УДК 517.938

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Н.В. Кротов

Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

CONVERGENCE OF THE AVERAGING METHOD AND APPROXIMATION OF EQUATIONS IN THE SUBSPACES

N.V. Krotov

Поиск приближенного решения нелинейного операторного уравнения в полуупорядоченном В-пространстве ведется модифицированным методом касательных посредством усреднения нелинейного уравнения и аппроксимации линейных уравнений в подпространствах. Результат применен к задаче Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка.

Ключевые слова: усреднение нелинейного уравнения, аппроксимация линейного уравнения, подпространства.

A modified tangent method using averaging a nonlinear equation and approximations of linear equations in the subspaces for the search of an approximate solution of a nonlinear operator equation in the semiordered B-space. The result has been employed in the Cauchy problem for a nonlinear normal differential equation of second order.

Keywords: averaging of a nonlinear equation, approximation of a linear equation, subspaces.

Если в *B*-пространстве *X* выделен класс элементов $x>0$ при условии, что $(x, y>0, c>0) \Rightarrow (x \neq 0, x+y>0, cx>0)$, и для всех элементов существует модуль – верхняя грань $|x| = x \vee \vee (-x)$, норма изотонна: $(|x| \leq |y|) \Rightarrow (\|x\| \leq \|y\|)$, то X называется *KB*-линеалом. Два элемента сравнимы: $x>y$, если $x-y>0$. Модуль $|x| \geq 0$. Линейный оператор называется положительным, $A>0$, если $A \neq 0$, $Ax \geq 0$ при $x>0$. Операторы $A>B$, если $A-B>0$ [1].

1. В *KB*-линеале X выделены подмножества $E, C \subset X$, операция $F: E \mapsto C$.

Производится поиск приближенного решения уравнения

$$x = F(x). \tag{1}$$

С целью усреднения подбирается линейный ограниченный (далее л.о.) оператор $\Gamma: X \to X$. Пусть операция $F(.) - \Gamma$ удовлетворяет порядковому операторному условию Липшица

$$|F(x+\Delta x) - F(x) - \Gamma \Delta x| \leq G|\Delta x| \tag{2}$$

при $x, x+\Delta x \in E$, где л.о. положительный оператор $G: X \to X$. Пусть оператор Γ имеет модулярную мажоранту – л.о. положительный оператор

$$A: X \to X, \quad |\Gamma x| \leq A|x|, \ \forall x, \tag{3}$$

$$\|A^n\| \leq a_n \ (n \geq 1), \quad a = 1 + \sum_1^\infty a_n < \infty. \tag{4}$$

Следовательно, существуют л.о. обратные операторы $(I-\Gamma)^{-1}, (I-A)^{-1}: X \to X$, где $Ix \equiv x$, $(I-A)^{-1} = \sum_0^\infty A^n > 0$, $\|(I-\Gamma)^{-1}\| \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq a$.

Пусть л.о. положительный оператор (см. (2))

$$L: X \to X, \quad L \geq (I-A)^{-1} G, \tag{5}$$

$$\|L^n\| \leq l_n \ (n \geq 1), \quad l = 1 + \sum_1^\infty l_n < \infty. \tag{6}$$

Если оператор $(I-\Gamma)^{-1}$ известен, то возможна реализация модифицированного метода касательных, когда минус-поправка $\Delta_n = \bar{x}_n - \bar{x}_{n+1}$ вычисляется по формуле

$$(I-\Gamma)\Delta_n = \bar{x}_n - F(\bar{x}_n). \tag{7}$$

2. Далее рассматривается случай, когда оператор $(I-\Gamma)^{-1}$ неизвестен. Производится аппроксимация уравнений вида (7). Вводится серия линейных замкнутых подпространств

$$X_n \subset X_{n+1} \subset X \ (n \geq 0),$$

удовлетворяющих следующим условиям: имеется серия «проекторов» – л.о. операторов

$$P_n: C \to X_n, \quad P_n x \to x \ (n \to \infty) \tag{8}$$

и серия л.о. операторов $\Gamma_n: X_n \to X_n$, для которых существуют и известны л.о. операторы $(I_n - \Gamma_n)^{-1}$, где $I_n x = x,\ x \in X_n$, то есть уравнения вида $x_n - \Gamma_n x_n = z$ могут быть эффективно однозначно решены для любой правой части $z \in X_n$. Требуется, чтобы соответственно в *B*-пространствах $X_n \to X_n$, $X_n \to X$ л.о. операторов нормы удовлетворяли соотношениям:

$$\left\|(I_n - \Gamma_n)^{-1}\right\| \le const,\ \forall n\,, \tag{9}$$

$$\left\|\Gamma_n - \Gamma\right\| \to 0\ \ (n \to \infty)\,. \tag{10}$$

Подбирается последовательность номеров

$$0 \le m(n) \le m(n+1) \to \infty\ \ (n \ge 0,\ n \to \infty) \tag{11}$$

и первоначальное приближение $x_0 \in (E \bigcap X_{m(0)})$. Обозначим (см. (4))

$$h = a\left\|x_0 - F(x_0)\right\|. \tag{12}$$

Выберем числа $b_n > 0\ (n \ge 0)$ – элементы сходящегося ряда и введем величину (см. (6))

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} l_{n-1-k} b_k\ \ (n \ge 1)\,. \tag{13}$$

Данная величина является отрезком ряда-произведения числовых положительных сходящихся рядов: отрезок соответствует диагонали матрицы $(l_i b_k)$ при $i + k = n - 1$. Положительный ряд допускает группировку, поэтому ряд $\sum\limits_n \varphi_n$ сходится. Следовательно, $\varphi_n \to 0$. Поэтому есть такой номер N, что $\varphi_n < \varphi_1$ при всех $n > N$. В конечном множестве чисел $\varphi_n\ (n \le N)$ есть наибольшее, которое является максимумом при всех номерах.

Введем число r (см. (6), (12)) и соответствующий ему метрический шар S:

$$r = hl + \max \varphi_n\,, \tag{14}$$

$$S = \left\{x : \left\|x - x_0\right\| \le r\right\}. \tag{15}$$

Пусть $S \subset E$. Процесс вычисления минус-поправок $\Delta x_n = x_n - x_{n+1} \in X_{m(n)}$ происходит следующим образом:

$$\Delta x_n - \Gamma_{m(n)} \Delta x_n = x_n - P_{m(n)} F(x_n) \tag{16}$$

(см. (8)). При обозначениях (6), (12), (13) верна следующая теорема.

Теорема 1. В шаре (15) существует и единственное решение x^* уравнения (1). Возможен такой выбор номеров (11), что процесс (16) сходится в этом шаре к решению со скоростью

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le h \cdot \min\left\{l_n l,\ \sum_{k=n}^{\infty} l_k\right\} + \varphi_n \to 0$$

$$(n \ge 1,\ n \to \infty).$$

(Здесь имеется в виду минимальная из 2 величин при каждом фиксированном номере.)

Доказательство теоремы содержится в диссертации [2, с. 38].

3. Применим эту схему к задаче Коши для дифференциального уравнения при $0 \le t \le 1$

$$y'' = f(t, y, y'),\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta\,. \tag{17}$$

Примем *B*-пространство $X = L_\infty$ ограниченных измеримых функций с нормой – существенной верхней гранью $\|x\| = \sup|x(t)|$, а C означает *B*-пространство непрерывных функций с индуцированной нормой $\|x\| = \max|x(t)|$.

С учетом начальных условий введем обозначения $x = y'',\ \ (f[x])(t) = f(t, y(t), y'(t))$.

Из соотношения $x \in L_\infty$ следует, что y – гладкая функция.

Выделено множество $E \subset X$. Определим множество

$$Y = \left\{y : y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta,\ y'' \in E\right\}. \tag{18}$$

Потребуем непрерывность функции f. Следовательно, $(y \in Y) \Rightarrow (f[x] \in C)$.

Задача (17) при $0 \le s \le 1$ эквивалентна функционально-интегральному уравнению

$$x(s) = f(s, \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)x(t)dt,\ \beta + \int_0^s x(t)dt). \tag{19}$$

Обозначим замкнутый треугольник

$$\boldsymbol{T = \{(s,t) : 0 \le t \le s \le 1\}}. \tag{19}$$

С целью усреднения введем непрерывную функцию $W(s,t)$, определенную на *T*. Она ограничена и

$$|W(s,t)| \le w\,. \tag{20}$$

Требуется: если $y, y + \Delta y \in Y$ (18), то

$$\left|(f[x + \Delta x] - f[x])(s) - \int_0^s W(s,t)\Delta x(t)dt\right| \le \le g\int_0^s |\Delta x(t)|dt, \quad \forall s. \tag{21}$$

(Для этого достаточно выпуклости множества *E*, существования при $y \in Y$ непрерывных частных производных $f'_y, f'_{y'}$ и выполнения на T следующего неравенства:

$$\left|(f'_y[x])(s) \cdot (s-t) + (f'_{y'}[x])(s) - W(s,t)\right| \le g\ ).$$

Для применения теоремы 1 введем операции: $[F(x)](s)$ – правая часть уравнения (19) (следовательно, образ $F(E) \subset C$),

$$\begin{cases} (\Gamma x)(s) = \int\limits_0^s W(s,t)x(t)dt, \\ (Ax)(s) = w\int\limits_0^s x(t)dt, \\ (Gx)(s) = g\int\limits_0^s x(t)dt \end{cases} \tag{22}$$

(см. (2), (3), (21), (22)). В *B*-пространстве $X \to$

X л.о. операторов норма $\|\Gamma\| = \max_s \int_0^s |W(s,t)|dt$.

По формуле Коши n-повторного интегрирования $(A^n x)(s) = \frac{w^n}{(n-1)!}\int_0^s (s-t)^{n-1} x(t)dt \quad (n \ge 1)$.

Находим числа (4) и оператор

$$\|A^n\| = a_n = w^n / n!, \quad \|(I-A)^{-1}\| \le a = e^w, \quad (23)$$

$$\left[(I-A)^{-1} x\right](s) = x(s) + w\int_0^s e^{w(s-t)} x(t)dt.$$

Для построения оператора L (5) введем композицию $L_0 = (I-A)^{-1}G$ и оценим сверху образ $L_0 x$ при $x(t) \ge 0$ почти всюду (далее п.в.):

$$(L_0 x)(s) = g\int_0^s x(t)dt + gw\int_0^s e^{w(s-t)}dt\int_0^t x(\tau)d\tau.$$

Здесь повторный интеграл не превосходит выражения

$$e^w\int_0^s dt\int_0^t x(\tau)d\tau = e^w\int_0^s (s-t)x(t)dt \le e^w\int_0^s x(t)dt.$$

Примем $c = g(1+we^w)$, $(Lx)(s) = c\int_0^s x(t)dt$.

Тогда выполняется сравнимость (5) и (см. (6), (12), (24))

$$\begin{cases} l_n = c^n / n!, \quad l = e^c, \\ h = e^w \sup_s |x_0(s) - (f[x_0])(s)|. \end{cases} \quad (24)$$

Введем узлы разбиения отрезка $[0,1]$ и интервалы:

$t_0 = 0, \quad t_k = 2^{-n}k, \quad \Delta_k = (t_{k-1}, t_k) \quad (1 \le k \le 2^n)$.

Подпространство X_n составим из ступенчатых функций вида $x_n(t) = \xi_k \ (t \in \Delta_k), \ \forall k$. Следовательно, $X_n \subset X_{n+1}$ – линейные замкнутые подпространства в B-пространстве X.

Введем «проекторы» (8) через значения непрерывных функций x в центрах интервалов:

$\tau_k = (t_{k-1} + t_k)/2$, $(P_n x)(t) = x(\tau_k) \quad (t \in \Delta_k, \ \forall k)$.

Непрерывная функция x, определенная на отрезке, равномерно непрерывна. Поэтому последовательность «проекций» – ступенчатых функций $(P_n x)(t) \to x(t)$ – п.в. равномерно, то есть по норме пространства X.

Аналогично обозначены для переменных s узлы и центры интервалов: координаты s_i, σ_i вместо t_k, τ_k. Выделим в треугольнике (20) квадраты и треугольники

$\Delta_{ik} = \{(s,t) : s \in \Delta_i, \ t \in \Delta_k\} \quad (2 \le i \le 2^n, \ 1 \le k \le i-1)$

$$\Delta_{ii} = \{(s,t) : s,t \in \Delta_i, \ t \le s\} \quad (1 \le i \le 2^n),$$

определим ступенчатое ядро и оператор

$$W_n(s,t) = W(\sigma_i, \tau_k) \quad ((s,t) \in \Delta_{ik}, \ k < i),$$

$$W_n(s,t) = 0 \quad ((s,t) \in \Delta_{ii}, \ \forall i),$$

$$(\Gamma_n x)(s) = \int_0^s W_n(s,t)x(t)dt.$$

Очевидно, $|W_n(s,t)| \le w$, $|\Gamma_n x| \le A|x| \ (x \in X_n)$ (см. (21), (23)). Поэтому для нормы справедливы соотношения

$$\|(I_n - \Gamma_n)^{-1}\|_{(X_n \to X_n)} \le \|(I-A)^{-1}\|_{(X \to X)}, \ \forall n,$$

и выполняется неравенство (9).

Для проверки соотношения (10) введем вспомогательные ступенчатую функцию и оператор через центры квадратов и гипотенуз:

$$W_n(s,t) = W(\sigma_i, \tau_k) \quad ((s,t) \in \Delta_{ik}, k \le i);$$

$$(\Gamma_n x)(s) = \int_0^s W_n(s,t)x(t)dt.$$

Следовательно, $|W_n(s,t)| \le w$ (см. (21)). Непрерывная функция W, определенная на замкнутом треугольнике (20), равномерно непрерывна, поэтому последовательность ступенчатых функций $|W_n(s,t)| \to W(s,t)$ п.в. равномерно на T. Таким образом (см. (23)),

$$\|\Gamma_n - \Gamma\| = \sup_s \int_0^s |W_n - W|(s,t)dt \to 0. \quad (25)$$

Обозначим функцию $\psi = |W_n - W_n|$. Ее значения на всех квадратах Δ_{ik} $(k < i)$ – нулевые, а на всех треугольниках Δ_{ii} значения $\psi(s,t) = |W_n(s,t)| \le w.$ Оценим сверху интеграл $\int_0^s \psi(s,t)dt$ без учета множества нулевой меры – конечного множества узлов s_i. Зафиксируем произвольные номер i и координату $s \in \Delta_i$. Данный интеграл равен сумме интегралов от функции $\psi : K$ на интервале $(0, s_{i-1})$ и M на интервале $(s_{i-1}, s) \subset \Delta_i$ длиной $s - s_{i-1} < 2^{-n}$. В формуле интеграла K координаты $t < s_{i-1} < s$, точки $(s,t) \in \Delta_{ik}$ $(k < i)$, функция $\psi(s,t) = 0$, интеграл $K = 0$. В формуле интеграла M точки $(s,t) \in \Delta_{ii}$, $\psi(s,t) \le w, \quad M < 2^{-n}w$. Поэтому

$$\|\tilde{\Gamma}_n - \Gamma_n\| = \sup_s \int_0^s \psi(s,t)dt \le 2^{-n}w \to 0.$$

Отсюда и из соотношения (26) следует (10).

Подбирается последовательность номеров (11). Номеру $m = m(n)$ соответствуют совокупности узлов $t_{mk} = 2^{-m}k$, интервалов Δ_{mk} при $k \le 2^m$, квадратов Δ_{mik} $(k < i)$ и их центров.

Выберем первоначальное приближение – ступенчатую функцию $x_0 \in E$:

$$x_0(t) = \xi_{mk} \quad (t \in \Delta_{mk}, \ m = m(0)).$$

Радиус (14) вычисляется по формулам (13), (25). Шар (15) принимает вид

$$S=\{x:x\in X,\ |x(t)-x_0(t)|\le r,\ \text{п. в. } t\}.$$

Требование $S\subset E$ означает условие включения для множества:

$$\{y:y(0)=\alpha,\ y'(0)=\beta,\ y''\in S\}\subset Y \quad (\text{см. (18)}).$$

При $m=m(n)$ в процессе (16) на интервалах Δ_{mk} приближение $x_n(t)=\xi_{mk}$ и минус-поправка

$$(x_n-x_{n+1})(t)=\delta_{mk}\,, \tag{26}$$

правые части уравнений (16) – ступенчатые функции со значениями при $s\in\Delta_{mi}$:

$$\eta_{mi}=\xi_{mi}-(f[x_n])(\sigma_{mi})\,.$$

Уравнение (16) является линейной алгебраической системой уравнений с треугольной матрицей

$$\begin{cases}\delta_{m1}=\eta_{m1},\\ \delta_{mi}-2^{-m}\sum\limits_{k=1}^{i-1}w_{mik}\delta_{mk}=\eta_{mi}\quad(2\le i\le 2^m),\end{cases} \tag{28}$$

где $m=m(n)$, коэффициенты w_{mik} – значения функции W в центрах (σ_{mi},τ_{mk}) квадратов Δ_{mik} $(k<i)$.

Все условия пунктов 1, 2 выполнены. Из сосоотношения $F(E)\subset C$ следует, что решение уравнения (19) $x^*\in C$. Но $x^*=(y^*)''$, где y^* – решение задачи (17). Поэтому $y^*\in C^2$.

Из теоремы 1 следует теорема 2.

Теорема 2. На множестве (18) существует и единственное решение $y^*\in C^2$ задачи (17). Возможен такой выбор номеров (11), что вычисление минус-поправок (27) по формулам (28) приводит к процессу, сходящемуся к решению вместе с производными:

$$x_n(s)\to(y^*)''(s)\ \text{ п. в. равномерно},$$

$$y_n'(s)=\beta+\int_0^s x_n(t)dt\to(y^*)'(s),$$

$$y_n(s)=\alpha+\beta s+\int_0^s(s-t)x_n(t)dt\to y^*(s)$$

равномерно.

Оценки погрешности приближения при $n\ge1$ (см. (13), (25))

$$|x_n-(y^*)''|(s)\le d_n=h\cdot\min\{ll_n,\sum_{k=n}^{\infty}l_k\}+\varphi_n\to0$$

$$(\text{п. в. } s),$$

$$|y_n'-(y^*)'|(s)\le d_n s,$$

$$|y_n-y^*|(s)\le d_n s^2/2\quad(\forall s).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Гостехиздат, 1961. 407 с.
2. **Кротов Н.В.** Композиция методов линеариазации и аппроксимации операторных, интегральных и дифференциальных уравнений: дис. канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2006. 113 с.
3. **Слугин С.Н., Кротов Н.В.** Модификация метода касательных в серии подпространств // Вестник ННГУ. Математика. 2004. Вып. 1(2). С. 171–177.
4. **Слугин С.Н., Кротов Н.В.** Прямой метод приближенного решения нелинейного уравнения в серии подпространств // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2005. Вып. 9. С. 89–98.
5. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Кротов Николай Владимирович, к.ф.-м.н., доц. кафедры численного и функционального анализа НИУ ННГУ имени Н.И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23,
тел. 8-(831)-4623363, e-mail: nkrotov@gmail.com