УДК 517.91

ПРИМЕНЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА

С.С. Мамонов, И.В. Ионова
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

THE EXISTENCE OF CYCLES SECOND-TYPE PHASE-LOCKED LOOP

S.S. Mamonov, I.V. Ionova

Рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Получены условия существования циклов второго рода. Предложено использование вращения векторного поля для определения циклов второго рода.

Ключевые слова: предельный цикл второго рода, матричные уравнения, вращение векторного поля.

We consider the system of differential equations with cylindrical phase space. To obtain conditions for the existence of cycles of the second kind. Proposed use of the rotation of the vector field to determine the cycles of the second kind.

Keywords: limit cycle of the second type, the matrix equation, rotation of the vector field.

Введение. В работе рассматривается вопрос определения циклов второго рода для системы дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Один из подходов изучения циклов как первого, так и второго рода базируется на втором методе Ляпунова. С помощью функций Ляпунова строится положительно инвариантное множество Ω . Оператор сдвига по траекториям системы дифференциальных уравнений определяет оператор U на сечении Ω_0 множества Ω . Вывод о наличии циклов делается с применением теоремы Брауэра о неподвижных точках, одним из условий которой является то, что оператор U отображает множество Ω_0 в себя. В предположении непрерывной зависимости оператора U от параметров системы дифференциальных уравнений естественно ожидать, что при некотором изменении параметров системы оператор U будет отображать множество Ω_0 в себя, но при этом может произойти потеря положительной инвариантности множества Ω , которая не повлияет на выполнение условий теоремы Брауэра. В связи с этим появляется возможность улучшения имеющихся условий существования циклов, основанных на использовании теоремы Брауэра. Возможен случай, когда при фиксированном множестве Ω изменение параметров системы дифференциальных уравнений приводит к тому, что оператор U не отображает множество Ω_0 в себя, не выполняются условия теоремы Брауэра, но при этом множество $\Omega_0 \bigcap U(\Omega_0)$ не является пустым и оператор U имеет неподвижные точки. Если в этом случае для оператора U определить векторное поле $Q(x) = x - U(x)$ на границе $\partial\Omega_0$, то наличие неподвижных точек U связано с $\gamma(Q, \partial\Omega_0)$ – вращением векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ [1]. Взаимосвязь вращения векторного поля с неподвижными точками оператора определяется теоремой из работы М.А. Красносельского [1]: если $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то оператор U имеет неподвижные точки. При использовании указанной теоремы возникают трудности определения вращения векторного поля. Проведенные рассуждения относятся к случаю, когда с помощью функций Ляпунова построено фиксированное, положительно инвариантное множество Ω и проводится анализ оператора U в зависимости от параметров системы дифференциальных уравнений.

Для определения циклов в работе предложен численно-аналитический подход: на базе положительно инвариантного множества Ω построить новое множество $\Omega^н$, которое не является положительно инвариантным, но $\gamma(Q, \partial\Omega_0^н) \neq 0$, $\partial\Omega_0^н$ – граница сечения множества $\Omega^н$ плоскостью. В связи с этим возникает задача выбора оптимального множества $\Omega^н$ и определение критерия оптимальности $\Omega^н$.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x , \quad (1)$$

где $x, b, c \in R^n$, $\varphi(\sigma) - \Delta$-периодическая, непрерывно дифференцируемая функция. Изучению системы (1) посвящены многочисленные работы [2–9].

В настоящей статье предложен подход последовательного расширения области параметров системы (1) для циклов второго рода. Анализ системы (1) производится с использованием вращения векторного поля и результатов работ [4, 5, 7, 8]. Для определения вращения векторного поля возникает необходимость определения границы множества Ω, что приводит к нахождению решения системы матричных уравнений. Показано, что применение матричных уравнений вместо матричных неравенств приводит к использованию неотрицательных матриц, отбрасываемых в неравенствах при построении положительно инвариантных множеств, что позволяет улучшить известные условия существования циклов второго рода.

Теоретические исследования. Условия существования циклов второго рода определяются результатами следующей теоремы.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $rang\|c,l\| = 2$, $l^T b = \nu > 0$;

2) система матричных уравнений относительно матриц H, L

$$A^T H + HA = -L - 2\lambda_1 H, \quad Hb = c \tag{2}$$

при $\lambda_1 > 0$, имеет решение $H = H^T$, $L = L^T \geq 0$, матрица H имеет одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение;

3) матрицы H, L удовлетворяют соотношениям

$$H = -\gamma_1 cc^T + \gamma_2 (l + \nu\Gamma^{-1}c)(l + \nu\Gamma^{-1}c)^T + \gamma_3 H_0, \tag{3}$$

$$L = 2k_1(l + k_2 c)(l + k_2 c)^T + L_0, \tag{4}$$

где $H_0 = H_0^T \geq 0$, $L_0 = L_0^T \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2, k_1, k_2 \in R^+$, $\gamma_3 \geq 0$, $(k_2 - \nu\Gamma^{-1}) > 0$;

4) для $\varepsilon = \nu\Gamma^{-1} + \varepsilon_1$, $\Gamma_1 = (\gamma_1 - \gamma_2\varepsilon_1^2)^{-1} > 0$ справедливо неравенство

$$\Gamma_1 = (\gamma_1 - \gamma_2\varepsilon_1^2)^{-1} > 0; \tag{5}$$

5) вектор $q_\varepsilon \in R^n$ определяемый равенствами $c^T q_\varepsilon = 1$, $l^T q_\varepsilon = -\varepsilon$, удовлетворяет соотношению $q_\varepsilon^T H q_\varepsilon \leq -\Gamma_1^{-1}$;

6) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma), \ \dot{\sigma} = y \tag{6}$$

при $\mu = \mu_1$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

7) справедливы неравенства

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon - \alpha_1) + \beta_1 > 0, \tag{7}$$

$$F_1(\sigma) + \varepsilon_1 \Gamma (\delta_\varepsilon \sqrt{\Gamma_1})^{-1} \varphi(\sigma) > 0 \tag{8}$$

для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

8) система уравнений (6) при $\mu = \mu_2 < \varepsilon\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$, $0 < F_1(\sigma) < F_2(\sigma)$, $\sqrt{\Gamma_1} F_1(\sigma) < \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

9) для $u_F > 0$ выполняется неравенство

$$u_F \sqrt{\Gamma_1} F_1(\sigma) > \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma) \tag{9}$$

для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

10) справедливы соотношения

$$g(u) = (k_1\Gamma_1(k_2 - \nu\Gamma^{-1})^2 + k_1\gamma_1\gamma_2^{-1}\Gamma_1)u^2 + \\ + \mu_1\sqrt{\Gamma_1}u - (\lambda_1 + k_1\gamma_2^{-1}) + \\ + k_1\gamma_2^{-1}(\operatorname{sgn}\gamma_3)(1 - u^2) \geq 0 \tag{10}$$

для любого $u \in [1; u_F]$,

$$f(u) = 4k_1^2\Gamma_1\gamma_2^{-1}(k_2 - \nu\Gamma^{-1})^2(\gamma_1\Gamma_1 u^2 - 1)u^2 - \\ - g^2(u) < 0 \tag{11}$$

для любого $u \in [1; u_F]$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(z) = x^T Hx + F_1^2(\sigma)$, $W_1(z) = l^T x + \varepsilon c^T x$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, функция $F_1(\sigma)$ удовлетворяет условию 6) теоремы. Пусть $\Omega_1 = \{z : V_1(z) \leq 0, c^T x \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{z : W_1(z) \leq 0\}$. Множество $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$ не является пустым. Действительно, рассмотрим вектор $x_\lambda = \lambda\sqrt{\Gamma_1} F_1(\sigma) q_\varepsilon$, где $\lambda > 1$, q_ε удовлетворяет условию 5) теоремы. В силу условия 1) теоремы $rang\|c,l\| = 2$ вектор q_ε существует. Для x_λ справедливы неравенства

$$c^T x_\lambda = \lambda\sqrt{\Gamma_1} F_1(\sigma) > 0, \tag{12}$$

$$x_\lambda^T H x_\lambda + F_1^2(\sigma) = \lambda^2 \Gamma_1 F_1^2(\sigma) q_\varepsilon^T H q_\varepsilon + F_1^2(\sigma) < \\ < F_1^2(\sigma)(1 - \lambda^2) < 0, \tag{13}$$

$$l^T x_\lambda + \varepsilon c^T x_\lambda = \lambda\sqrt{\Gamma_1} F_1(\sigma)(l^T q_\varepsilon + \varepsilon c^T q_\varepsilon) = 0. \tag{14}$$

Из (12), (13), (14) следует, что множество $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$ не является пустым и содержит внутренние точки. Пусть $z \in \Omega_1 \bigcap \Omega_2$, тогда верны соотношения

$$x^T Hx \leq -F_1^2(\sigma), \ c^T x > 0, \tag{15}$$

$$l^T x + \varepsilon c^T x \leq 0. \tag{16}$$

В силу условия 4) теоремы значение ε определяется равенством $\varepsilon = \nu\Gamma^{-1} + \varepsilon_1$, соотношение (16) примет вид

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x + \varepsilon_1 c^T x \leq 0. \tag{17}$$

Преобразуя (3), получим

$$\gamma_1 cc^T - \gamma_2\varepsilon_1^2 cc^T = -H + \gamma_2(l + \nu\Gamma^{-1}c)(l + \nu\Gamma^{-1}c)^T + \\ + \gamma_3 H_0 - \gamma_2\varepsilon_1^2 cc^T . \qquad (18)$$

Из (15), (17), (18) следует соотношение

$$(\gamma_1 - \gamma_2\varepsilon_1^2)(c^T x)^2 \ge F_1^2(\sigma) + \gamma_2(l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x)^2 - \\ - \gamma_2\varepsilon_1^2(c^T x)^2 + \gamma_3 x^T H_0 x \ge F_1^2(\sigma) + \gamma_2(l^T x + \\ + \nu\Gamma^{-1}c^T x + \varepsilon_1 c^T x)(l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x - \\ - \varepsilon_1 c^T x) \ge F_1^2(\sigma) . \qquad (19)$$

Пусть $\Gamma_1 = (\gamma_1 - \gamma_2\varepsilon_1^2)^{-1} > 0$. Тогда в силу (19) для $z \in \Omega_1 \bigcap \Omega_2$ справедливо неравенство

$$c^T x \ge \sqrt{\Gamma_1} F_1(\sigma) . \qquad (20)$$

С учетом (12), (13), (14) множество $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcap \bigcap \{z : \sigma = 0\}$ не является ограниченным. Рассмотрим функцию $V_2(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma)$, где $F_2(\sigma)$ удовлетворяет условию 8) теоремы. Пусть $\Omega_3 = \{z : V_2(z) \le 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcap \Omega_3$. Покажем, что множество $\Omega_1 \bigcap \Omega_3 \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0, \sigma_0 \in R\}$ является ограниченным. Используя условие 2) теоремы и теорему Шура [4], найдем определитель матрицы $(H + 2\Gamma^{-1}cc^T)$

$$\det(H + 2\Gamma^{-1}cc^T) = \det H \det(E + 2\Gamma^{-1}H^{-1}cc^T) = \\ = \det H \det(E + 2\Gamma^{-1}bc^T) = \\ = (1 + 2\Gamma^{-1}b^T c)\det H = -\det H > 0 . \qquad (21)$$

Ввиду соотношения (21), неравенства $cc^T \ge 0$ и того, что матрица H имеет одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение, получим:

$$H + 2\Gamma^{-1}cc^T > 0 . \qquad (22)$$

Пусть $z \in \Omega_1 \bigcap \Omega_3 \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\}$. Тогда выполняется неравенство

$$0 < x^T H x + 2\Gamma^{-1}(c^T x)^2 \le \\ \le 2F_2^2(\sigma_0) - F_1^2(\sigma_0) = d . \qquad (23)$$

Используя (22) и не уменьшая общности, можно считать, что $x^T(H + 2\Gamma^{-1}cc^T)x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Применяя (23) получим, что множество $\Omega_1 \bigcap \Omega_3 \bigcap \bigcap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ является ограниченным. Из (12), (13), (14) и условия 8) следует, что множество $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcap \Omega_3$ не является пустым.

Граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2 \bigcup \partial\Omega_3$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, c^T x > 0, W_1(z) \le 0, V_2(z) \le 0\} ,$$

$$\partial\Omega_2 = \{z : W_1(z) = 0,\ c^T x \ge 0, V_1(z) \le 0, V_2(z) \le 0\} ,$$

$$\partial\Omega_3 = \{z : V_2(z) = 0,\ V_1(z) \le 0, W_1(z) \le 0\} .$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_2$. Пусть $z \in \partial\Omega_2$. Тогда справедливо соотношение

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x + \varepsilon_1 c^T x = 0 . \qquad (24)$$

Используя (20), (24) и условия 1), 4), 6), 7) теоремы, получим, что производная функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_1(z) = -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x + \nu\varphi(\sigma) + \varepsilon l^T x - \varepsilon\Gamma\varphi(\sigma) = \\ = \varepsilon\alpha_1 c^T x - \beta_1 c^T x - \varepsilon^2 c^T x + (\nu - \varepsilon\Gamma)\varphi(\sigma) = \\ = (\varepsilon(\alpha_1 - \varepsilon) - \beta_1)c^T x + (\nu - \varepsilon\Gamma)\varphi(\sigma) \le \\ \le -\delta_\varepsilon\sqrt{\Gamma_1}F_1(\sigma) - \varepsilon_1\Gamma\varphi(\sigma) = \\ = -\delta_\varepsilon\sqrt{\Gamma_1}(F_1(\sigma) + \varepsilon_1\Gamma(\delta_\varepsilon\sqrt{\Gamma_1})^{-1}\varphi(\sigma)) < 0 , \qquad (25)$$

где $\delta_\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon - \alpha_1) + \beta_1 > 0$.

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3$. Исходя из неравенства (16) и условия 8) теоремы, производная функции $V_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_3$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{V}_2(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \sqrt{\Gamma}\frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma}c^T x \le \\ \le -\varepsilon c^T x - \Gamma F_2(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_2(\sigma)} + \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma}\right) = \\ = -\varepsilon\sqrt{\Gamma}F_2(\sigma) + \mu_2\Gamma F_2(\sigma) = \\ = \Gamma F_2(\sigma)\left(\mu_2 - \varepsilon\Gamma^{-1/2}\right) < 0 . \qquad (26)$$

Пусть $z \in \partial\Omega_1$. Тогда верны неравенства

$$\sqrt{\Gamma_1}F_1(\sigma) \le c^T x \le \sqrt{\Gamma}F_2(\sigma) , \qquad (27)$$

$$(l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x)^2 \ge \varepsilon_1^2(c^T x)^2 . \qquad (28)$$

Используя (3), (5), (27), (28), получим:

$$\gamma_3 x^T H_0 x = x^T H x + \gamma_1(c^T x)^2 - \gamma_2(l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x)^2 = \\ = -F_1^2(\sigma) + \gamma_1(c^T x)^2 - \gamma_2(l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x)^2 \le \\ \le -F_1^2(\sigma) + \gamma_1(c^T x)^2 - \gamma_2\varepsilon_1^2(c^T x)^2 = \\ = -F_1^2(\sigma) + \Gamma_1^{-1}(c^T x)^2 ; \qquad (29)$$

$$\gamma_1\gamma_2^{-1}(c^T x)^2 - \gamma_2^{-1}F_1^2(\sigma) - \gamma_3\gamma_2^{-1}x^T H_0 x \ge \\ \ge \gamma_1\gamma_2^{-1}(c^T x)^2 - \gamma_2^{-1}F_1^2(\sigma) + \gamma_2^{-1}F_1^2(\sigma) - \\ - (\gamma_1 - \gamma_2\varepsilon_1^2)\gamma_2^{-1}(c^T x)^2 = \varepsilon_1^2(c^T x)^2 \ge \\ \ge \varepsilon_1^2\sqrt{\Gamma_1}F_1^2(\sigma) > 0 . \qquad (30)$$

В силу (3), (17), (30), для $z \in \partial\Omega_1$ выполняются соотношения

$$x^T H x = -F_1^2(\sigma) \Rightarrow \gamma_2(l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x)^2 = \\ = \gamma_1(c^T x)^2 - F_1^2(\sigma) - (\operatorname{sgn}\gamma_3)\gamma_3 x^T H_0 x \Rightarrow \\ \Rightarrow (l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x) = -(\gamma_2)^{-1/2}(\gamma_1(c^T x)^2 - F_1^2(\sigma) - \\ - (\operatorname{sgn}\gamma_3)\gamma_3 x^T H_0 x)^{1/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow l^T x = -\nu\Gamma^{-1}c^T x - (\gamma_2)^{-1/2}(\gamma_1(c^T x)^2 - F_1^2(\sigma) - \\ - (\operatorname{sgn}\gamma_3)\gamma_3 x^T H_0 x)^{1/2} . \qquad (31)$$

Применяя условия 2), 6) теоремы и (4), (31), найдем производную функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\dot{V}_1(z) = x^T(A^T H + HA)x + 2x^T Hb\varphi(\sigma) +$$
$$+ 2F_1(\sigma)\frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma}c^T x \le 2\lambda F_1^2(\sigma) - 2k_1(l^T x +$$
$$+ k_2 c^T x)^2 + 2c^T x F_1(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F_1(\sigma)} + \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma}\right) =$$
$$= -2k_1((k_2 - \nu\Gamma^{-1})c^T x - (\gamma_2)^{-1/2}(\gamma_1(c^T x)^2 -$$
$$- F_1^2(\sigma) - (\operatorname{sgn}\gamma_3)\gamma_3 x^T H_0 x)^{1/2})^2 +$$
$$+ 2\lambda_1 F_1^2(\sigma) - 2\mu_1 F_1(\sigma)c^T x\,. \quad (32)$$

Обозначим $c^T x = \sqrt{\Gamma_1}F_1(\sigma)u$. Из условия 9) теоремы и (27) получим, что для $z \in \partial\Omega_1$ выполняется неравенство $1 \le u \le u_F$. С учетом введенного обозначения неравенство (32) примет вид

$$\dot{V}_1(z) \le 2F_1^2(\sigma)(-k_1((k_2 - \nu\Gamma^{-1})\sqrt{\Gamma_1}u -$$
$$- (\gamma_2)^{-1/2}(\gamma_1\Gamma_1 u^2 - 1 - F_1^{-2}(\sigma)(\operatorname{sgn}\gamma_3)\gamma_3 \times$$
$$\times \gamma_3 x^T H_0 x)^{1/2})^2 + \lambda_1 - \mu_1\sqrt{\Gamma_1}u) =$$
$$= 2F_1^2(\sigma)(-k_1\Gamma_1(k_2 - \nu\Gamma^{-1})^2 u^2 +$$
$$+ 2k_1(k_2 - \nu\Gamma^{-1})\sqrt{\Gamma_1}(\gamma_2)^{-1/2}(\gamma_1\Gamma_1 u^2 - 1 -$$
$$- F_1^{-2}(\sigma)(\operatorname{sgn}\gamma_3)\gamma_3 x^T H_0 x)^{1/2}u -$$
$$- k_1\gamma_2^{-1}(\gamma_1\Gamma_1 u^2 - 1 - F_1^{-2}(\sigma)(\operatorname{sgn}\gamma_3)\gamma_3 x^T H_0 x) +$$
$$+ \lambda_1 - \mu_1\sqrt{\Gamma_1}u)\,. \quad (33)$$

Используя условия теоремы $x^T H_0 x \ge 0$, $k_2 - \nu\Gamma^{-1} > 0$ и (29), (33), получим:

$$\dot{V}_1(z) \le 2F_1^2(\sigma)(-k_1\Gamma_1(k_2 - \nu\Gamma^{-1})^2 u^2 +$$
$$+ 2k_1(k_2 - \nu\Gamma^{-1})\sqrt{\Gamma_1}(\gamma_2)^{-1/2}(\gamma_1\Gamma_1 u^2 - 1)^{1/2}u -$$
$$- k_1\gamma_2^{-1}(\gamma_1\Gamma_1 u^2 - 1) + k_1\gamma_2^{-1}(\operatorname{sgn}\gamma_3)(u^2 - 1) +$$
$$+ \lambda_1 - \mu_1\sqrt{\Gamma_1}u)\,. \quad (34)$$

С учетом обозначений из условия 10) теоремы, справедливо неравенство:

$$\dot{V}_1(z) \le 2F_1^2(\sigma)(2k_1(k_2 - \nu\Gamma^{-1})\sqrt{\Gamma_1}(\gamma_2)^{-1/2} \times$$
$$\times(\gamma_1\Gamma_1 u^2 - 1)^{1/2}u - g(u))\,. \quad (35)$$

Из (35), (10), (11) следует, что производная функции $V_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{V}_1(z) < 0\,. \quad (36)$$

Таким образом, неравенства (25), (26), (36) обеспечивают положительную инвариантность множества Ω, множество $\Omega_0 = \Omega \cap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ является выпуклым замкнутым и ограниченным. Пусть T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (1).

В силу положительной инвариантности множества Ω и соотношения (20) оператор T_1 отображает множество Ω_0 в множество $T_1(\Omega_0)$, $T_1(\Omega_0) \subset \subset \Omega_\Delta = \Omega \cap \{z : \sigma = \sigma_0 + \Delta\}$. Обозначим через T_2 оператор, определяемый соотношением $T_2\begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sigma - \Delta \end{pmatrix}$. Пусть $U = T_2 \circ T_1$. Тогда $U(\Omega_0) \subset \Omega_0$, по теореме Брауэра оператор U имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия предельного цикла второго рода. Условия разрешимости системы матричных уравнений (2) определяются следующим утверждением.

Лемма. Пусть для системы матричных уравнений (2) выполнены условия $A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_1$, $\lambda_1\lambda_2 = \beta_1$, $\lambda_2 - \lambda_1 = = \alpha > 0$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $b_1 \ne 0$, $b_2 \ne 0$, $c^T b = = -\Gamma < 0$, $l = A^T c$, $l^T b = c^T Ab = \nu > 0$, $\varepsilon_0 = \nu\Gamma^{-1}$, $\lambda_1 - \varepsilon_0 \ne 0, \lambda_2 - \varepsilon_0 \ne 0$, $\tau_1 = (\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)(\lambda_2 - \varepsilon_0))^{-1}$. Тогда матричные уравнения (2) имеют решение $H = H^T$, $L = L^T$ такое, что

$$H = -\Gamma^{-1}cc^T + \tau_1(l + \nu\Gamma^{-1}c)(l + \nu\Gamma^{-1}c)^T\,, \quad (37)$$
$$L = 2\Gamma^{-1}(\lambda_1 - \varepsilon_0)^{-1}(l + \lambda_1 c)(l + \lambda_1 c)^T\,. \quad (38)$$

Если выполнено неравенство

$$\lambda_1 - \varepsilon_0 > 0\,, \quad (39)$$

то для матрицы L справедливо соотношение $L \ge 0$, а матрица H имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение.

Доказательство. Непосредственной подстановкой в уравнения (2) доказывается, что матрицы $H = \begin{pmatrix} c_1 b_1^{-1} & 0 \\ 0 & c_2 b_2^{-1} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha c_2 b_2^{-1} \end{pmatrix}$ удовлетворяют соотношениям (2). Из условий леммы получим, что для векторов b, c выполняются равенства

$$c^T b = c_1 b_1 + c_2 b_2 = -\Gamma\,, \quad (40)$$
$$c^T Ab = -\lambda_1 c_1 b_1 - \lambda_2 c_2 b_2 = \nu\,.$$

Используя (40), получим:

$$c_2 b_2 = \Gamma\alpha^{-1}(\lambda_1 - \varepsilon_0)\,,\ c_1 b_1 = \Gamma\alpha^{-1}(\varepsilon_0 - \lambda_2)\,. \quad (41)$$

Обозначим:

$$q = l + \nu\Gamma^{-1}c = l + \varepsilon_0 c = \begin{pmatrix} (\varepsilon_0 - \lambda_1)c_1 \\ (\varepsilon_0 - \lambda_2)c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

В силу (41) элементы матрицы $(\tau_1 qq^T - \Gamma^{-1}cc^T)$ определяются соотношениями

$$\tau_1 q_1^2 - \Gamma^{-1} c_1^2 = \frac{(\varepsilon_0 - \lambda_1)^2 c_1^2}{\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)(\lambda_2 - \varepsilon_0)} - \Gamma^{-1} c_1^2 =$$

$$= \Gamma^{-1} c_1^2 \left(\frac{\lambda_1 - \varepsilon_0}{\lambda_2 - \varepsilon_0} - 1 \right) = \frac{c_1 c_1 b_1 \alpha}{b_1 \Gamma(\varepsilon_0 - \lambda_2)} = c_1 b_1^{-1}; \quad (42)$$

$$\tau_1 q_1 q_2 - \Gamma^{-1} c_1 c_2 = \frac{(\varepsilon_0 - \lambda_1)(\varepsilon_0 - \lambda_2) c_1 c_2}{\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)(\lambda_2 - \varepsilon_0)} -$$

$$- \Gamma^{-1} c_1 c_2 = 0; \quad (43)$$

$$\tau_1 q_2^2 - \Gamma^{-1} c_2^2 = \frac{(\varepsilon_0 - \lambda_2)^2 c_2^2}{\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)(\lambda_2 - \varepsilon_0)} - \Gamma^{-1} c_2^2 =$$

$$= \Gamma^{-1} c_2^2 \left(\frac{\lambda_2 - \varepsilon_0}{\lambda_1 - \varepsilon_0} - 1 \right) = \frac{c_2 c_2 b_2 \alpha}{b_2 \Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)} = c_2 b_2^{-1}. \quad (44)$$

Из (42), (43), (44) следует, что матрица H определяется равенством (37).

Для матрицы L введем обозначение $w = l + \lambda_1 c = \begin{pmatrix} -\lambda_1 c_1 + \lambda_1 c_1 \\ -\lambda_2 c_2 + \lambda_2 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. С помощью формулы (41) элементы матрицы $\frac{2}{\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)} w w^T$ определяются соотношениями

$$w_1^2 = 0, \quad w_1 w_2 = 0, \quad (45)$$

$$\frac{2}{\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)} w_1^2 = \frac{2\alpha^2 c_2^2}{\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)} = \frac{2\alpha^2 c_2 c_2 b_2}{\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0) b_2} =$$

$$= \frac{2\alpha^2 c_2 \Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)}{b_2 \Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)\alpha} = 2\alpha c_2 b_2^{-1}. \quad (46)$$

Из (45), (46) следует, что матрица L определяется равенством (38). Условие (39) и соотношения (37), (38) определяют неравенство $L \ge 0$ и то, что матрица H имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение. Лемма доказана.

Практические исследования. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \tilde{c}^T \tilde{x}, \quad (47)$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\alpha_1, \beta_1, \nu, \Gamma, \gamma \in R^+$. Пусть $D = \alpha_1^2 - 4\beta_1 > 0$. Тогда матрица $\tilde{A}$ имеет действительные собственные значения $(-\lambda_1)$, $(-\lambda_1)$, $\lambda_1 = 2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{D}) > 0$, $\lambda_2 = 2^{-1}(\alpha_1 + \sqrt{D}) > 0$. В системе (47) сделаем замену переменных $\tilde{x} = Sx$ и приведем ее к системе (1), где $A = S^{-1}\tilde{A}S$, $b = S^{-1}\tilde{b}$, $c^T = \tilde{c}^T S$. Пусть $S = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $\det S = \Delta_s = -\lambda_2\sqrt{D} < 0$, $S^{-1} = \Delta_s^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \Delta_s^{-1}\begin{pmatrix} \nu - \lambda_2\Gamma \\ \lambda_2\nu - \Gamma\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Для системы (1) проверим условие 1) теоремы, найдем $c^T b = \tilde{c}^T \tilde{b} = -\Gamma < 0$, $l^T = c^T A = \tilde{c}^T \tilde{A} S = (1;0)S = (\beta_1; -\lambda_2)$, $l = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $l^T b = \tilde{c}^T \tilde{A} S S^{-1} \tilde{b} = \tilde{c}^T \tilde{A} \tilde{b} = \nu$, $\det\|c, l\| = \lambda_2^2 - \beta_1 = -\Delta_s \ne 0$, $rang\|c, l\| = 2$. Таким образом, для рассматриваемого примера выполняется условие 1) теоремы.

Для системы матричных уравнений (2) выполняются условия леммы, матрицы H, L определяются соотношениями (37), (38). Пусть справедливо неравенство

$$\varepsilon_0 = \nu\Gamma^{-1} < \lambda_1 = 2^{-1}(\alpha^{-1} - \sqrt{D}). \quad (48)$$

Тогда в силу леммы матрица H имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение, а для L выполняется соотношение: $L \ge 0$. Система (1) удовлетворяет условию 2) теоремы. Используя (37), (38), для соотношений (3), (4) найдем $\gamma_3 = 0$, $H_0 = \Theta$, $L_0 = \Theta$, $\gamma_1 = \Gamma^{-1} > 0$, $\gamma_2 = \tau_1 = (\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0)(\lambda_2 - \varepsilon_0))^{-1} > 0$, $k_2 = \lambda_1 > 0$, $k_1 = (\Gamma(\lambda_1 - \varepsilon_0))^{-1} > 0$, $\operatorname{sgn}\gamma_3 = 0$. Принимая во внимание (48), получим, что $(k_2 - \nu\Gamma^{-1}) = (\lambda_2 - \nu\Gamma^{-1}) > (\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}) > 0$. Следовательно, для системы (1) справедливо условие 3) теоремы. Найдем значение Γ_1 из условия 4) теоремы. Получим:

$$\Gamma_1 = \Gamma(1 - \tau_1\varepsilon_1^2\Gamma)^{-1}. \quad (49)$$

Если выполняется неравенство

$$1 - \tau_1\varepsilon_1^2\Gamma > 0, \quad (50)$$

то $\Gamma_1 > \Gamma > 0$. Следовательно, справедливо условие 4) теоремы.

Пусть вектор $q_\varepsilon \in R^n$ удовлетворяет соотношениям $c^T q_\varepsilon = 1$, $l^T q_\varepsilon = -\varepsilon$, $\varepsilon = \nu\Gamma^{-1} + \varepsilon_1$, с учетом условия $rang\|c, l\| = 2$ такой вектор существует. Используя (37), (49), найдем $q_\varepsilon^T H q_\varepsilon$:

$$q_\varepsilon^T H q_\varepsilon = q_\varepsilon^T(-\Gamma^{-1}c + \tau_1(l + \nu\Gamma^{-1}c)(\nu\Gamma^{-1} - \varepsilon)) =$$

$$= q_\varepsilon^T(-\Gamma^{-1}c - \tau_1\varepsilon_1(l + \nu\Gamma^{-1}c)) =$$

$$= -\Gamma^{-1} - \tau_1\varepsilon_1(\nu\Gamma^{-1} - \varepsilon) = -\Gamma^{-1} + \tau_1\varepsilon_1^2 =$$

$$= \Gamma^{-1}(\tau_1\varepsilon_1^2\Gamma - 1) = -\Gamma_1^{-1}. \quad (51)$$

Исходя из (51) для системы (1) выполняется условие 5) теоремы.

Рассмотрим систему (47) при $\alpha_1 = 5/4$, $\beta_1 = 5\beta_0/4$, $\nu = 5/16$, $\Gamma = 5/4$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.4$ и для этой системы найдем функцию

$W(p) = \tilde{c}^T(\tilde{A} - pE)^{-1}\tilde{b} = \dfrac{p+1}{0.8p^2 + p + \beta_0}$. Система (47) с функцией $W(p)$ полученного вида рассматривалась в работах [4, 5]. Если $\gamma = 0.4$, то для системы второго порядка (6) существует $\mu_{кр} = 0.3224$ такое, что при $\mu = \mu_1 < \mu_{кр}$ система (6) имеет цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$. В работе [4] показано, что если $\lambda_1 \Gamma^{-1/2} < \mu_{кр}$, то система (47) имеет цикл второго рода. Указанное неравенство позволяет найти верхнюю границу для β_0

$$\lambda_1 < \sqrt{\Gamma}\mu_{кр} \Rightarrow \beta_0 < 0.2565, \beta_1 < 0.3206 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta_0^{-2} > 15.1956. \qquad (52)$$

Для проверки условий 6)–10) теоремы целесообразно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм проверки условий теоремы.

1. Выбрать значение $\beta_1 = 0.3398$, определить $\beta_0 = 0.8\beta_1 = 0.272$, $\beta_0^{-2} = 13.53$. Проверить неравенство (48), $(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}) = 0.15 > 0$.

2. Определить $\varepsilon_1 = 0.0449$, найти $\tau_1 = (\Gamma(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1})(\lambda_2 - \nu\Gamma^{-1}))^{-1} = 8.909$, $\varepsilon = \nu\Gamma^{-1} + \varepsilon_1 = 0.2949$. Проверить (50), $(1 - \tau_1\varepsilon_1^2\Gamma) = 0.98 > 0$. Используя (49) определить $\Gamma_1 = 1.279$.

3. Найти начальные условия предельного цикла второго рода $F_1(\sigma)$ системы (6) при $\mu = \mu_1 = 0.32244$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.4$. Численно определяются начальные условия $y_1(0) = 1.945$, $\sigma(0) = 0$.

4. Вычислить значение $\delta_\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon - \alpha_1) + \beta_1 = 0.058 > 0$, численными методами определить значение e, для которого выполняется неравенство $F_1(\sigma) + \dfrac{\varepsilon_1\Gamma}{\delta_\varepsilon\sqrt{\Gamma_1}}\varphi(\sigma) \ge e = 4.6\cdot 10^{-4} > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

5. Определить начальные условия предельного цикла второго рода $F_2(\sigma)$ системы (6) при $\mu = \mu_2 = \varepsilon\Gamma^{-1/2} - 10^{-6} = 0.2638$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.4$. Численно находятся начальные условия $y_2(0) = 2.116$, $\sigma(0) = 0$.

6. Найти корни квадратного уравнения $g(u) = 0$, $u_1 = -1.4$, $u_2 = 0.93$. Если $u \ge 1 > u_2 = 0.93$, то $g(u) > 0$. Следовательно, выполняется неравенство (10). Найти корни уравнения $f(u) = 0$; $f(u)$ является многочленом четвертой степени. Численно определяется, что уравнение имеет два действительных корня $\bar{u}_1 = -3.613$, $\bar{u}_2 = -1.15$. Если $u \ge 1$, то $f(u) < 0$ и выполняется неравенство (11). В рассматриваемом примере нет необходимости определять значение u_F из условия 9) теоремы, так как неравенства (10), (11) выполняются при любом $u \ge 1$.

Таким образом, для примера выполнены условия теоремы и системы (1), (47) имеют цикл второго рода. Численно для системы (47) находится наибольшее значение $\beta_1 = \beta_1^* = 0.3718$, $\beta_0^* = 0.8\beta_1^* = 0.2974$, при котором в системе (47) существует цикл второго рода. Результаты теоремы позволили увеличить верхнюю границу для $\beta_0 = 0.272$ по сравнению с $\beta_0 = 0.2565$, определяемого равенством (52), при этом абсолютная погрешность для β_0 уменьшилась на 38 %.

Условия теоремы позволяют определить в фазовом пространстве область, содержащую начальные условия цикла системы (47). Используя (37), найдем матрицу $M = S^{-1}HS^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$.

Для рассматриваемого примера получим $m_1 = 8.909$, $m_2 = 2.227$, $m_3 = -0.243$. В плоскости $\sigma = 0$ рассмотрим линии:

$$L_1 : x^T Hx = -F_1^2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}^T(S^{-1})^T HS^{-1}\tilde{x} =$$
$$= -F_1^2(0) \Leftrightarrow 8.9096\tilde{x}_1^2 + 2\cdot 2.227\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 0.243\tilde{x}_2^2 =$$
$$= -1.945^2;$$
$$L_2 : l^T x + \varepsilon c^T x = 0 \Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{A}\tilde{x} + \varepsilon\tilde{c}^T\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_1 + 0.2949\tilde{x}_2 = 0;$$
$$L_3 : c^T x = \sqrt{\Gamma_1}F_1(0) \Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x} = \sqrt{\Gamma_1}F_1(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 1.945\sqrt{1.279};$$
$$L_4 : c^T x = \sqrt{\Gamma}F_2(0) \Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x} = \sqrt{\Gamma}F_2(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 2.116\sqrt{1.25}.$$

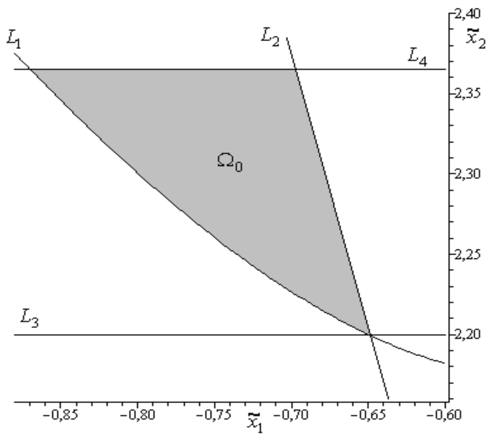

Рис. 1.

На рисунке 1 изображена область Ω_0, ограниченная линиями L_1, L_2, L_3, L_4. Область Ω_0 содержит начальные условия предельного цикла системы (47). Численными методами доказывается, что цикл системы (47) определяется начальными условиями $\tilde{x}_1(0) = -0.7177$, $\tilde{x}_2(0) = 2.2815$, $\sigma(0) = 0$ из области Ω_0.

Численно-аналитические исследования.

Произведем расширение области параметров системы (47), при которых она имеет цикл второго рода. Для этого рассмотрим оператор $U = T_2 \circ T_1$, определенный в теореме, где T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (47), T_2 – параллельный перенос. Численными методами находится множество $U(\Omega_0) \subset \Omega_0$.

На рисунке 2 изображено множество $U(\Omega_0)$.

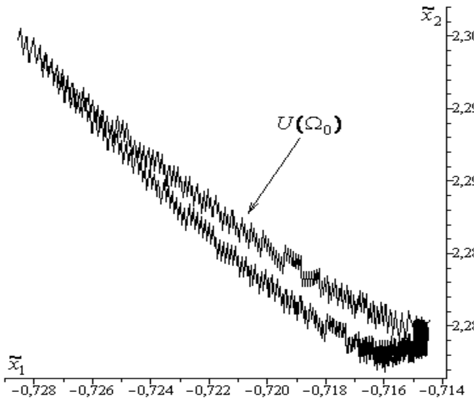

Рис. 2.

Оставим положительно инвариантное множество Ω без изменений, будем увеличивать значение β_1 системы (47), обозначим U_{β_1} оператор, определяемый значением β_1. При увеличении β_1 множество Ω перестает быть положительно инвариантным, но множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ содержится во множестве Ω_0. Численными методами доказывается, что $U_{\beta_1}(\Omega_0) \subset \Omega_0$ при изменении значения β_1 до $\beta_{11} = 0.359$. Дальнейшее увеличение β_1 приводит к тому, что множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ перестает быть частью множества Ω_0, $U_{\beta_1}(\Omega_0) \not\subset \Omega_0$, но $\Omega_0 \cap \cap U_{\beta_1}(\Omega_0) \neq \emptyset$. В этом случае не выполняются условия теоремы Брауэра о неподвижной точке. Для анализа неподвижных точек оператора U_{β_1} определим непрерывное векторное поле $Q(x) = x - U_{\beta_1}(x)$. Если вращение векторного поля $Q(x)$ на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то согласно теореме 5.15 [1] оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку. Пусть $\beta_1 = \beta_{12} = 0.3608$. Тогда численными методами находится $U_{\beta_1}(\Omega_0)$. На рисунке 3 изображено множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$.

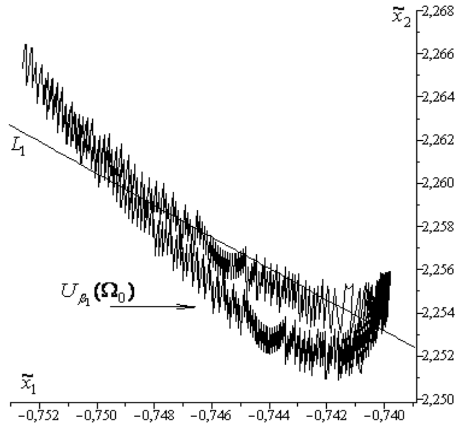

Рис. 3.

На рисунке 4 представлена линия P_{β_1}, описываемая вектором $Q(x) = x - U_{\beta_1}(x)$ при прохождении x границы $\partial\Omega_0$.

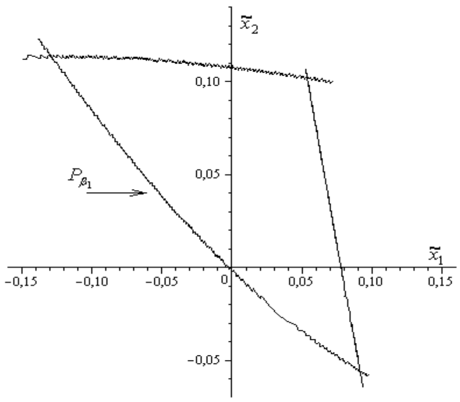

Рис. 4.

Численно устанавливается, что вращение векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q, \partial\Omega_0) = 1$. Оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия цикла второго рода системы (47). Таким образом, использование вращения векторного поля позволило увеличить значение β_1 от $\beta_1 = 0.3398$ до $\beta_1 = \beta_{12} = 0.3608$, при этом абсолютная погрешность для β_1 уменьшилась на 66 %.

Следующий этап расширения области параметров системы (47) связан с использованием вместо множества Ω нового множества $\Omega^{(2)}$. Множество $\Omega^{(2)}$ не является положительно инвариантным для системы (47). В связи с этим возникает задача выбора оптимального множества $\Omega^{(2)}$

и определения критерия оптимальности $\Omega^{(2)}$. Рассмотрим систему (47) при $\beta_1=\beta_{12}=0.3608$. Для нахождения нового множества $\Omega^{(2)}$ используем структуру множества Ω. При новом значении $\beta_1=\beta_{12}$ множество $\Omega_1=\{z: x^T Hx\le -F_1^2(\sigma),$ $c^T x\ge 0\}$ определит множество $\Omega_1^{(2)}=\{z:$ $x^T H_2 x\le -F_1^2(\sigma),\ c^T x\ge 0\}$, где матрица H_2 находится из соотношения (37) и определяется параметрами системы (1), функция $F_1(\sigma)$ остается без изменений и определяется циклом второго рода системы (6) при $\mu=\mu_1=0.32244$. Используя (37), найдем матрицу $M^{(2)}=S^{-1}H_2S^{-1}=\begin{pmatrix} m_1^{(2)} & m_2^{(2)} \\ m_2^{(2)} & m_3^{(2)}\end{pmatrix}$.

Для рассматриваемого примера получим $m_1^{(2)}=$ $=7.22$, $m_2^{(2)}=1.805$, $m_3^{(2)}=-0.349$. Множества $\Omega_2=\{z: l^T x+\varepsilon c^T x\le 0\}$, $\Omega_3=\{z: c^T x\le\sqrt{\Gamma}F_2(\sigma)\}$ определяются значением $\varepsilon=\nu\Gamma^{-1}+\varepsilon_1$. В качестве критерия оптимальности множества $\Omega^{(2)}$ возьмем функцию $r(\varepsilon_1)=\min\limits_{\sigma}(F_1(\sigma)+\varepsilon_1\Gamma(\delta_\varepsilon\Gamma_1^{1/2})^{-1}\varphi(\sigma))$, численно определим значение $\varepsilon_1=0.0558$, $\varepsilon=$ $=\nu\Gamma^{-1}+\varepsilon_1=0.3058$, для которого функция $r(\varepsilon_1)$ принимает наименьшее положительное значение $r(\varepsilon_1)=5.7\cdot 10^{-4}$. Предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$ находится для системы (6) при $\mu=\mu_2=$ $=\varepsilon\Gamma^{-1/2}-10^{-6}=0.2735$, имеет начальные условия $y_1(0)=2.0796$, $\sigma(0)=0$. Величина $\varepsilon_1=$ $=0.0558$ определяет новые множества $\Omega_2^{(2)}$, $\Omega_3^{(2)}$, $\Omega^{(2)}=\Omega_1^{(2)}\cap\Omega_2^{(2)}\cap\Omega_3^{(2)}$. В плоскости $\sigma=0$ рассмотрим линии:

$$L_1^{(2)}: x^T H_2 x=-F_1^2(0)\Leftrightarrow \tilde{x}^T(S^{-1})^T H_2 S^{-1}\tilde{x}=$$
$$=-F_1^2(0)\Leftrightarrow 7.22\tilde{x}_1^2+2\cdot 1.805\tilde{x}_1\tilde{x}_2-0.349\tilde{x}_2^2=$$
$$=-1.945^2;$$
$$L_2^{(2)}: l^T x+\varepsilon c^T x=0\Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{A}\tilde{x}+\varepsilon\tilde{c}^T\tilde{x}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_1+0.3058\tilde{x}_2=0;$$
$$L_3^{(2)}: c^T x=\sqrt{\Gamma_1}F_1(0)\Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x}=\sqrt{\Gamma_1}F_1(0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2=1.945\sqrt{1.286};$$
$$L_4^{(2)}: c^T x=\sqrt{\Gamma}F_2(0)\Leftrightarrow \tilde{c}^T\tilde{x}=\sqrt{\Gamma}F_2(0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{x}_2=2.0796\sqrt{1.25}.$$

На рисунке 5 изображена область $\Omega_0^{(2)}$, ограниченная линиями $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$, $L_3^{(2)}$, $L_4^{(2)}$. Фиксируем множество $\Omega^{(2)}$, значение β_1 увеличиваем до $\beta_{13}=0.3690$, численно находим множество $U_{\beta_1}(\Omega_0^{(2)})$.

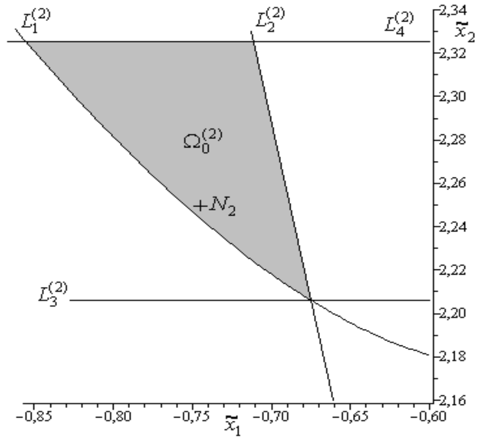

Рис. 5.

На рисунке 6 изображено множество $U_{\beta_1}(\Omega_0^{(2)})$.

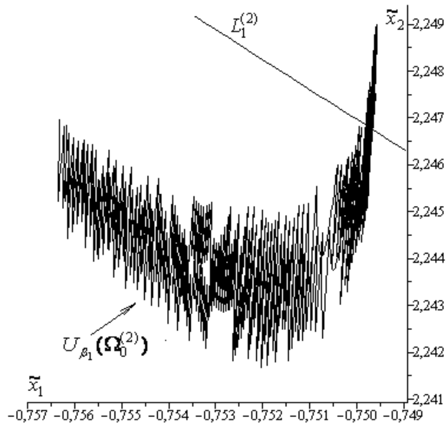

Рис. 6.

На рисунке 7 представлена линия $P_{\beta_1}^{(2)}$, описываемая вектором $Q(x)=x-U_{\beta_1}(x)$ при прохождении x границы $\partial\Omega_0^{(2)}$. Численно показывается, что вращение векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q,\partial\Omega_0^{(2)})=1$. Оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия цикла второго рода системы (47). Использование вращения векторного поля позволило увеличить значение β_1 от $\beta_1=0.3608$ до $\beta_1=\beta_{13}=0.3690$.

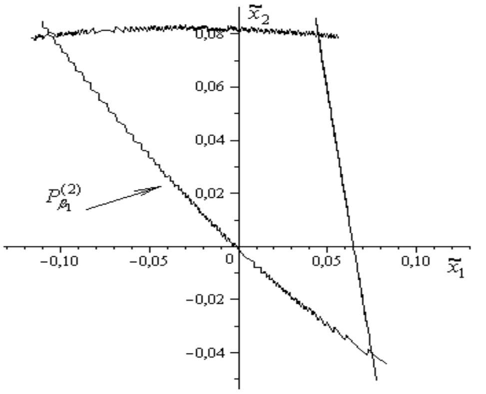

Рис. 7.

Численно показывается, что система (47) имеет цикл второго рода с начальными условиями $\tilde{x}_1(0) = -0.7497$, $\tilde{x}_2(0) = 2.2477$, $\sigma(0) = 0$.

На рисунке 8 изображена проекция цикла второго рода системы (47) при $\beta_1 = 0.369$ на плоскость $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.

Начальные условия цикла определяют точку $N_2(-0.7497; 2.2477) \in \Omega_0^{(2)}$, точка N_2 изображена на рисунке 5. Повторяя предложенный способ расширения области параметров системы (47), выбирая $\Omega^{(3)}$ для системы (47) при $\beta_1 = \beta_{13} = 0.369$, $\varepsilon_1 = 0.0589$, получим, что система (47) имеет цикл второго рода при $\beta_1 = \beta_{14} = 0.3702$.

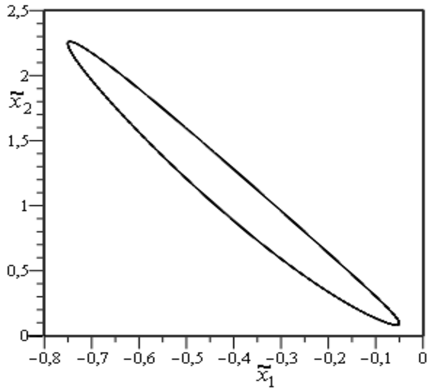

Рис. 8.

Таким образом, использование вращения векторного поля позволило увеличить область параметров системы (47) для циклов второго рода и максимально приблизить значение параметра β_1 до точного значения $\beta^* = 0.3718$, при котором у системы (47) существует цикл второго рода и определить область начальных условий для цикла второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красносельский М.А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
2. **Матросов В.В.** Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 3. С. 267–278.
3. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. **Леонов Г.А., В.Б. Смирнова В.Б.** Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000. 400 с.
5. **Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.** Частотные методы в теории колебаний. СПб., 1992. 368 с.
6. **Шахтарин Б. И.** Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. М.: Машиностроение, 1991. 192 с.
7. **Мамонов С.С.** Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 637–646.
8. **Мамонов С.С., Ионова И.В.** Существование циклов второго рода системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13, № 4. С. 45–50.
9. **Шахгильдян В.В., Белюстина Л.Н.** Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.

Мамонов Сергей Станиславович, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru