \nu_2 c^T x)^2) + 2(\varepsilon_1 (c^T x)^2 + \alpha F_1^2(\sigma) - \\ - \mu_1 (c^T x) F_1(\sigma)) - \frac{2\varepsilon_0 (c^T x)^2}{1+\tau^2 (c^T x)^2} + \\ + 2(c^T x) F_1(\sigma) \frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1+\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma))}. \quad (21)$$

Введем обозначение $c^T x = \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma) u$. По условию 5) теоремы и по соотношению (16), для $z \in \partial\Omega_1$ выполняется неравенство

$$1 \le u \le u_F. \quad (22)$$

Из (20) получим

$$l^T x = -F_1(\sigma)(\nu\Gamma^{-1/2} u + \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2}). \quad (23)$$

Используя условия 7), 8) теоремы, соотношения (21), (22), (23), получим, что для $\dot V_1(z)$ справедливо неравенство

$$\dot V_1(z) \le -\frac{2F_1^2(\sigma)}{1+\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma) u^2} (\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma) u^2 \eta_1 ((\eta_2 \sqrt{\Gamma} - \\ - \nu\Gamma^{-1/2}) u - \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2})^2 + \\ + \nu_1 ((\nu_2 \sqrt{\Gamma} - \nu\Gamma^{-1/2}) u - \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2})^2) + \\ + 2F_1^2(\sigma)(\varepsilon_1 \Gamma u^2 + \alpha - (\mu_1 + q_1)\sqrt{\Gamma} u) - \\ - \frac{2\varepsilon_0 \Gamma F_1^2(\sigma) u^2}{1+\tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma) u^2} \le -\frac{2F_1^2(\sigma)}{1+\tau^2 \Gamma M_1^2 u^2} \times \\ \times (F_1^2(\sigma) f_1(u) + f_2(u)) + 2F_1^2(\sigma) f_3(u) - \\ - \frac{2\varepsilon_0 \Gamma F_1^2(\sigma) u^2}{1+\tau^2 \Gamma M_1^2 u^2} = -\frac{2F_1^2(\sigma)}{1+\tau^2 \Gamma M_1^2 u^2} (F_1^2(\sigma) f_1(u) + \\ + f_2(u) - f_3(u)(1+\tau^2 \Gamma M_1^2 u^2) + \varepsilon_0 \Gamma u^2) \le \\ \le -\frac{2F_1^2(\sigma)}{1+\tau^2 \Gamma M_1^2 u^2} (m_1^2 f_1(u) + f_2(u) - f_3(u)(1+ \\ + \tau^2 \Gamma M_1^2 u^2) + \varepsilon_0 \Gamma u^2) = \\ = -\frac{2F_1^2(\sigma)}{1+\tau^2 \Gamma M_1^2 u^2} f(u) < 0. \quad (24)$$

Из (14), (17), (24) следует, что множество Ω является положительно инвариантным, а множество $\Omega \cap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ – выпуклым замкнутым и ограниченным. В силу соотношения (16) и теоремы Брауэра, множество Ω содержит предельный цикл второго рода [4].

Условия разрешимости системы матричных уравнений (2)–(4) определяются следующим утверждением.

Лемма. Пусть для системы матричных уравнений (2)–(4) выполнены соотношения $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $c^T A = l^T$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $l^T b = \nu > 0$, $\tau_c = c_2 b_1 - c_1 b_2$, $\Delta_b = b^T b$, $\Delta_c = c^T c$, $w_c = c_2 d_1 - c_1 d_2$, $w_b = b_2 d_1 - b_1 d_2$, $rang\|c, l\| = 2$. Тогда матричные уравнения (2)–(4) имеют решение $H = H^T$, $L_1 = L_1^T$, $L_2 = L_2^T$, матрицы H, L_1, L_2 удовлетворяют соотношениям (5)–(7), где

$$\gamma_1 = \Gamma^{-1}, \ \gamma_2 = \frac{\Gamma}{\beta^2 \Delta_b \Delta_c}, \ \varepsilon_1 = \frac{\beta}{\tau_c}; \quad (25)$$

$$\eta_1=\frac{\beta(\Delta_b\Delta_c-\Gamma^2)^2}{\tau_c\Delta_b\Delta_c(\nu-\alpha\Gamma)^2},\ \eta_2=\frac{\alpha\Delta_b\Delta_c-\nu\Gamma}{\Delta_b\Delta_c-\Gamma^2}; \quad (26)$$

$$\varepsilon_2=\frac{k^2\Delta_c w_b^2+2k\beta w_c\Delta_b+\beta^2\Delta_b}{\beta\tau_c\Delta_b}; \quad (27)$$

$$\nu_1=\frac{\beta(\Delta_b\Delta_c-\Gamma^2)^2}{\tau_c\Delta_b\Delta_c(\nu-\alpha\Gamma)^2},$$

$$\nu_2=\frac{\beta(\alpha\Delta_b\Delta_c-\nu\Gamma)+kw_b\Delta_c(\nu-\alpha\Gamma)}{\beta(\Delta_b\Delta_c-\Gamma^2)}, \quad (28)$$

матрица H имеет одно отрицательное и одно положительное собственные значения.

Доказательство. Непосредственной подстановкой в уравнения (2)–(4) матриц

$$H=(\Delta_b)^{-1}(cb^T+Jcb^TJ), \quad (29)$$

$$L_1=-2\beta(\Delta_b)^{-1}(Jcb^T+cb^TJ^T)+2\varepsilon_1cc^T, \quad (30)$$

$$L_2=-2\beta(\Delta_b)^{-1}(Jcb^T+cb^TJ^T)-2k(cd^TH+$$
$$+Hdc^T)+2\varepsilon_2cc^T, \quad (31)$$

где

$$\varepsilon_1=\beta(\tau_c)^{-1},\ J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_2=-\Delta_b(4\beta\Delta_c\tau_c)^{-1}\det L_0, \quad (33)$$

$$\det L_0=-4\Delta_c\Delta_b^{-2}(k^2\Delta_c w_b^2+2k\beta w_c\Delta_b+\beta^2\Delta_b), \quad (34)$$

показывается, что выполняются соотношения (2)–(4). С учетом (29) матрица H имеет вид

$$H=\begin{pmatrix}h_1&h_2\\h_2&-h_1\end{pmatrix},\ h_1=(\Delta_b)^{-1}(c_1b_1-c_2b_2),$$

$$h_2=(\Delta_b)^{-1}(c_1b_2+c_2b_1), \quad (35)$$

матрица H имеет одно отрицательное и одно положительное собственные значения. Найдем вектор $l=A^Tc=\begin{pmatrix}-\alpha c_1-\beta c_2\\ \beta c_1-\alpha c_2\end{pmatrix}$. Из условий леммы $c^Tb=-\Gamma$, $l^Tb=\nu$ получим равенства

$$c_1b_1+c_2b_2=-\Gamma,\ c_1b_2-c_2b_1=\beta^{-1}(\nu-\alpha\Gamma). \quad (36)$$

Используя (35), (25), (36) для матрицы H, получим соотношение (5).

Применяя (30), (25), (32), получим

$$L_1=-2\beta(\Delta_b^{-1}(Jcb^T+cb^TJ^T)-\tau_c^{-1}cc^T)=$$
$$=2\beta\begin{pmatrix}h_2+\tau_c^{-1}c_1^2&-h_1+\tau_c^{-1}c_1c_2\\-h_1+\tau_c^{-1}c_1c_2&-h_2+\tau_c^{-1}c_2^2\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{2\beta\Delta_c}{\Delta_b\tau_c}\begin{pmatrix}b_1^2&b_1b\\b_1b&b_2^2\end{pmatrix}=\frac{2\beta\Delta_c}{\Delta_b\tau_c}bb^T. \quad (37)$$

Так как $rang\|c,l\|=2$, то для вектора b справедливо разложение по линейно независимым векторам c, l, $b=\theta_1l+\theta_2c$, где

$$\theta_1=\frac{\Delta_c\Delta_b-\Gamma^2}{\Delta_c(\nu-\alpha\Gamma)},\ \theta_2=\frac{(\alpha\Delta_c\Delta_b-\Gamma\nu)}{\Delta_c(\nu-\alpha\Gamma)}. \quad (38)$$

Из (37), (38), (26) следует, что для матрицы L_1 справедливо равенство (6).

В силу (27), (31), (33), (34), матрица L_2 определяется соотношением

$$L_2=\frac{2\Delta_c}{\beta\Delta_b\tau_c}(\beta b+kw_bc)(\beta b+kw_bc)^T. \quad (39)$$

Используя разложение вектора b по векторам c, l, $b=\theta_1l+\theta_2c$ и (38), (39), получим, что для матрицы L_2 выполняется (7), где ν_1, ν_2 удовлетворяют равенствам (28). Лемма доказана.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{b}\varphi(\sigma)+\tilde{d}\frac{2k\tilde{c}^T\tilde{x}}{1+\tau^2(\tilde{c}^T\tilde{x})^2},\ \dot{\sigma}=\tilde{c}^T\tilde{x}, \quad (40)$$

где $\tilde{A}=\begin{pmatrix}-\alpha_1&-\beta_1\\1&0\end{pmatrix}$, $\tilde{b}=\begin{pmatrix}\nu\\-\Gamma\end{pmatrix}$, $\tilde{c}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\tilde{d}=$ $=\begin{pmatrix}-r\\ \xi\end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma$. Матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2}=-2^{-1}\alpha_1\pm2^{-1}\sqrt{\alpha_1^2-4\beta_1}$. Если $4\beta_1-\alpha_1^2>0$, то матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения с мнимой частью. В системе (40) сделаем замену переменных $\tilde{x}=Sx$ и получим систему (1), где $A=S^{-1}\tilde{A}S$, $b=S^{-1}\tilde{b}$, $c^T=\tilde{c}^TS$, $d=S^{-1}\tilde{d}$. Пусть $\alpha=\alpha_1/2$, $4\beta_1-\alpha_1^2>0$, $\beta=$ $=2^{-1}\sqrt{4\beta_1-\alpha_1^2}$, $S=\begin{pmatrix}\beta-\beta_1&\alpha\\ \alpha&\beta-1\end{pmatrix}$. Тогда $\det S=\Delta_s=-\beta\Delta_c\neq0$, $\Delta_c=c^Tc$,

$$S^{-1}=\Delta_s^{-1}\begin{pmatrix}\beta-1&-\alpha\\-\alpha&\beta-\beta_1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-\alpha&\beta\\-\beta&-\alpha\end{pmatrix},$$

$$b=\Delta_s^{-1}\begin{pmatrix}\nu(\beta-1)+\alpha\Gamma\\-\nu\alpha-\Gamma(\beta-\beta_1)\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta-1\end{pmatrix},$$

$$d=\Delta_s^{-1}\begin{pmatrix}r(1-\beta)-\alpha\xi\\r\alpha+\xi(\beta-\beta_1)\end{pmatrix},\ l=A^Tc=\begin{pmatrix}\beta-\beta_1\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

Для системы (1) выполняется условие 1) теоремы.

Рассмотрим случай $\alpha_1=5/4$, $\nu=5/16$, $\Gamma=5/4$, $r=1.14$, $\xi=0.8$, $\tau=0.014$, $k=-0.144$, $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma$, $\gamma=0.8$. При проверке условий 2)–8) теоремы целесообразно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм проверки условий теоремы.

1. Для значения $\beta=0.4348$, используя соотношения (25), (26), (27), (28) из леммы, найти значения $\gamma_1=0.8$, $\gamma_2=2.427$, $\varepsilon_1=0.403$, $\varepsilon_2=0.129$, $\eta_1=0.91$, $\eta_2=1.13$, $\nu_1=0.91$, $\nu_2=0.768$. Так как $\eta_1>0$, $\nu_1>0$, то матрицы L_1, L_2 удовлетворяют неравенствам $L_1\geq0$, $L_2\geq0$. Для системы (1) выполнены условия 2), 3) теоремы.

2. Определить начальные условия предельного цикла второго рода $F_2(\sigma)$ системы (8) при $\mu = \mu_2 = \nu\Gamma^{-3/2} - 10^{-8} = 0.2236$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.8$. Численными методами находятся начальные условия $y_2(0) = 2.349$, $\sigma(0) = 0$.

3. Найти начальные условия предельного цикла второго рода $F_1(\sigma)$ системы (8) при $\mu = \mu_1 = 0.385$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.8$. Численными методами определяются начальные условия $y_1(0) = 1.944$, $\sigma(0) = 0$ и значения $M_1 = \max_\sigma F_1(\sigma) = 1.977$, $m_1 = \min_\sigma F_1(\sigma) = 0.528$, $u_F = \max_\sigma (F_1(\sigma) F_2^{-1}(\sigma)) = 2.504$.

4. Определить $\delta = \nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \beta_1 = 0.33$, $D = \delta + 2kr - 2k\xi\nu\Gamma^{-1} = 0.059$. Так как $D > 0$, $\delta > 0$, то выполняется неравенство (9).

5. Используя (10), (11), найти ε_0, q_1: $\varepsilon_0 = 0.275$, $q_1 = 0.206$.

6. Численными методами определить $\min\limits_{u \in [1; u_F]} f(u)$: $\min\limits_{u \in [1; u_F]} f(u) = 0.0014$. График функции $f(u)$ представлен на рисунке 1.

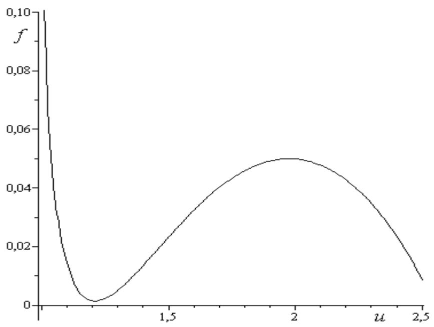

Рис. 1.

Для системы (1) выполнены условия теоремы, тогда системы (1), (40) имеют цикл второго рода.

Результаты теоремы позволяют определить в фазовом пространстве системы (40) область, содержащую начальные условия предельного цикла данной системы. Используя (5), найдем матрицу $M = S^{-1} H S^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. Для рассматриваемого примера получим $m_1 = 2.427$, $m_2 = 0.607$, $m_3 = -0.648$. В плоскости $\sigma = 0$ рассмотрим линии

$$L_1 : x^T H x = -F_1^2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}^T (S^{-1})^T H S^{-1} \tilde{x} = -F_1^2(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2.427\tilde{x}_1^2 + 2 \cdot 0.607 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - 0.648 \tilde{x}_2^2 = -1.944^2,$$

$$L_2 : l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x = 0 \Leftrightarrow \tilde{c}^T \tilde{A} \tilde{x} + \nu\Gamma^{-1} \tilde{c}^T \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}_1 + 0.25\tilde{x}_2 = 0;$$

$$L_3 : c^T x = \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow \tilde{c}^T \tilde{x} = \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 1.944\sqrt{1.25};$$

$$L_4 : c^T x = \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow \tilde{c}^T \tilde{x} = \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 2.349\sqrt{1.25}.$$

На рисунке 2 изображена область Ω_0, ограниченная линиями L_1, L_2, L_3, L_4. Область Ω_0 содержит начальные условия предельного цикла системы (40).

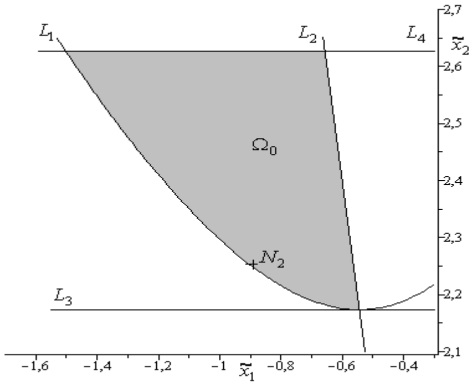

Рис. 2.

Численно-аналитические исследования.

Произведем расширение области параметров системы (40), при которых она имеет цикл второго рода. Для этого рассмотрим оператор $U = T_2 \circ T_1$, где T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (40), T_2 – параллельный перенос. Численными методами найдем множество $U(\Omega_0) \subset \Omega_0$. Оставим положительно инвариантное множество Ω без изменений, будем увеличивать значение β_1 системы (40), обозначим U_{β_1} оператор, определяемый значением β_1. При увеличении β_1 множество Ω перестает быть положительно инвариантным, но множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ содержится во множестве Ω_0. С помощью численных методов показываем, что $U_{\beta_1}(\Omega_0) \subset \Omega_0$ при увеличении значения β_1. Дальнейшее увеличение значения β_1 приводит к тому, что множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ перестает быть частью множества Ω_0, $U_{\beta_1}(\Omega_0) \not\subset \Omega_0$, $U_{\beta_1}(\Omega_0) \cap \Omega_0 \neq \varnothing$. Тогда не выполняются условия теоремы Брауэра о неподвижной точке. Для анализа неподвижных точек оператора U_{β_1} определим непрерывное векторное поле $Q(x) = x - U_{\beta_1}(x)$. Если вращение поля $Q(x)$ на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то согласно теореме 5.15 [7] оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку. Пусть $\beta_1 = \beta_{11} = 0.569$. Тогда численными методами находим множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ (изображено на рисунке 3).

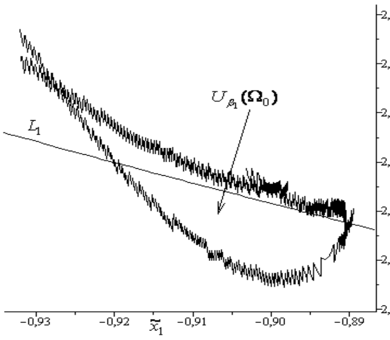

Рис. 3.

На рисунке 4 представлена линия P_{β_1}, описываемая вектором $Q(x) = x - U_{\beta_1}(x)$ при прохождении x границы $\partial\Omega_0$.

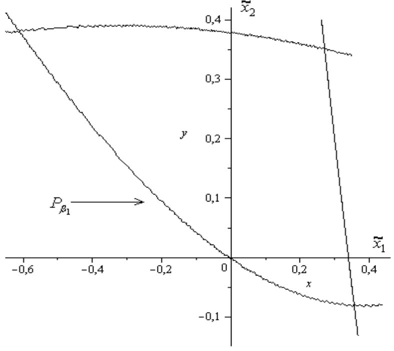

Рис 4.

Численно показывается, что вращение векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q, \partial\Omega_0) = 1$. Оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия цикла второго рода системы (40). Таким образом, использование вращения векторного поля позволило увеличить значение β_1 от $\beta_1 = 0.4348$ до $\beta_1 = \beta_{11} = 0.569$. Численными методами находится наибольшее значение $\beta_1^* = 0.645$, при котором система (40) имеет цикл второго рода, абсолютная погрешность для β_1 уменьшилась на 64%.

Численно показывается, что система (40) имеет цикл второго рода с начальными условиями $\tilde{x}_1(0) = -0.8925,\ \tilde{x}_2(0) = 2.2504,\ \sigma(0) = 0$.

На рисунке 5 изображена проекция цикла второго рода системы (40) при $\beta_1 = 0.569$ на плоскость $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Начальные условия цикла определяют точку $N_2(-0.8925; 2.2504) \in \Omega_0^{(2)}$, которая изображена на рисунке 2.

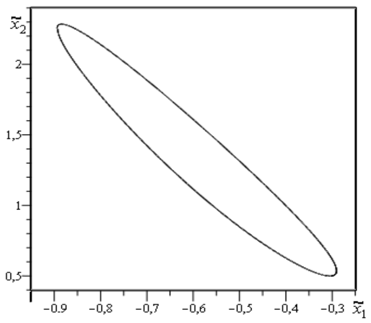

Рис. 5.

Таким образом, использование вращения векторного поля позволило увеличить область параметров системы (40) для циклов второго рода и приблизить значение параметра β_1 до точного значения $\beta^* = 0.645$, при котором у системы (40) существует цикл второго рода и определить область начальных условий для циклов второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шалфеев В.Д.** К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Радиофизика. 1969. Т. 12, № 7, С. 1037–1051.
2. **Пономаренко В.П., Матросов В.В.** Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125–1133.
3. **Шалфеев В.Д., Матросов В.В.** Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
4. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 368 с.
5. **Мамонов С.С.** Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестник Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т 11, вып. 1. С. 70–81.
6. **Мамонов С.С., Харламова А.О.** Условия существования предельных циклов второго рода для модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13, № 4. С. 51–57.
7. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.

Мамонов Сергей Станиславович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru