УДК 517.977

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБРИДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ГФДСП). II

А.С. Ларионов, П.М. Симонов

Братский государственный университет,
Пермский государственный национальный исследовательский университет

STABILITY OF HYBRID FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT (HFDSA). II

A.S. Larionov, P.M. Simonov

Рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Получены условия ее разрешимости в парах пространств. Рассмотрены простые примеры.

Ключевые слова: гибридная система функционально-дифференциальных уравнений, устойчивость, метод модельных уравнений.

The abstract hybrid system of the functional differential equations is considered. Conditions of its resolvability in couple of spaces are received. Simple examples are considered.

Keywords: hybrid system of functional differential equations, stability, model equations' method.

1. Введение

Исследованию по устойчивости решений ГФДСП к настоящему времени посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных ГФДСП. Для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$

$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h),$$

$$x_1(0) = x_{10} \in \mathbf{R}^k, \quad x_2(\tau) = \psi(\tau), \ \tau \in [-h, 0),$$

$$A_{11} \in \mathbf{R}^{k\times k}, \quad A_{12} \in \mathbf{R}^{k\times(n-k)}, \quad A_{21} \in \mathbf{R}^{(n-k)\times k}, \quad A_{22} \in \mathbf{R}^{(n-k)\times(n-k)},$$

$\psi : [-h, 0) \to \mathbf{R}^{(n-k)}$ – кусочно-непрерывная вектор-функция, получены необходимые и достаточное условия экспоненциальной устойчивости [1].

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в [2]. Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [3–8] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГФДСП, а именно гибридных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ГФДУП), формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости.

2. Постановка задачи: одно уравнение – линейное разностное, определенное в дискретном множестве точек, а другое – линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием (ЛФДУП) на полуоси. Схема W-метода.

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), \ y(1), ..., y(N), \ldots$ размерами n, а через $g = \{g(0), \ g(1), ..., g(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), ..., g(N), \ldots$ размерами n. Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) +$$
$$+ y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

Аналогично каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию $g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ...$ $... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$ Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t]), \quad t \in [-1, \infty)$. Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом λ_0. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t]), \quad t \in [0, \infty)$. Множество таких функций $g[\cdot]$ обозначим символом λ. Обозначим $(\Delta y)(t)=y(t)-y(t-1)=y[t]-y[t-1]$ при $t\ge 1$, $(\Delta y)(t)=y(t)=y[t]=y(0)$ при $t\in[0,1)$.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}_{11}x+\mathrm{L}_{12}y=\dot{x}-F_{11}x-F_{12}y=f,\\&\mathrm{L}_{21}x+\mathrm{L}_{22}y=\Delta y-F_{21}x-F_{22}y=g.\end{aligned}\quad(1)$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов $\alpha=\mathrm{col}\{\alpha^1,...,\alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]}=\int_0^T\|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}dt$ для всех $T>0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]}=\|\dot{x}\|_{L[0,T]}+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T>0$.

Пусть пространство ℓ бесконечных матриц $g=\{g(0),g(1),...,g(N),\dots\}$ с полунормами $\|g\|_{\ell_T}=\sum_{i=0}^{T}\|g_i\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T\ge 0$, ℓ_0 – пространство бесконечных матриц $y=\{y(-1),y(0),y(1),...,y(N),\dots\}$ с полунормами $\|y\|_{\ell_{0T}}=\sum_{i=-1}^{T}\|y_i\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T\ge -1$.

Операторы $\mathrm{L}_{11},F_{11}:D\to L$, $\mathrm{L}_{12},F_{12}:\ell_0\to L$, $\mathrm{L}_{21},F_{21}:D\to\ell$, $\mathrm{L}_{22},F_{22}:\ell_0\to\ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Обозначим: $\mathrm{L}=\begin{pmatrix}\mathrm{L}_{11}&\mathrm{L}_{12}\\\mathrm{L}_{21}&\mathrm{L}_{22}\end{pmatrix}$. Тогда (1) записывается в виде $\mathrm{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$.

Предположим, что для любых $x(0)\in\mathbb{R}^n$ и $y(-1)\in\mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы $\dot{x}=F_{11}^0x+F_{12}^0z+z$, $\Delta y=F_{21}^0z+F_{22}^0y+u$, где операторы $F_{11}^0:D\to L$, $F_{12}^0:\ell_0\to L$, $F_{12}^0:\ell_0\to L$, $F_{21}^0:D\to\ell$, $F_{22}^0:\ell_0\to\ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так: $\mathrm{L}_0\{x,y\}=\mathrm{col}\{z,u\}$. Пусть её решение имеет представление

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\U_{21}&U_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(0)\\y(-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&W_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{W}:L\times\ell\to D\times\ell_0$ – непрерывный вольтерров оператор Коши для системы, $\mathrm{W}=\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&W_{22}\end{pmatrix}$, $U:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to D\times\ell_0$ – фундаментальная матрица для системы, $U=\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\U_{21}&U_{22}\end{pmatrix}$.

Если элементы $\mathrm{col}\{x,y\}:[0,\infty)\times[-1,\infty)\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ образуют банахово пространство $\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\cong(\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n)\times(\mathbf{M}\times\mathbb{R}^n)$ (пространство $\mathbf{D}\subset D$, пространство $\mathbf{M}_0\subset\ell_0$, пространство $\mathbf{B}\subset L$, пространство $\mathbf{M}\subset\ell$, $\mathbf{B},\mathbf{M}$ – банаховы пространства), обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например

$$\sup_{t\ge 0}\|x(t)\|_R+\sup_{k=-1,0,1,\dots}\|y(k)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty,$$

и для уравнения $\mathrm{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathrm{L}:\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\to\mathbf{B}\times\mathbf{M}$ однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Это следует из приводимой ниже теоремы (опубликовано в [9] (см. теорему 2.1.1 из [3], см. теорему 1 из [8])).

Теорема 1. Пусть $\mathrm{W}:\mathbf{B}\times\mathbf{M}\to\to\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0$ – ограниченный оператор Коши задачи Коши для модельного уравнения $L_0\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$, $\mathrm{col}\{x(0),y(-1)\}=\mathrm{col}\{0,0\}$ и U – фундаментальная матрица модельного уравнения $\mathrm{L}_0\{x,y\}=\mathrm{col}\{0,0\}$. Здесь оператор $\mathrm{L}_0:\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\to\mathbf{B}\times\mathbf{M}$. Пусть, далее, линейный оператор $\mathrm{L}:\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\to\mathbf{B}\times\mathbf{M}$ ограничен, C – оператор Коши задачи Коши $\mathrm{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$, $\mathrm{col}\{x(0),y(-1)\}=\mathrm{col}\{0,0\}$ и X – фундаментальная матрица уравнения $\mathrm{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{0,0\}$. Тогда для выполнения равенства

$$\mathrm{W}\{\mathbf{B},\mathbf{M}\}+U\{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\}=C\{\mathbf{B},\mathbf{M}\}+X\{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\}\quad(2)$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор LW (оператор WL) имел ограниченный обратный $(\mathrm{LW})^{-1}:\mathbf{B}\times\mathbf{M}\to\mathbf{B}\times\mathbf{M}$ $((\mathrm{WL})^{-1}:\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\to\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0)$.

Следствие 1 (опубликовано в [9] (см. [3, с. 47, 58, 93])). Если оператор $\mathrm{L}:\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\to\mathbf{B}\times\mathbf{M}$ огра-ничен и выполнено одно из неравенств $\|(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\mathrm{W}\|_{\mathbf{B}\times\mathbf{M}}<1$ или $\|\mathrm{W}(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\|_{\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0}<1$, то выполняется равенство (2).

В случае равенства (2) (совпадение пространства решений модельного и исследуемого уравнений) мы говорим, что уравнение $\mathrm{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$ обладает свойством $\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0$ или, уравнение $\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0$ – устойчиво.

Отметим связь понятия $\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0$-устойчивости с монографией Х.Л. Массеры и Х.Х. Шеффера о допустимости пар пространств [10] с монографией Е.А. Барбашина о сохранении свойств решений при накоплении возмущений [11]. И, не используя возможные применения $\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0$-свойства для изучения различных асимптотических свойств решений уравнений, ограничимся некоторыми обобщениями классических понятий устойчивости для функционально-дифференциальных и разностных уравнений.

Пусть модельное уравнений [3–8] $\mathrm{L}_{11}x = z$ и банахово пространство $\mathbf{B}$ с элементами из пространства L ($\mathbf{B}\subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами.

Например, $\sup\limits_{t\geq 0}\| x(t)\|_{\mathrm{R}^n} < \infty$. Тогда, положив $\mathrm{L}_{11}x \overset{def}{=} \dot{x} + x = z$, принимаем в качестве банахова пространства $\mathbf{B}$ банахово пространство L_∞ измеримых и ограниченных в существенном функций $z:[0,\infty)\to \mathrm{R}^n$ с нормой $\operatorname{vraisup}\limits_{t\geq 0}\| z(t)\|_{\mathrm{R}^n} < \infty$. Пространство $D(\mathrm{L}_{11}, L_\infty)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (\mathrm{W}_{11}z)(t) + (\mathrm{U}_{11}\alpha)(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}z(s)ds + \alpha e^{-t}$$

$$(\alpha\in \mathrm{R}^n,\ z\in L_\infty).$$

Эти решения ограничены ($\sup\limits_{t\geq 0}\| x(t)\|_{\mathrm{R}^n} < \infty$) и их производная $\dot{x} = -x + z$ принадлежит пространству L_∞. Все решения этого уравнения образуют банахово пространство с нормой $\| x\|_{D(\mathrm{L}_{11}, L_\infty)} = \operatorname{vraisup}\limits_{t\geq 0}\| \dot{x}(t) + x(t)\|_{\mathrm{R}^n} + \| x(0)\|_{\mathrm{R}^n} < \infty$, которое линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_\infty^{(1)}[0,\infty)$ с нормой

$$\| x\|_{W_\infty^{(1)}[0,\infty)} = \sup_{t\geq 0}\| x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \operatorname{vraisup}_{t\geq 0}\| \dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Дальше это пространство обозначим как W_∞, при этом $W_\infty\subset D$ и это вложение непрерывно.

Аналогично для банахова пространства $\mathbf{B}\subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathrm{L}_{11}, \mathbf{B})$ с нормой $\| x\|_{D(\mathrm{L}_{11},\mathbf{B})} = \| \dot{x} + x\|_{\mathbf{B}} + \| x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$. Здесь вложение $\mathbf{B}\subset L$ предполагается непрерывным. Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}$, и оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{B}$. Это условие эквивалентно тому [3–8], что пространство $D(\mathrm{L}_{11}, \mathbf{B})$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0,\infty)$ с нормой $\| x\|_{W_{\mathbf{B}}^{(1)}[0,\infty)} = \| \dot{x}\|_{\mathbf{B}} + \| x\|_{\mathbf{B}}$.

Дальше это пространство обозначим как $\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}$, при этом $\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}\subset D$ и это вложение непрерывно.

Уравнение $\mathrm{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathrm{L}_{11}: D(\mathrm{L}_{11}, \mathbf{B})\to \mathbf{B}$ $D(\mathrm{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно $\mathbf{B}$-устойчиво. Уравнение $\mathrm{L}_{11}x = z$ сильно $\mathbf{B}$-устойчиво, если для любого $z\in\mathbf{B}$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x\in\mathbf{B}$ и $\dot{x}\in\mathbf{B}$ [3, гл. IV, § 4.6; 7].

3. Постановка задачи: одно уравнение – линейное, разностное, определенное в дискретном множестве точек, а другое – ЛФДУП на полуоси. Сводим к ЛФДУП на полуоси.

Рассмотрим схему пункта 2 для двух уравнений (1). Операторы $\mathrm{L}_{11}: D\to L$, $\mathrm{L}_{12}:\ell_0\to L$, $\mathrm{L}_{21}: D\to \ell$, $\mathrm{L}_{22}:\ell_0\to\ell$ определяются как приведения на пары $(\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{B})$, $(\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}, \mathbf{M})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$. Эти операторы предполагаются линейные вольтерровые и ограниченные.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathrm{L}_{22}y = g$ для $g\in\mathbf{M}$ принадлежит пространству $\mathbf{M}_0$ и представляется формулой Коши

$$y[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]g[s].$$

Обозначим:

$$(C_{22}g)[t] = \sum_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]g[s],\ (Y_{22}y(-1))[t] = Y_{22}[t]y(-1).$$

Тогда каждое решение y второго уравнения в (1) имеет вид: $y = -C_{22}\mathrm{L}_{21}x + Y_{22}y(-1) + C_{22}g$. Подставим в первое уравнение системы (1):

$$\mathrm{L}_{11}x + \mathrm{L}_{12}y = \mathrm{L}_{11}x - \mathrm{L}_{12}C_{22}\mathrm{L}_{21}x + \mathrm{L}_{12}Y_{22}y(-1) + \mathrm{L}_{12}C_{22}g = f,$$

$$\mathrm{L}_{11}x - \mathrm{L}_{12}C_{22}\mathrm{L}_{21}x = f_1 = f - \mathrm{L}_{12}Y_{22}y(-1) - \mathrm{L}_{12}C_{22}g.$$

Введем обозначение $\mathrm{L} \equiv \mathrm{L}_{11} - \mathrm{L}_{12}C_{22}\mathrm{L}_{21}$, тогда первое уравнения в (1) примет вид $\mathrm{L}x = f_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $\mathrm{L}:\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}\to\mathbf{B}$ вольтеррово обратим, то есть, когда задача для уравнения $\mathrm{L}x = f_1$ обладает свойством: при любом $f_1\in\mathbf{B}$ ее решения $x\in\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f,g\}\in\mathbf{B}\times\mathbf{M}$ ее решения $\{x,y\}\in\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}\times\mathbf{M}$.

Пример 1. Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t),\ t\in[0,\infty),\\ &y[t] - dy[t-1] + cx[t] = g[t],\ t\in[0,\infty), \end{aligned} \tag{3}$$

причем

$$y(0)-dy(-1)+c(0)=y[t]-dy[t-1]+cx[t]=$$
$$=g[t]=g(0),\ \ t\in[0,1).$$

Введем пространства:

$$\ell_{\infty 0}=\{y\in\ell_0:\|y\|_{\ell_{\infty 0}}=\sup_{k=-1,0,1,\cdots}\|y(k)\|_{\mathbb{R}^n}<+\infty\},$$

$$\ell_{\infty}=\{g\in\ell:\|g\|_{\ell_{\infty}}=\sup_{k=0,1,\cdots}\|g(k)\|_{\mathbb{R}^n}<+\infty\}.$$

Введем оператор $(Sy)(t)=dy(t-1),\ \ t\geq 1$, $(Sy)(t)=0,\ t\in[0,1)$. Тогда второе уравнение запишется в виде

$$y(t)-(Sy)(t)+cx(t)\ =$$
$$=\ g_1(t)=g(t)+dy(t-1),\ t\in[0,1),$$
$$y(t)-(Sy)(t)+cx(t)\ =\ g(t),\ t\in[1,\infty).$$

Рассмотрим оператор $S:\ell_\infty\to\ell_\infty$. Известно, что оператор $(I-S):\ell_\infty\to\ell_\infty$ вольтеррово обратим тогда и только тогда, когда спектральный радиус оператора $\rho_{\ell_\infty}(S)$ в пространстве ℓ_∞ меньше единицы: $\rho_{\ell_\infty}(S)<1$ [12, гл. 4, § 4.1, задачи и упр. 1.11, к), с. 87, с. 140]. Для оператора S условие $\rho_{L_\infty}(S)<1$ эквивалентно неравенству $|d|<1$ [12, гл. 4, § 4.1, задачи и упр. 1.11, к), с. 87, с. 140].

Введем обозначения:

$$(\mathrm{L}_{11}x)(t)=\dot{x}(t)+ax(t),\ t\geq 0,$$
$$(\mathrm{L}_{12}y)[t]=by[t],\ \ t\geq 0,$$
$$(\mathrm{L}_{21}x)(t)=cx[t],\ \ t\geq 0,$$
$$(\mathrm{L}_{22}y)[t]=y[t]-(Sy)[t],\ \ t\geq 0.$$

Построим функцию Коши C_{22} и фундаментальное решение Y_{22} для уравнения $y[t]-dy[t]=g[t]$:

$$y[t]=d^{t+1}y(-1)+\sum_{s=0}^{[t]}g(s)d^{[t]-s}=$$
$$=Y_{22}[t]y(-1)+(C_{22}g)[t].$$

Отсюда выразим $y[t]$ из второго уравнения системы (3): $y[t]=d^{t+1}y(-1)+\sum_{s=0}^{[t]}(g[s]-cx[s])d^{[t]-s}=$ $=Y_{22}[t]y(-1)+(C_{22}(g-cx))[t]$. Подставив найденное y в первую формулу в (1) (или (3)), получим

$$(\mathrm{L}_{11}x)(t)+(\mathrm{L}_{12}y)[t]=\dot{x}(t)+ax(t)+$$
$$+bd^{t+1}y(-1)+b\sum_{s=0}^{[t]}(g[s]-cx[s])d^{[t]-s}\ =\ f(t).$$

Преобразуем к виду

$$\mathrm{L}x\equiv(\mathrm{L}_{11}-\mathrm{L}_{12}C_{22}\mathrm{L}_{21})x=\dot{x}(t)+ax(t)-$$
$$-bc\sum_{s=0}^{[t]}x[s]d^{[t]-s}\ =\ f_1(t)=\ f(t)-bd^{t+1}y(-1)-$$
$$-b\sum_{s=0}^{[t]}g[s]d^{[t]-s}.$$

Следовательно, $f_1\in L_\infty$, если $|d|<1$.

Запишем формулу Коши для уравнения

$$(\mathrm{L}_{11}x)(t)=bc\sum_{s=0}^{[t]}x[s]d^{[t]-s}+f_1(t):$$

$$x(t)=X_{11}(t)x(0)+\int_0^t C_{11}(t,s)(bc\sum_{i=0}^{[s]}x[i]d^{[s]-i}+f_1(s))ds.$$

Будем иметь: $X_{11}(t)=e^{-at}$, $C_{11}(t,s)=e^{-a(t-s)}$.

Возьмем $a>0$. Дадим оценку:

$$\sup_{t\geq 0}|\int_0^t C_{11}(t,s)bc\sum_{i=0}^{[s]}x[i]d^{[s]-i}ds|\leq$$
$$\leq\sup_{t\geq 0}|bc|e^{-at}\int_0^t e^{as}\sum_{i=0}^{[s]}|d|^{[s]-i}ds\cdot\|x\|_{L_\infty}\leq$$
$$\leq|bc|\cdot\frac{1}{1-|d|}\cdot\sup_{t\geq 0}e^{-at}\int_0^t e^{as}ds\cdot\|x\|_{L_\infty}\leq$$
$$\leq\frac{1}{a}\cdot|bc|\cdot\frac{1}{1-|d|}\cdot\|x\|_{L_\infty}.$$

Получаем, что норма оператора $bC_{11}cC_{22}<1$, когда

$$|bc|<a(1-|d|).$$

Таким образом, получили, что для любого $f_1\in L_\infty$ решение x задачи $\mathrm{L}x=f_1$ принадлежит пространству L_∞, кроме этого установили, что производная решения $\dot{x}$ принадлежит пространству L_∞, то есть показали, что для любого $f_1\in L_\infty$ решение x задачи $\mathrm{L}x=f_1$ принадлежит пространству W_∞.

Итак, мы решили задачу, когда для уравнения (3) при любом $\{f,g\}\in L_\infty\times\ell_\infty$ ее решения $\{x,y\}\in\mathbf{D}\cong W_\infty\times\ell_{\infty 0}$.

4. Постановка задачи: одно уравнение – линейное разностное, определенное в дискретном множестве точек, а другое – ЛФДУП на полуоси. Сводим к линейному разностному уравнению, определенному в дискретном множестве точек.

Для уравнения (1) будем пользоваться такими обозначениями, которые приняты в пунктах 2 и 3.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathrm{L}_{11}x=f$ для $f\in L$ принадлежит пространству D и представляется формулой Коши:

$$x(t)=X_{11}(t)x(0)+\int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds.$$

Обозначим

$$(C_{11}f)(t)=\int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds,$$
$$(X_{11}x(0))(t)=X_{11}(t)x(0).$$

Тогда для $x \in D$ верно представление $x = X_{11}x(0) + C_{11}f$.

Из первого уравнения в (1) найдем x:

$$x = -C_{11}L_{12}y + X_{11}x(0) + C_{11}f.$$

Подставим во второе уравнение (1): $L_{21}x + L_{22}y = -L_{21}C_{11}L_{12}y + L_{21}X_{11}x(0) + L_{21}C_{11}f + L_{22}y = g$,

$$-L_{21}C_{11}L_{12}y + L_{22}y = g_1 = g - L_{21}X_{11}x(0) - L_{21}C_{11}f.$$

Введем обозначение $L = L_{22} - L_{21}C_{11}L_{12}$. Тогда второе уравнения системы (1) примет вид $Ly = g_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $L : \mathbf{M}_0 \to \mathbf{M}$ вольтеррово обратим, то есть, когда задача для уравнения $Ly = g_1$ при любом $g_1 \in \mathbf{M}$ ее решения $x \in \mathbf{M}_0$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{M}$ ее решения $\{x, y\} \in \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$.

Пример 2. Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t),\ t \in [0, \infty), \\ &y[t] - dy[t-1] + cx[t] = g[t],\ t \in [0, \infty), \end{aligned} \tag{4}$$

Воспользовавшись формулой Коши для x, запишем первое уравнение системы (4) в виде

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)(f(s) - by[s])ds$$

или $x(t) = e^{-at}x(0) + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - by[s])ds.$

Подставим x во второе уравнение системы (4):

$$y[t] - dy[t-1] + c(e^{-a[t]}x(0) + \int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}(f(s) - by[s])ds) = g[t],$$

$$y[t] - dy[t-1] - bc\int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}y[s]ds = g_1[t] =$$

$$= g[t] - ce^{-a[t]}x(0) - c\int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}f(s)ds.$$

Вычислим интеграл:

$$bc\int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}y[s]ds = bce^{-a[t]}\int_0^{[t]} e^{as}y[s]ds =$$

$$= bce^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i]\int_i^{i+1} e^{as}ds = bce^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i]\int_i^{i+1} e^{as}ds =$$

$$= bce^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{a(i+1)} - e^{ai})/a =$$

$$= \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}).$$

Получаем уравнение

$$y[t] - dy[t-1] - \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}) =$$

$$= g_1[t],\quad t \in [0, \infty).$$

Обозначим

$$(Ky)[t] = \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}).$$

Предположим, что $a > 0$. Найдем оценку нормы $\| K \|_{\ell_{\infty 0} \to \ell_\infty}$:

$$\| Ky \|_{\ell_\infty} = \sup_{k=0,1,2,\ldots} \left| \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}) \right| \le$$

$$\le \sup_{k=0,1,2,\ldots} | y[k] | \le \sup_{k=0,1,2,\ldots} \left| \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{k-1}(e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)}) \right| \le$$

$$\le \| y \|_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a} \sup_{k=0,1,2,\ldots} \sum_{i=0}^{k-1} | e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)} | \le$$

$$\le \| y \|_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a} \sup_{k=0,1,2,\ldots} \sum_{i=0}^{k-1} (e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)}) =$$

$$= \| y \|_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a} \sup_{k=0,1,2,\ldots} (1 - e^{-ak}) = \| y \|_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a}.$$

Дальше оценим норму $\| (I-S)^{-1}K \|_{\ell_\infty \to \ell_\infty}$:

$$\| (I-S)^{-1}K \|_{\ell_\infty \to \ell_\infty} \le \| (I-S)^{-1} \|_{\ell_\infty \to \ell_{\infty 0}} \cdot \| K \|_{\ell_{\infty 0} \to \ell_\infty} \le$$

$$\le \frac{1}{1 - |d|} \cdot \frac{|bc|}{a}.$$

Получаем, что норма оператора

$$\| (I-S)^{-1}K \|_{\ell_\infty \to \ell_\infty} < 1,$$

когда $|bc| < a(1 - |d|)$. Это значит, что для любого $g_1 \in \ell_\infty$ решение y уравнения $Ly = g_1$ принадлежит пространству ℓ_∞.

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (4) при любом $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ ее решения $\{x, y\} \in W_\infty \times \ell_{\infty 0}$.

5. Постановка задачи: одно уравнение – линейное разностное, определенное в дискретном множестве точек, а другое – ЛФДУП на полуоси. Известно одно модельное линейное ГФДУП. Оно устойчиво. Для определения устойчивости первоначальной системы сводим ее *W*-методом к вспомогательному линейному интегральному уравнению.

Будем применять следствие 1 из пункта 2.

Пример 3. Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t),\ t \in [0, \infty), \\ &y[t] - dy[t-1] + cx[t] = g[t],\ t \in [0, \infty). \end{aligned} \tag{5}$$

Воспользовавшись формулой Коши, для x получаем, что первое уравнение в системе (5) записывается в виде

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)(f(s) - by[s])ds,$$

$$x = X_{11}x(0) + C_{11}(f - by).$$

Построим функцию Коши C_{22} и фундаментальное решение Y_{22} для уравнения $y[t] - dy[t-1] = g[t]$:

$$y[t] = d^{t+1}y(-1) + \sum_{s=0}^{[t]} g(s)d^{[t]-s} =$$

$$= Y_{22}[t]y(-1) + (C_{22}g)[t].$$

Отсюда выразим $y[t]$ из второго уравнения системы (5): $y[t] = d^{t+1}y(-1) + \sum_{s=0}^{[t]}(g[s] - cx[t])d^{[t]-s}$, $y = Y_{22}y(-1) + C_{22}(g - cx)$.

Возьмем модельное уравнение в виде системы

$$\dot{x}(t) + ax(t) = f(t), \quad t \in [0, \infty),$$

$$y[t] - dy[t-1] = g[t], \ t \in [0, \infty).$$

Известно, что когда $a > 0$ и $|d| < 1$, то эта система будет обладать следующим свойством: при любом $f \in L_\infty$, $g \in \ell_\infty$ следует $x \in W_\infty$, $y \in \ell_{\infty 0}$. Проверим, когда этим свойством обладает система (5). Для этого достаточно проверить утверждение следствия 1 из пункта 2: если справедливо $\|(\mathrm{L} - \mathrm{L}_0)\mathrm{W}\|_{L_\infty \times \ell_\infty} < 1$ или $\|\mathrm{W}(\mathrm{L} - \mathrm{L}_0)\|_{W_\infty \times \ell_{\infty 0}} <$ <1, то оператор LW (оператор WL) имел ограниченный обратный $(\mathrm{LW})^{-1} : L_\infty \times \ell_\infty \to L_\infty \times \ell_\infty$ ($(\mathrm{WL})^{-1} : W_\infty \times \ell_{\infty 0} \to W_\infty \times \ell_{\infty 0}$). Здесь

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{L} - \mathrm{L}_0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 & by[t] \\ cx[t] & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый вариант. Рассмотрим

$$\|\mathrm{W}(\mathrm{L} - \mathrm{L}_0)\|_{W_\infty \times \ell_{\infty 0} \to W_\infty \times \ell_{\infty 0}}.$$

Изучим, когда будет $\|\mathrm{W}(\mathrm{L} - \mathrm{L}_0)\|_{W_\infty \times \ell_{\infty 0} \to W_\infty \times \ell_{\infty 0}} < 1$.

В силу леммы 2.4.2 [3] и леммы 2 [8] можно изучать вместо $W_\infty \times \ell_{\infty 0}$-устойчивости системы (5) $C \times \ell_{\infty 0}$-устойчивости этой системы. Здесь C = $C[0, \infty)$ – банахово пространство ограниченных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \ge 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$.

Перемножим:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & by[t] \\ cx[t] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (C_{11}by)(t) \\ (C_{22}cx)[t] & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим:

$$(C_{11}by)(t) = b\int_0^t e^{-a(t-s)}y[s]ds,$$

$$(C_{22}cx)[t] = c\sum_{s=0}^{[t]} x[t]d^{[t]-s}.$$

Оценим норму оператора $\|C_{11}b\|_{\ell_{\infty 0} \to L_\infty}$:

$$|b|\sup_{t \ge 0}|(C_{11}y)(t)| = |b|\sup_{t \ge 0}\left|\int_0^t e^{-a(t-s)}y[s]ds\right| =$$

$$= |b|\sup_{t \ge 0}\left|\int_0^{[t]+\{t\}} e^{-a([t]+\{t\}-s)}y[s]ds\right| =$$

$$= |b|\sup_{t \ge 0}\left(\int_0^{[t]} e^{-a([t]+\{t\}-s)}|y[s]|ds + \int_0^{\{t\}} e^{-a([t]+\{t\}-s)}|y[s]|ds\right) \le$$

$$\le |b|\sup_{t \ge 0}\int_0^{[t]} e^{-a([t]+\{t\}-s)}|y[s]|ds +$$

$$+ |b|\sup_{t \ge 0}\int_0^{\{t\}} e^{-a([t]+\{t\}-s)}|y[s]|ds \le$$

$$\le |b|\sup_{t \ge 0} e^{-a\{t\}}\int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}|y[s]|ds +$$

$$+ |b| \cdot |y(0)|\sup_{t \ge 0} e^{-at}\int_0^{\{t\}} e^{as}ds \le$$

$$\le |b|\sup_{t \ge 0} e^{-a\{t\}-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1}|y[i]|\int_i^{i+1} e^{as}ds + |b| \cdot |y(0)|\frac{e^a - 1}{a} \le$$

$$\le \frac{|b|}{a}\sup_{t \ge 0} e^{-a\{t\}-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1}|y[i]|(e^{a(i+1)} - e^{ai}) + |b| \cdot |y(0)|\frac{e^a - 1}{a} \le$$

$$\le \frac{|b|}{a}\sup_{t \ge 0} e^{-a\{t\}-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1}(e^{a(i+1)} - e^{ai})ds \cdot \|y\|_{\ell_\infty} +$$

$$+ |b| \cdot |y(0)|\frac{e^a - 1}{a} \le$$

$$\le \frac{|b|}{a}\sup_{t \ge 0} e^{-a\{t\}} \cdot \sup_{k=0,1,2,\ldots}\sum_{i=0}^{k-1}(e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)}) \cdot \|y\|_{\ell_\infty} +$$

$$+ |b| \cdot |y(0)|\frac{e^a - 1}{a} \le$$

$$\le \frac{|b|}{a}\sup_{t \ge 0} e^{-a\{t\}} \cdot \sup_{k=0,1,2,\ldots}(1 - e^{-ak}) \cdot \|y\|_{\ell_\infty} +$$

$$+ |b| \cdot |y(0)|\frac{e^a - 1}{a} \le \frac{|b|}{a}\max\{1, e^a - 1\}\|y\|_{\ell_{\infty 0}}.$$

Иными словами, когда $0 < a \le \ln 2$, то $\|C_{11}b\|_{\ell_{\infty 0} \to L_\infty} < \dfrac{|b|}{a}$.

Оценим норму оператора $\|C_{22}c\|_{C \to L_\infty}$:

$$\sup_{t \ge 0}\left|c\sum_{i=0}^{[t]} x[i]d^{[t]-i}\right| \le |c| \cdot \sup_{t \ge 0}\sum_{i=0}^{[s]}|d|^{[s]-i} \cdot \|x\|_C \le$$

$$\le |c|\cdot\frac{1}{1-|d|}\cdot \|x\|_C,$$

$$\|C_{22}c\|_{C\to L_\infty}\le |c|\cdot\frac{1}{1-|d|}.$$

Если в пространстве $\mathbb{R}^2$ норму принять за:

$$\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|,\quad \|(x,y)\|_2=(x^2+y^2)^{1/2},$$

$$\|(x,y)\|_\infty=\max\{|x|,|y|\},$$

то тогда нормы матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ имеют вид:

$$\|A\|_1=\sup\{|a_{11}|+|a_{12}|,|a_{21}|+|a_{22}|\},$$

$$\|A\|_2\le (a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2)^{1/2},$$

$$\|A\|_\infty=\max\{|a_{11}|+|a_{21}|,|a_{12}|+|a_{22}|\}.$$

Пусть $0<a\le \ln 2$. В случае первой нормы получаем

$$\|\mathrm{W}(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\|_{C\times\ell_{\infty 0}}\le\frac{|b|}{a}+\frac{|c|}{1-|d|},$$

$$\|\mathrm{W}(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\|_{C\times\ell_{\infty 0}}\le\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{(1-|d|)^2}\right)^{1/2},$$

$$\|\mathrm{W}(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\|_{C\times\ell_{\infty 0}}\le\max\left\{\frac{|b|}{a},\frac{|c|}{1-|d|}\right\}.$$

Итак, при $0<a\le\ln 2$ получаем условия: либо $\frac{|b|}{a}+\frac{|c|}{1-|d|}<1$, либо $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{(1-|d|)^2}<1$, либо $\max\left\{\frac{|b|}{a},\frac{|c|}{1-|d|}\right\}<1.$

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (5) при любом $\{f,g\}\in L_\infty\times\ell_\infty$ ее решения $\{x,y\}\in C\times\ell_{\infty 0}$ или $\{x,y\}\in W_\infty\times\ell_{\infty 0}$.

Второй вариант. Рассмотрим

$$\|(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\mathrm{W}\|_{L_\infty\times\ell_\infty\to L_\infty\times\ell_\infty}.$$

Изучим, когда будет $\|(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\mathrm{W}\|_{L_\infty\times\ell_\infty\to L_\infty\times\ell_\infty}<1.$

Запишем: $(\bar{I}y)(t)=y[t]$ и $(\bar{I}x)(t)=x[t]$.

Перемножим:

$$\begin{pmatrix}0 & b\bar{I}\\ c\bar{I} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11} & 0\\ 0 & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}(t)=\begin{pmatrix}b(C_{22}y)[t]\\ c(C_{11}x)[t]\end{pmatrix}.$$

Вычислим:

$$c(C_{11}x)[t]=c\int_0^{[t]}e^{-a([t]-s)}x(s)ds,$$

$$b(C_{22}y)[t]=b\sum_{s=0}^{[t]}y[t]d^{[t]-s}.$$

Оценим норму оператора $\|cC_{11}\|_{L_\infty\to\ell_\infty}$. Пусть $a>0.$

Вычислим интеграл:

$$|c\int_0^{[t]}e^{-a([t]-s)}x(s)ds|=|ce^{-a[t]}\int_0^{[t]}e^{as}x(s)ds|=$$

$$=|ce^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1}\int_i^{i+1}e^{as}x(s)ds|\le$$

$$\le|c|e^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1}\|x\|_{L_\infty[i,i+1]}\int_i^{i+1}e^{as}ds=$$

$$=|c|e^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1}\|x\|_{L_\infty[i,i+1]}(e^{a(i+1)}-e^{ai})/a=$$

$$=\frac{|c|}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1}\|x\|_{L_\infty[i,i+1]}(e^{-a([t]-i-1)}-e^{-a([t]-i)}).$$

Обозначим:

$$(Kx)[t]=\frac{|c|}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1}\|x\|_{L_\infty[i,i+1]}(e^{-a([t]-i-1)}-e^{-a([t]-i)}).$$

Найдем оценку нормы $\|K\|_{L_\infty\to\ell_\infty}$:

$$\|Kx\|_{\ell_\infty}=\sup_{[t]=1,2,\ldots}|\frac{c}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1}\|x\|_{L_\infty[i,i+1]}(e^{-a([t]-i-1)}-e^{-a([t]-i)})|\le$$

$$\le\sup_{k=0,1,2,\ldots}|y[k]|\sup_{k=0,1,2,\ldots}|\frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{k-1}(e^{-a(k-i-1)}-e^{-a(k-i)})|\le$$

$$\le\|y\|_{\ell_{\infty 0}}\cdot\frac{|bc|}{a}\sup_{k=0,1,2,\ldots}\sum_{i=0}^{k-1}|e^{-a(k-i-1)}-e^{-a(k-i)}|\le$$

$$\le\|y\|_{\ell_{\infty 0}}\cdot\frac{|bc|}{a}\sup_{k=0,1,2,\ldots}\sum_{i=0}^{k-1}(e^{-a(k-i-1)}-e^{-a(k-i)})=$$

$$=\|y\|_{\ell_{\infty 0}}\cdot\frac{|bc|}{a}\sup_{k=0,1,2,\ldots}(1-e^{-ak})=\|x\|_{L_\infty}\cdot\frac{|c|}{a}.$$

Оценим норму оператора $\|bC_{22}\|_{\ell_\infty\to L_\infty}$:

$$\sup_{t\ge 0}|b\sum_{i=0}^{[t]}y[i]d^{[t]-i}|\le|b|\cdot\sup_{t\ge 0}\sum_{i=0}^{[t]}|d|^{[t]-i}\cdot\|y\|_{\ell_\infty}\le$$

$$\le|b|\cdot\frac{1}{1-|d|}\cdot\|y\|_{\ell_\infty},$$

$$\|bC_{22}\|_{\ell_\infty\to L_\infty}\le|b|\cdot\frac{1}{1-|d|}.$$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ нормой считают, как ранее: $\|(\cdot,\cdot)\|_1$, $\|(\cdot,\cdot)\|_2$, $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty$.

Пусть $a>0$. В случае первой нормы получаем

$$\|(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\mathrm{W}\|_{L_\infty\times\ell_\infty}\le\frac{|c|}{a}+\frac{|b|}{1-|d|};$$

в случае второй нормы получаем

$$\|(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\mathrm{W}\|_{L_\infty\times\ell_\infty}\le\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{(1-|d|)^2}\right)^{1/2};$$

в случае третьей нормы получаем

$$\| (\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)\mathrm{W} \|_{L_\infty \times \ell_\infty} \le \max\left\{\frac{|c|}{a}, \frac{|b|}{1-|d|}\right\}.$$

Итак, при $a>0$ получаем условия: либо $\frac{|c|}{a}+\frac{|b|}{1-|d|}<1,$ либо $\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{(1-|d|)^2}<1,$ либо $\max\left\{\frac{|c|}{a}, \frac{|b|}{1-|d|}\right\}<1.$

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (5) при любом $\{f,g\}\in L_\infty \times \ell_\infty$ ее решения $\{x,y\}\in W_\infty \times \ell_{\infty 0}$.

История вопросов устойчивости для линейных разностных уравнений и для ЛФДУП изучена в работе [13]. Там же рассмотрено применение линейного ГФДСП в модели инвестиционного развития высокотехнологических производств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.** Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 728–740.
2. **Ларионов А.С., Симонов П.М.** Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13, № 4. С. 34–37.
3. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.
4. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. I // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С. 745–754.
5. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 555–562.
6. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 190. С. 1659–1668.
7. **Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.** Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 196-204.
8. **Азбелев Н.В., Симонов П.М.** Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Известия вузов. Математика. 1997. № 6/421. С. 3–16.
9. **Симонов П.М.** Гибридная функционально-дифференциальная система // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. 2010. Вып. 3. С. 77-80.
10. **Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.
11. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
12. **Цалюк З.Б., Пуляев В.Ф.** Задачи по функциональному анализу. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 152 с.
13. **Симонов П.М.** Устойчивость дифференциально-разностной модели инвестиционного развития высокотехнологических производств // Аналитическая механика, устойчивость и управление: труды X Междунар. Четаевской конф. Казань, 12–16 июня 2012 г. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. Т. 2. С. 478–486.

Ларионов Александр Степанович, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики Братского государственного университета
665709, Иркутская область, г. Братск, ул. Макаренко, д.40,
тел.: +7(3953)32-53-84, e-mail: larios84@yandex.ru