УДК 517.95

ФОРМУЛЫ СКАЧКА ДЛЯ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

А.Н. Конёнков

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина

JUMP RELATIONS FOR THE LEADING DERIVATIVES OF A PARABOLIC SIMPLE LAYER POTENTIAL

A.N. Konenkov

Для равномерно-параболического уравнения второго порядка устанавливаются формулы скачка для вторых производных потенциала простого слоя на границе области по пространственным переменным и первой производной по временной переменной. Скачок понимается как разность между предельными значениями изнутри и снаружи области.

Ключевые слова: параболические уравнения, потенциал простого слоя, пространства Гельдера.

For a uniformly parabolic equation of the second order jump relations for the second order derivatives with respect to space variables and the first derivative with respect to time variable. A jump relation is understood as a differnce between the limit values from inside and from ouside the domain.

Keywords: parabolic equations, simple layer potential, Hölder spaces.

Потенциал простого слоя, порожденный фундаментальным решением параболического оператора, широко используется в решении краевых задач для параболических уравнений как при теоретическом представлении и исследовании решений (см., например, [1–3]), так и при численном нахождении решения (метод граничных элементов). Для уравнения теплопроводности и компактной негладкой $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ боковой границы гладкость потенциала простого слоя исследовалась в [4], а для общего параболического уравнения второго порядка – в [5]. В [3] были получены результаты о гладкости потенциала простого слоя в областях с некомпактной негладкой боковой границей класса $C^{1,\alpha}$. В частности, было установлено, что если плотность φ при-надлежит анизотропному (параболическому) пространству Гельдера $\overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\Sigma)$, то потенциал простого слоя $U\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Условия, при которых потенциал простого слоя принадлежит $\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ в области с боковой границей $\Sigma \in C^{1,\alpha}$, найдены в [6]. Для этого был введен модифицированный потенциал простого слоя $\hat{U}\varphi$, ядром которого является фундаментальное решение, умноженное на некоторую функцию, зависящую от области и параболического оператора.

В настоящей работе устанавливаются формулы скачка старших производных модифицированного потенциала простого слоя при переходе через боковую границу области. Скачок понимается как разность соответствующих предельных значений изнутри и снаружи области. Заметим, что поскольку ядро этого потенциала отличается от фундаментального решения на некоторый множитель, то из найденных выражений можно легко получить формулы скачка для потенциала простого слоя.

Из установленных формул следует, что скачок самих вторых производных $\dfrac{\partial^2 \hat{U}\varphi}{\partial x_i \partial x_j}$, вообще говоря, не является произведением φ на некоторую функцию, зависящую только от области и оператора. Однако можно указать два случая, когда скачок будет равен (так же, как в случае производных первого порядка) функции, зависящей от поверхности и оператора, умноженной на φ. Один случай соответствует (для достаточно гладких коэффициентов) второй производной по конормали, а другой – производной по времени. Эти формулы позволяют получать информацию о зависимости гладкости модифицированного потенциала простого слоя от гладкости границы, так как гладкость параболических потенциалов имеет локальный характер. В частности, с помощью формул скачка можно непосредственно видеть из-за чего и каким образом растут предельные значения вторых производных при приближении к точке, где граница становится менее гладкой. Например, можно задать вопрос: будет ли потенциал простого слоя хотя бы для достаточно гладких плотности и коэффициентов уравнения принадлежать $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, если поверхность из класса $C^{1,\alpha}$, но гладкая по t (не касается характеристик)? Для уравнения теплопроводности и цилиндрической области получена формула, выражающая линейную комбинацию предельных значений вторых производных через среднюю кривизну H сечения поверхности гиперплоскостью $t = const$ и φ. В выражении для H в локальных координатах участвуют вторые производные по пространственным переменным. Поэтому если в какой-то одной точке вторые производные поверхности обращаются в бесконечность, $H \to \infty$ и $\varphi \neq 0$ в этой точке, то предельные значения вторых производных $U\varphi$ хотя бы с одной стороны поверхности также неограниченно растут, то есть $U\varphi$ не будет, вообще говоря, принадлежать $C^2(\overline{\Omega})$ для гладких коэффициентов и достаточно гладкой плотности, если поверхность $\Sigma \notin C^2$. Таким образом, ответ на поставленный вопрос отрицателен даже для уравнения теплопроводности и цилиндрической области.

1. Необходимые обозначения и вспомогательные утверждения.

$$x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n, |x| = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}.$$

$$P = (x,t) \in R^{n+1}, |P|_1 = |x| + |t|^{1/2}.$$

$$\partial_i = \partial/\partial x_i, \partial_t = \partial/\partial t, \partial_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j.$$

Пусть $k = (k_1,\dots,k_n)$, $k_i \geq 0, i = 1,\dots,n$ – целые числа. Обозначим $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $D_x^k = \partial_1^{k_1}\dots\partial_n^{k_n}$.

Обозначим через D слой в R^{n+1}:

$$D = \{(x,t) \in R^{n+1} | 0 < t < T < \infty\}$$

В слое D мы будем рассматривать область Ω и $\Omega^- = D \setminus \Omega$. Обозначим через Σ боковую поверхность Ω и $\Sigma_t = \Sigma \cap \{\tau = t\}$. В области Ω для $\alpha \in (0,1)$ будем рассматривать анизотропные пространства Гёльдера $C^{i,\alpha}(\overline{D})$, $i = 0,1,2$ [1] с нормами

$$\| f,\Omega \|^{(0,\alpha)} = \sup_{(x,t)\in\Omega} |f(x,t)| +$$

$$+ \sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega} \left| (f(x+\Delta x, t+\Delta t) - f(x,t)) \right|$$

$$(|\Delta x|^\alpha + |\Delta t|^{\alpha/2})^{-1}$$

$$\| f,\Omega \|^{(1,\alpha)} = \sup_{(x,t)\in\Omega} |f(x,t)| +$$

$$+ \sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega} \left| (f(x,t+\Delta t) - f(x,t)) |\Delta t|^{-(1+\alpha)/2} \right| +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \| \partial_l f,\Omega \|^{(0,\alpha)},$$

$$\| f,\Omega \|^{(2,\alpha)} = \sup_{(x,t)\in\Omega} |f(x,t)| + \sum_{l=1}^{n} \| \partial_l f,\Omega \|^{(1,\alpha)} +$$

$$+ \| \partial_t f,\Omega \|^{(0,\alpha)},$$

а также их подпространства $\overset{\circ}{C}{}^{i,\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$\overset{\circ}{C}{}^{i,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{ f \in C^{i,\alpha} \mid f|_{t=0} = 0\}, i = 0,1,$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{ f \in C^{2,\alpha} \mid f|_{t=0} = \partial_t f|_{t=0} = 0\}.$$

Кроме того, нам понадобится пространство $C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ с нормой

$$\| f,D \|^{(1+\alpha,\alpha/2)} = \sup_{(x,t)\in D} |f(x,t)| +$$

$$+ \sup_{(x,t),(x,t+\Delta t)\in D} \left| (f(x,t+\Delta t) - f(x,t)) |\Delta t|^{-\alpha/2} \right| +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \| \partial_l f,D \|^{(0,\alpha)}.$$

Обозначим $B^1(P^0,r) = \{(y',t) \in R^{n-1} \times (0,T) : |(y', t - t_0)|_1 < r\}$. Для точки $P = (x,t) \in \overline{\Omega}$ определим функцию $d(P)$ расстояния до сечения Σ_t как

$$d(P) = \inf_{Q\in\Sigma_t} |P - Q|.$$

Для $\mu > 0$ обозначим $\Omega_\mu = \{P \in \Omega \mid d(P) \leq \mu\}$. Функция расстояния до сечения оказывается полезной для изучения свойств параболических потенциалов. Границу Σ можно рассматривать как неявно заданную уравнением $d(P) = 0$, поэтому свойства функции d отражают свойства границы.

Для ограниченной области $Q \in R^n$ с границей $S \in C^k$, $k \geq 2$, функция расстояния до границы $d \in C^k(\overline{Q}^\varepsilon)$, где Q^ε – окрестность размера ε у границы S [7, с. 325], то есть гладкость расстояния до границы повторяет гладкость границы. Используя метод этой работы, установим следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть

$$\Sigma \in C^{2,\alpha}. \quad (1)$$

Тогда существует $\mu > 0$ такое, что $d \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_\mu)$.

Доказательство. Если $n = 1$, то часть Σ задается уравнением $x = g(t)$, где $g \in C^{1+\alpha/2}([0,T])$, $d(x,t) = x - g(t)$ и $d \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}^\mu)$ для достаточно малого $\mu > 0$.

Пусть $n \geq 2$. Введем обозначения:

$$B^{\tau}(P^0,t)=B(P^0,t)\cap\{t=\tau\},$$
$$B_n(P^0,t)=\{P\in\Omega \,\|\, P-P^0\,|\le\tau\},$$
$$B_n^{\tau}(P^0,t)=B_n(P^0,t)\cap\{t=\tau\}.$$

Пусть $Q\in\Sigma$ – произвольная точка на боковой границе. В главной Q системе координат матрица Гессе $D^2_{y'}g(y',t)$ имеет диагональный вид [7, с. 325]

$$D^2_{y'}g(y',t)=diag[\kappa_1,\ldots,\kappa_{n-1}],$$

где κ_i – главные кривизны сечения Σ_t в точке Q, и имеет место формула

$$\kappa_i(Q)=-\partial/\partial y_i\left(g_i(y',t)/\sqrt{1+|\nabla_{y'}g(y',t)|^2}\right). \quad (2)$$

В силу (1)

$$(\exists C_0>0)\sup_{\substack{i=1,\ldots,n-1\\ Q\in\Sigma}}|\kappa_i(Q)|\le C_0. \quad (3)$$

Положим

$$h_1=1/2C_0. \quad (4)$$

Тогда (см. [7, с. 325]) для любого $P=(x,t)\in\Omega_{h_1}$ существует единственная точка

$$Q=Q(P)=(y'(x,t),g(y'(x,t),t),t)\in\Sigma,$$

такая, что $|P-Q|=d(P)$. Точки P и Q связаны соотношением

$$P=Q+\nu(Q)d(P). \quad (5)$$

Здесь

$$y=(y',g(y',t))\in R^n,\ \nu(y',t)=(\nu_i(y',t)),\ N(y',t)=$$
$$=(1+|\nabla_{y'}g(y',t)|^2)^{-1/2},$$
$$\nu_i(y',t)=g_i(y',t)/N(y',t),\ i=1,\ldots,n-1, \quad (6)$$
$$\nu_n(y',t)=-1/N(y',t).$$

Покажем, что это равенство определяет y' и d как функции класса $C^{1,\alpha}$ от P. Зафиксируем $P_0=(x_0,t_0)\in\overline{\Omega}_{h_1}$. Найдем $Q_0=Q(P_0)\in\Sigma_{t_0}$ и введем в Q_0 главную систему координат [1] ортонормированную систему координат $(y_1,...,y_n,t)$ с центром в точке Q_0, ось Oy_n которой направлена в сторону внутренней нормали в этой точке. Определим функцию

$$f=(f_1,\ldots,f_n):\overline{U}(Q_0,h_1)=\overline{B}(Q_0,h_1)\times[0,h_1]\to R^n$$

равенством

$$f(y',t,d)=y+\nu(y',t)d. \quad (7)$$

В силу (1)

$$f\in C^{1,\alpha}(\overline{U}(Q_0,h_1)). \quad (8)$$

Покажем, что для любого $h\in(0,h_1)$ существует $\theta>0$ такое, что

$$\overline{B}_n(Q_0,\theta)\subset f(U(Q_0,h)). \quad (9)$$

Для доказательства (9) достаточно доказать вложение

$$B_n^{t_0+\tau}(Q_0,\theta)\subset f(B^{t_0+\tau}(Q_0,h)\times(0,h)), \quad (10)$$
$$\tau\in(-\theta,\theta).$$

Если $t_0+\tau\le 0$ или $t_0+\tau\ge T$, то (10) выполнено, поскольку $B_n^{t_0+\tau}(Q_0,\theta)$ пусто.

Пусть $t_0+\tau\in[0,T]$. Рассмотрим произвольное $P\in B_n^{t_0+\tau}(Q_0,h)$. Тогда (см. (5)) существует единственная точка $Q\in\Sigma_\tau$ такая, что $P=Q+$ $+\nu(Q)d(P)$. Поскольку $\Sigma\in C^{2,\alpha}$, то

$$(\exists C>0)\,|g_t(y',t)|\le C, \quad (11)$$

$(y',t)\in B(Q_0,h_1)$ и C можно выбрать независимо от Q_0. Поскольку $g(y_{0'},t_0)=0$, то

$$|g(y_0',t_0+\tau)|=\left|\int_0^{\tau}(\partial/\partial\lambda)g(y_0',t_0+\lambda)d\lambda\right|\le C|\tau|.$$

Поэтому для точки $P_\tau=(y',0,t+\tau)$ и $Q_\tau=$ $=(y_0',g(y_0',t_0+\tau),t_0+\tau)$ имеем:

$$d(P_\tau)\le|P_\tau-Q_\tau|=|g(y_0',t_0+\tau)|\le C|\tau|.$$
$$d(P)\le|P-Q_\tau|\le|P-P_\tau|+|P_\tau-Q_\tau|\le$$
$$\le|P-P_\tau|+d(P_\tau)\le 2\sqrt{\theta^2-\tau^2}+C|\tau|\le \quad (12)$$
$$\le(C+2)\theta.$$
$$|Q(P)-Q_0|\le|Q_0-P|+d(P)\le h+(C+2)h=(C+3)h.$$

Положим

$$\theta=h/(2(C+3)). \quad (13)$$

Тогда получим, что для любого $P\in B_n^{t_0+\theta}(Q_0,h)$ $|Q(P)-Q_0|\le\theta/2$. В силу выбора h и (12) имеем $d(P)\le h/2$. Вложение (9) доказано.

Выберем $P_0=(x_0,t_0)\in\Omega_h$ и $Q_0=Q(P^0)\in\Sigma_{t_0}$. В силу (1) $f(y',t,d)\in C^{1,\alpha}(\overline{U}(Q_0,h_1))$, причем $\sup_{Q\in\Sigma}\|f,U(Q,h_1)\|^{(1,\alpha)}\le C$.

Обозначим через $z=(y',d)\in R^n$. Матрица Якоби функции $f(y',d,t)$ по z в главной Q_0 системе координат имеет в точке $(y_{0'},d,t)$ диагональный вид [7, с. 325]:

$$D_z f=diag[1-\kappa_1 d,\ldots,1-\kappa_{n-1}d,1]. \quad (14)$$

Якобиан по z в точке (y_0',d) равен

$$\det D_z f=(1-\kappa_1 d)\cdots(1-\kappa_{n-1}d).$$

В силу (3) и (4) при $d<h_1$,

$$\det D_z f\ge(1-|\kappa_1|d)\cdots(1-|\kappa_{n-1}|d)\ge$$
$$\ge(1-1/2)\cdots(1-1/2)=2^{1-n}. \quad (15)$$

Обозначим

$$V(Q_0,h)=\{(x,y',d,t)\,|$$
$$(x,t)\in B_n(Q_0,h);(y',d,t)\in U(Q_0,h)\}.$$

Рассмотрим функцию $F:\overline{V}(Q_0,h_1)\to R^n$, заданную формулой $F(P,z)=x-f(z,t)$. Используя (8), получаем:

$$F \in C^{1,\alpha}(\overline{V}(Q_0,h_1)), \tag{16}$$

и норма $\| F, V(Q,h_1) \|^{(1,\alpha)}$ равномерно ограничена по Q. Из (15) получим:

$$| F_z(P,z) | = | f_z(z,t) | \geq 2^{1-n} > 0,$$

поэтому существует $F_z^{-1}(P,z)$ и

$$| \det F_z^{-1} | \leq 2^{n-1}, \ \forall (P,z) \in V(Q_0,h_1).$$

По теореме о неявной функции в некоторой окрестности любой точки из $V(Q_0,h_1)$ существует непрерывная по (x,t) и непрерывно дифференцируемая по x функция $z(x,t) = (y'(x,t), d(x,t)) \in R^n$ и для матрицы Якоби $D_x z$ имеет место равенство:

$$D_x z(x,t) = -D_x F(x,t,z) \circ$$
$$\circ [D_z F(x,t,z)]^{-1} |_{z=z(x,t)} \, [f_z(z,t)]^{-1}_{z=z(x,t)}. \tag{1}$$

Заметим, что так как $D_z f \in C^{0,\alpha}(\overline{U}(Q_0,h_1))$ и $| D_z f | \geq 2^{1-m}$, то

$$[D_z f]^{-1} \in C^{0,\alpha}(\overline{U}(Q_0,h_1)). \tag{2}$$

Покажем, что для некоторого $h \leq h_1/(2(C+3))$, где C из (11),

$$z \in C^{1+\alpha}(\overline{B}_n(Q_0,h)) \tag{3}$$

и нормы $\| z, B_n(P^0,h) \|^{(1,\alpha)}$ равномерно ограничены по $Q_0 \in \Sigma$.

Для этого достаточно доказать следующие оценки:

$$| z(x,t+\Delta t) - z(x,t) | \leq C | \Delta t |^{(1+\alpha)/2}, \tag{20}$$
$$(x,t),(x,t+\Delta t) \in B_n(Q_0,h);$$

$$| D_x z(x+\Delta x,t) - D_x z(x,t) | \leq C | \Delta x |^{\alpha/2}, \tag{21}$$
$$(x,t),(x+\Delta x,t) \in B_n(Q_0,h);$$

$$| D_x z(x,t+\Delta t) - D_x z(x,t) | \leq C | \Delta t |^{\alpha/2}, \tag{22}$$
$$(x,t),(x,t+\Delta t) \in B_n(Q_0,h).$$

Докажем (20). Рассмотрим $I = | F(x,t+\Delta t, z(x,t+\Delta t)) - F(x,t,z(x,t+\Delta t)) |$.

В силу (9) $(z(x,t),t), (z(x,t+\Delta t),t) \in U(Q_0,h_1)$. Из (16) имеем

$$I \leq C | \Delta t |^{(1+\alpha)/2}, \tag{23}$$

причем C не зависит от P^0.

Используя явный вид f (см. (8)), для $D_z f(z,t)$ имеем:

$$D_z f(z,t) = \begin{pmatrix} 1 + d\partial_1 \nu_1 & \cdots & d\partial_{n-1}\nu_1 & \nu_1 \\ d\partial_1 \nu_2 & \cdots & d\partial_{n-1}\nu_2 & \nu_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ d\partial_{n-1}\nu_1 & \cdots & 1 + d\partial_{n-1}\nu_{n-1} & \nu_1 \\ \partial_1 g + d\partial_1 \nu_n & \cdots & \partial_{n-1} g + d\partial_{n-1}\nu_n & \nu_n \end{pmatrix},$$

$D_z f(z,t) = A + d^n B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \nu_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \nu_1 \\ \partial_1 g & \cdots & \partial_{n-1} g & \nu_n \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1 \nu_1 & \partial_2 \nu_1 & \cdots & \partial_{n-1}\nu_1 & 0 \\ \partial_1 \nu_2 & \partial_2 \nu_2 & \cdots & \partial_{n-1}\nu_2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \partial_{n-1}\nu_1 & \partial_2 \nu_{n-1} & \cdots & \partial_{n-1}\nu_{n-1} & 0 \\ \partial_1 \nu_n & \partial_2 \nu_n & \cdots & \partial_{n-1}\nu_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку для $B = (b_{ij})$, имеем

$$\forall \ x \in R^n \quad | Bx |^2 \leq n \max_{i,j} b_{ij}^2 (| x_1 |^2 + \ldots + | x_n |^2) \leq$$
$$\leq n^3 \max_{i,j} b_{ij}^2 | x |^2,$$

то $| Bx | \leq C | x |$, где константа C зависит только от $\| \Sigma \|^{(2,\alpha)}$ и n. Уменьшим, если необходимо, h так, чтобы $Ch \leq 1/4$.

Так как $g_i(y_0,t_0) = 0, i = 1,\ldots,n-1$, то $| g_i(y,t_0+\tau) | \leq C(| y | + | \tau |^{1/2})$. Уменьшим h так, чтобы $| g_i(y,t) | \leq 1/4n^4 \ \forall (y,t) \in B(Q_0,h)$, причем h можно выбрать одно для всех $Q_0 \in \Sigma$. Представим матрицу A в виде $A = E + A'$, где

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \nu_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \nu_1 \\ \partial_1 g & \cdots & \partial_{n-1} g & \nu_n - 1 \end{pmatrix}.$$

Для элементов матрицы $A' = (a'_{ij})$ имеем

$$\nu_n(y',t) = (1 + | \nabla_{y'} g(y',t) |^2)^{-1/2} \geq 1 - 18n^7,$$
$$| \nu_n - 1 | \leq 1/8n^7,$$
$$| \nu_i | \leq (1 - \nu_n^2)^{1/2} \leq (12n^7 - 116n^{14})^{1/2} \leq 1\sqrt{2}n^{-7/2}.$$

Поэтому $| A'x | \leq n^{3/2} \max_{i,j} | a'_{ij} | \| x | \leq 14 | x |$, $| D_z F(x,z,t)x - x | \leq | A'x | + | Bx | \leq | x | 2$, и

$$\begin{gathered} | F(x,t,z+\Delta z) - F(x,t,z) | \times \\ \times \left| \int_0^1 D_z F(x,t,z+\lambda \Delta z) \Delta z d\lambda \right| \geq \\ \geq | \Delta z | - \int_0^1 | D_z F(x,z+\lambda \Delta z,t) \Delta z - \\ - \Delta z | d\lambda \geq | z | /2. \end{gathered} \tag{24}$$

Кроме того, поскольку $F(x,t+\Delta t, z(x,t+\Delta t)) = 0$, $F(x,t,z(x,t)) = 0$, то

$$I = | F(x,t,z(x,t+\Delta t)) | =$$
$$= | F(x,t,z(x,t+\Delta t)) - F(x,t,z(x,t)) |$$

и из (24) получим:

$$I \ge 1/2\,|\,z(x,t+\Delta t)-z(x,t)\,|. \qquad (25)$$

Объединяя (23) и (25), получим (20) .

Докажем (21). Покажем сначала, что $z(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x :

$$|\,z(x+\Delta x,t)-z(x,t)\,| \le C\,|\,\Delta x\,|,$$
$$(x,t),(x+\Delta x,t)\in B_n(Q_0,h). \qquad (26)$$

Действуя так же, как при доказательстве оценки (20) , рассмотрим

$$J = |\,F(x+\Delta x,t,z(x+\Delta x,t))-$$
$$-F(x,t,z(x+\Delta x,t))\,| = |\,\Delta x\,|.$$

Из (24) получаем

$$J = |\,F(x,t,z(x+\Delta x,t))-F(x,t,z(x,t))\,| \ge$$
$$\ge 1/2\,|\,z(x+\Delta x,t)-z(x,t)\,|.$$

Откуда и следует (26) .

Вернемся к (21). В силу (17), (18) и (26) имеем:

$$|\,D_x z(x+\Delta x,t)-D_x z(x,t)\,| = |\,f_z^{-1}(z(x+\Delta x,t),t)-$$
$$-f_z^{-1}(z(x,t),t)\,| \le C\,|\,z(x+\Delta x,t)-z(x,t)\,|^{\alpha} \le$$
$$\le C_1\,|\,\Delta x\,|^{\alpha}.$$

Докажем (22).

$$|\,D_x z(x,t+\Delta t)-D_x z(x,t)\,| \le$$
$$\le |\,f_z^{-1}(z(x,t+\Delta t),t+\Delta t)-f_z^{-1}(z(x,t+\Delta t),t)\,|+$$
$$+|\,f_z^{-1}(z(x,t),t+\Delta t)-f_z^{-1}(z(x,t),t)\,| \le$$
$$\le C\,|\,\Delta t\,|^{\alpha/2}+C\,|\,z(x,t+\Delta t)-z(x,t)\,|^{\alpha} \le$$
$$\le C\,|\,\Delta t\,|^{\alpha/2}+C\,|\,\Delta t\,|^{(\alpha^2+\alpha)/2} \le$$
$$\le C\,|\,\Delta t\,|^{\alpha/2}+h^{\alpha^2/2}\,|\,\Delta t\,|^{\alpha/2} = C_1\,|\,\Delta t\,|^{\alpha/2}.$$

Оценка (22) доказана, (19) доказано.

Возьмем $h_2 = h/(4(C+3))$, где C – та же константа, что и в (11). Покажем, что

$$\|\,\partial_i d,\Omega_{h_2}\,\|^{(1,\alpha)} \le C < \infty. \qquad (27)$$

Для доказательства (27) достаточно показать следующие оценки:

$$|\,d_i(x,t+\Delta t)-d_i(x,t)\,| \le C\,|\,\Delta t\,|^{(1+\alpha)/2},$$
$$(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega_{h_2}; \qquad (28)$$

$$|\,\partial_{ij}d(x+\Delta x,t)-\partial_{ij}d(x,t)\,| \le C\,|\,\Delta t\,|^{(1+\alpha)/2},$$
$$(x,t),(x+\Delta x,t)\in\Omega_{h_2}; \qquad (29)$$

$$|\,\partial_{ij}d(x,t+\Delta t)-\partial_{ij}d(x,t)\,| \le C\,|\,\Delta t\,|^{\alpha/2},$$
$$(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega_{h_2}. \qquad (30)$$

Оценки (28)–(30) доказываются аналогично.

Докажем (28). Зафиксируем $P_0 = (x,t)\in\Omega_{h_2}$. Обозначим $Q_0 = Q_0(P_0)$. Имеет место равенство [4, с.325]:

$$d_i(x,t) = \nu_i(y'(x,t),t). \qquad (31)$$

Рассмотрим произвольную точку $P = (x,t)\in B_n(Q_0,2h_2)$ и точку $Q = Q(P)$. В Q_0 системе координат имеем: $Q(P) = (y'(x,t),g(y'(x,t),t),t)$. Так как $h_2 = h/4(C+3)$, то из (9) следует, что $(y'(x,t),t)\in B(Q_0,h/2)$, и в силу (6), (9) и (31)

$$d_i(x,t) = \nu_i(y'(x,t),t)\in C^{1,\alpha}(\overline{B}_n(Q_0,2h_2)), \qquad (32)$$

причем

$$\sup_{Q\in\Sigma}\|\,d_i,B_n(Q,2h_2)\,\|^{(1,\alpha)} \le \infty. \qquad (33)$$

Рассмотрим два случая:

1. $|\,\Delta t\,| \le h_2$. Тогда $(x,t+\Delta t)\in B(Q,2h_2)$, так как $|\,Q-(x,t+\Delta t)\,| \le |\,Q-P\,|+|\,P-(x,t+\Delta t)\,| = d(P)+h_2 \le 2h_2$. Поэтому (28) следует из (33) .

2. $|\,\Delta t\,| \ge h_2$. В этом случае, используя (33), получим: $\big[|\,\partial_i d(x,\Delta t)-\partial_i d(x,t)\,|\big]\,|\,\Delta t\,|^{-(1+\alpha)/2} \le$ $\le [\,|\,\partial_i d(x,\Delta t)\,|+|\,\partial_i d(x,t)\,|\,]\,|\,\Delta t\,|^{-(1+\alpha)/2} \le C h_2^{-(1+\alpha)/2}$.

Оценка (28) доказана.

Положим $\mu = h_2/(4(C+3))$, где C – та же константа, что и в (11) . Рассмотрим произвольную точку $P^0\in\Omega_{2\mu}$ и $Q_0 = Q(P^0)$. Рассмотрим Q_0 -систему координат.

Покажем, что в $B_n(Q_0,2\mu)$ существует $\partial_t d(x,t)$ и в Q_0 -системе координат имеет место равенство:

$$\partial_t d(x,t) = -g_t(y'(x,t),t)N(y'(x,t),t). \qquad (34)$$

Пусть $P = (x,t)\in B_n(Q_0,2\mu)$. Из (9) вытекает, что

$$B_n(Q_0,h/2(C+3))\subset\Omega_h \quad \forall h\in(0,h_1). \qquad (35)$$

Обозначим $\nu'\in R^{n-1}$ вектор $\nu' = (\nu_i)$, $i = 1,\ldots,n-1$. В силу (4) $d(P) = c \le \mu/2$. Поскольку $d(Q+c\nu(Q)) = c,\ Q\in\Sigma, c\in[0,h],$ то для $(y',t+\Delta t)\in B(Q_0,2\mu)$ имеем:

$$d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t) = c, \qquad (36)$$
$$d(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t+\Delta t) = c. \qquad (37)$$

Используя (36) и (37), получим:

$$d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)-$$
$$-d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t) =$$
$$= d(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t+\Delta t)-$$
$$-d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t)+$$
$$+d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)-$$
$$-d(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t+\Delta t) =$$
$$= d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)-$$
$$-d(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$

$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t+\Delta t)$$
$$=[d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)-$$
$$-d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)]+$$
$$+[d(y'+c\nu'(y',t),g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)-$$
$$-d(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t+\Delta t)]-I_1(\Delta t)+I_2(\Delta t).$$

В силу (27) имеем ($\theta\in[0,1]$):

$$I_1(\Delta t)=d_n(y'+c\nu'(y',t),$$
$$g(y',t)+\theta\Delta_t g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)\times$$
$$\times[g(y',t+\Delta t)-g(y',t)]=d_n(y'+c\nu'(y',t),$$
$$g(y',t)+\theta\Delta_t g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)g_t(y',t)\Delta t+$$
$$+d_n(y'+c\nu'(y',t),$$
$$g(y',t)+\theta\Delta_t g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)\times$$
$$\times[g(y',t+\Delta t)-g(y',t)-g_t(y',t)\Delta t]+$$
$$+[d_n(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t+\Delta t)-$$
$$-d_n(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t)]\times$$
$$\times[g(y',t+\Delta t)-g(y',t)]+[d_n(y'+c\nu'(y',t),$$
$$g(y',t)+\theta\Delta_t g(y',t)+c\nu_n(y',t),t)-$$
$$-d_n(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t)]\times$$
$$\times[g(y',t+\Delta t)-g(y',t)].$$

С помощью (1) и (27) получаем:

$$|I_1(\Delta t)-d_n(x,t)g_t(y'(x,t),t)\Delta t|\le$$
$$\le C|\Delta t|^{1+\alpha/2}+C|\Delta t|^{\alpha/2}|\Delta t|+C\theta|\Delta_t g(y',t)|^2\le$$
$$\le C|\Delta t|^{1+\alpha/2}.$$

Откуда, учитывая (31) для $d_n(x,t)$, имеем:

$$\lim_{\Delta t\to 0} I_1(\Delta t)/\Delta t=g_t(y'(x,t),t)N(y'(x,t),t). \qquad (38)$$

Введем векторы $Y^k(\theta)\in R^n,\ k=1,\dots,n,\ \theta\in[0,1]$ с компонентами:

$$Y_i^k(\theta)=\begin{cases} y_i+c\nu_i(y',t), i<k,\\ y_i+c\nu_i(y',t)+c\theta\nu_i(y',t), i=k<n,\\ y_i+c\nu_i(y',t+\Delta t), k<i<n,\\ g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t), i=n>k,\\ g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t)+c\theta\Delta_t\nu_n(y',t),\\ i=n=k.\end{cases} \qquad (39)$$

Так как $Y^{k+1}(0)=Y^k(1)$, то $I_2(\Delta t)$ можно переписать в виде

$$I_2(\Delta t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}[d(Y^k(0),t+\Delta t)-d(Y^k(1),t+\Delta t)]. \qquad (40)$$

Поскольку (см. (31))

$$d_i(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t)=\nu_i(y',t),$$
$$d_i(y'+c\nu'(y',t+\Delta t))=\nu_i(y',t+\Delta t),$$

то

$$c/2\sum_{k=1}^{n}[d_k^2(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+$$
$$+c\nu_n(y',t),t)-d_k^2(y'+c\nu'(y',t+\Delta t), \qquad (41)$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t)]=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}[\nu_k^2(y',t)-\nu_k^2(y',t+\Delta t)]=0.$$

Вычитая (41) из (40), получим:

$$I_2(\Delta t)=\sum_{k=1}^{n}[d(Y^k(0),t+\Delta t)-d(Y^k(1),t+\Delta t)-$$
$$-c/2\{d_k^2(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t)-$$
$$-d_k^2(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t)\}]=\sum_{k=1}^{n}J_k.$$

Оценим J_k. Заметим сначала, что

$$|Y^k(\theta)-(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t))|\le$$
$$\le C|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}. \qquad (42)$$

Используя тождество

$$(a^2-b^2)/2=a(a-b)-(a-b)^2/2,$$

получим:

$$c/2[d_k^2(y'+c\nu'(y',t),g(y',t)+c\nu_n(y',t),t)-$$
$$-d_k^2(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t)]$$
$$=c\nu_k(y',t+\Delta t)[\nu_k(y',t)-\nu_k(y',t+\Delta t)]-$$
$$-c/2[\nu_k(y',t)-\nu_k(y',t+\Delta t)]^2=J_k^1+J_2^k.$$

По теореме о среднем для $d(Y^k(0),t+\Delta t)-$ $-d(Y^k(1),t+\Delta t)$ имеем:

$$J_k=c[\nu_k(y',t)-\nu_k(y',t+\Delta t)][d_k(Y^k(\theta),t+\Delta t)-$$
$$-cd_k(y'+c\nu'(y',t+\Delta t),$$
$$g(y',t+\Delta t)+c\nu_n(y',t+\Delta t),t)]+J_k^2,\ \theta\in[0,1].$$

В силу (32)

$$|J_k^2|\le C|\Delta t|^{1+\alpha}. \qquad (43)$$

Используя (27), (32), (42) и (43), получим, что

$$|J_k|\le C|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}+C|\Delta t|^{1+\alpha}=$$
$$=C_1|\Delta t|^{1+\alpha},$$

откуда

$$\lim_{\Delta t\to 0} I_2(\Delta t)/\Delta t=0. \qquad (44)$$

Объединяя (38) и (44), получим (34). Из (19) и (34) следует, что

$$\partial_t d\in C^{0,\alpha}(\overline{B}_n(Q_0,2\mu)) \qquad (45)$$

и

$$\sup_{Q\in\Sigma}\|\partial_t d,B_n(Q,2\mu)\|^{(0,\alpha)}\le C.$$

Также, очевидно,

$$0 < d(P) < \mu \quad \forall P \in \Omega_\mu. \qquad (46)$$

Доказательство того, что

$$\partial_t d \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_\mu) \qquad (47)$$

проводится теперь так же, как и доказательство оценки (28).

Объединяя (27), (46) и (47), заключаем, что $d \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_\mu)$. Лемма доказана.

2. Формулы скачка для старших производных модифицированного потенциала простого слоя.

В слое D рассмотрим параболический оператор

$$L = \partial_t - a_{ij}(x,t)\partial_{ij} - b_i(x,t)\partial_i - c(x,t), \qquad (48)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

$$(\exists\delta > 0), \quad a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \delta\,|\,\xi\,|^2, \quad \forall\xi \in R^n$$
$$\forall(x,t) \in \overline{D}; \qquad (49)$$

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\overline{D}). \qquad (50)$$

Как известно [8], при этих условиях существует фундаментальное решение $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ для оператора L.

Для точки $Q \in \Sigma$ обозначим через $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in R^n$, $i = 1,\ldots,n$ вектор конормали с компонентами $\eta_i(Q) = a_{ij}(Q)\nu_j(Q)$ и $a[\nu](Q) = a_{ij}(Q)\nu_i(Q)\nu_j(Q)$.

Пусть $M(x,t)$ – дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами в $\overline{D}$. Пусть функция u определена в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ и такова, что $Mu \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}^-)$. Определим скачок Mu при переходе через границу как $[Mu](P) = M^+u(P) - M^-u(P)$, $P \in \Sigma$, где $M^+u(P) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} Mu(P + \varepsilon\nu(P)), M^-u(P) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} Mu(P - \varepsilon\nu(P))$.

Для непрерывных и ограниченных функций $\varphi : \Sigma \to R$ будем рассматривать потенциал простого слоя

$$U\varphi(P) = \int_\Sigma \Gamma(P,Q)\varphi(Q)dQ \qquad (51)$$

и модифицированный потенциал простого слоя

$$\hat{U}\varphi(P) = \int_\Sigma \Gamma(P,Q)a[\nu](Q)\varphi(Q)dQ. \qquad (52)$$

Здесь и далее интеграл по Σ понимается как повторный $\int_\Sigma dQ = \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_\tau} ds.$

Теорема 2. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (49) и (50), $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$, а граница $\Sigma \in C^{2,\alpha}$ – компактна. Тогда имеют место формулы скачка:

$$[\eta_i\eta_j\hat{U}_{ij}\varphi](P) = -[\eta_i\eta_j\partial_{ij}d + a[\nu]Ld\,]\varphi(P), \qquad (53)$$

$$[\hat{U}_t\varphi](P) = -\partial_t d\varphi(P), \quad P \in \Sigma \cap \{t > 0\}. \qquad (54)$$

Доказательство. Рассмотрим неотрицательную функцию $w \in C^\infty(R)$, такую, что:

$$w(x) = \begin{cases} 1, & |\,x\,| \leq 1/2; \\ 0, & x\,| \geq 1. \end{cases}$$

Для $h > 0$ введем следующие обозначения:

$$w_h(x) = w(x/h), \quad d_h(P) = d(P)w_h(d(P)).$$

Из леммы 1 следует, что

$$d_\mu \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}). \qquad (55)$$

Рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u\,|_\Sigma = \varphi \quad \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma), \\ u\,|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad (56)$$

Существует единственное решение u [1] этой задачи и

$$u \in \overset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\,u,\Omega\,\|^{(1,\alpha)} \leq C\,\|\,\varphi,\Sigma\,\|^{(1,\alpha)}. \qquad (57)$$

Лемма 3. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (49) и (50), граница $\Sigma \in C^{2,\alpha}$, u – решение первой краевой задачи (56). Тогда $ud_\mu \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$,

$$\|\,ud_\mu,\Omega\,\|^{(2,\alpha)} \leq C\,\|\,u,\Omega\,\|^{(1,\alpha)}. \qquad (58)$$

Доказательство. Функция $v(P) = u(P)d_\mu(P)$ является решением первой краевой задачи:

$$\begin{cases} Lv = f, \\ v\,|_\Sigma = 0, \\ v\,|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где $f = L(ud_\mu)$. Из (55), (56) и (57) имеем:

$$f = d_\mu Lu + u(L+c)d_\mu - 2a_{ij}\partial_i u\partial_j d_\mu =$$
$$= u(L+c)d_\mu - 2a_{ij}\partial_i u\partial_j d_\mu \in \overset{\circ}{C}{}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),$$
$$\|\,f,\Omega\,\|^{(0,\alpha)} \leq C\,\|\,u,\Omega\,\|^{(1,\alpha)}.$$

Из [9] теперь следует, что

$$v \in \overset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\,v,\Omega\,\|^{(2,\alpha)} \leq$$
$$\leq C_1\,\|\,f,\Omega\,\|^{(0,\alpha)} \leq C_2\,\|\,u,\Omega\,\|^{(1,\alpha)}. \qquad (59)$$

Лемма доказана.

Поскольку из равенств $d_\mu\,|_\Sigma = d\,|_\Sigma = 0$, $\partial_i d_\mu\,|_\Sigma = \partial_i d\,|_\Sigma = \nu_i$ следует, что

$$\partial_i v\,|_\Sigma = d_\mu u_i\,|_\Sigma + u\partial_i d_\mu\,|_\Sigma = u\partial_i d_\mu\,|_\Sigma = \varphi\nu_i,$$

то получим:

$$\partial v/\partial\eta\,|_\Sigma = a_{ij}\nu_i\partial_j v\,|_\Sigma = a_{ij}\nu_i\nu_j\varphi = a[\nu]\varphi. \qquad (60)$$

Запишем для v формулу Грина:

$$v(P) = V[Lv](P) - \hat{U}\varphi(P), \quad P \in \overline{\Omega}. \qquad (61)$$

Откуда

$$\hat{U}\varphi = V[Lv] - v \in \overset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \|\hat{U}\varphi\|^{(2,\alpha)} \le C\|\varphi,\Sigma\|^{(1,\alpha)}. \tag{62}$$

Так как первые производные объемного потенциала непрерывны при переходе через боковую границу, то для производной по нормали $v_\nu|_\Sigma$ имеем:

$$v_\nu(P) = \nu_i \nu_i \varphi(P) = \varphi(P) = = V_\nu[Lv](P) + \varphi(P)/2 - \hat{U}_\nu^0\varphi(P),\ P \in \Sigma, \tag{63}$$

где через $\hat{U}_\nu^0$ обозначено прямое значение нормальной производной модифицированного потенциала простого слоя на Σ. Обозначим

$$\theta(P) = V[Lv](P) - \hat{U}\varphi(P),\ P \in \overline{D}. \tag{64}$$

Из (63) и формулы скачка для потенциала простого слоя следует, что

$$\theta_\nu^-(P) = V_\nu[Lv](P) - \varphi(P)2 - \hat{U}_\nu^0\varphi(P) = 0,\ P \in \Sigma,$$

где через θ_ν^- обозначено предельное значение θ_ν снаружи Ω. Поскольку

$$LVv(P) = 0,\ P \in \Omega^-, \tag{65}$$

то в силу единственности решения второй краевой задачи

$$\begin{cases} L\theta = 0, \\ \theta_\nu|_\Sigma = 0, \\ \theta|_{t=0}\ 0, \end{cases}$$

имеем:

$$\theta(P) \equiv 0\ P \in \overline{\Omega}^-. \tag{66}$$

Откуда

$$\hat{U}\varphi(P) = V[Lv](P),\ P \in \overline{\Omega}^-. \tag{67}$$

Пусть $M(x,t,\partial/\partial x,\partial/\partial t)$ – дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами в $\overline{D}$. Пусть также существуют M^+u, $M^\pm v$ и $M^\pm V[Lv]$ – предельные значения изнутри и снаружи Ω. Тогда из (61) и (67) следует, что существует $[M\hat{U}\varphi]$ и

$$[M\hat{U}\varphi] = -M^+v + [MV[Lv]]. \tag{68}$$

Используя формулу скачка для вторых производных объемного потенциала [10]:

$$[V_{ij}\varphi](P) = -\nu_i\nu_j a[\nu]\varphi(P),\ P \in \Sigma,\ t > 0, \tag{69}$$

для производных $\hat{U}\varphi$ получим:

$$\begin{aligned} [\hat{U}_{ij}\varphi] &= -\partial_{ij}(ud_\mu)|_\Sigma - \\ &- \nu_i\nu_j a[\nu]L(ud_\mu)|_\Sigma = -u\partial_{ij}d - u_i d_j - \\ &- u_j d_i - u_{ij}d - \nu_i\nu_j a[\nu][uLd - 2a_{ij}u_i d_j]_\Sigma = \\ &= -\varphi\partial_{ij}d - u_i\nu_j - u_j\nu_i - \\ &- \nu_i\nu_j a[\nu]\big[\varphi Ld - 2\partial u\partial\eta\big]. \end{aligned} \tag{70}$$

Учитывая равенство $a_{ij}\nu_i\nu_j = a[\nu]$, получим:

$$\begin{aligned} [\eta_i\eta_j\hat{U}_{ij}\varphi] &= -\varphi a_{il}\nu_l a_{jk}\nu_k\partial_{ij}d - \\ &- a_{il}\nu_l a_{jk}\nu_k u_i\nu_j - a_{il}\nu_l a_{jk}\nu_k u_j\nu_i - \\ &- a_{il}\nu_l a_{jk}\nu_k\nu_i\nu_j a[\nu]\big[\varphi Ld - 2\partial u\partial\eta\big] = \\ &= -\varphi\eta_i\eta_j\partial_{ij}d - 2a[\nu]\partial u\partial\eta u - \\ &- a[\nu]\varphi Ld + 2a[\nu]\partial u/\partial\eta u = \\ &= -[\eta_i\eta_j\partial_{ij}d + a[\nu]Ld]\varphi. \end{aligned} \tag{71}$$

Так как в Ω $LVv = v$, то, используя (69), получим $[V_t[Lv]] = 0$, откуда $[\hat{U}_t\varphi] = -v_t^+ = -\partial_t(ud)|_\Sigma = -[u_t d + u\partial_t d]_\Sigma = -\varphi\partial_t d$. Теорема доказана.

Замечание. Если a_{ij} имеют производные первого порядка по x, удовлетворяющие условию Гельдера, то формула (71) эквивалентна следующей:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\hat{U}\varphi\right] = -\left\{\frac{\partial^2 d}{\partial\eta^2} + a[\nu]Ld\right\}\varphi. \tag{72}$$

Доказательство. Используя формулу скачка для первых производных потенциала простого слоя, получим:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\hat{U}\varphi\right] &= [\eta_i\eta_j\hat{U}_{ij}\varphi] + [\eta_i\partial_i\eta_j\hat{U}_j\varphi] = \\ &= [\eta_i\eta_j\hat{U}_{ij}\varphi] - \nu_j\eta_i\partial_i\eta_j\varphi = \\ &= -[\eta_i\eta_j\partial_{ij}d + a[\nu]Ld + \eta_i\partial\eta_j d_j]\varphi - \\ &- \left\{\partial^2\partial\eta^2 d + a[\nu]Ld\right\}\varphi. \end{aligned}$$

Равенство (72) доказано.

Следствие 4. Для уравнения теплопроводности $u_t = \Delta u$ и цилиндрической области имеет место формула:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}U\varphi\right] = -(n-1)H\varphi, \tag{73}$$

где $H = 1/(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_i$ – средняя кривизна сечения Σ_t.

Доказательство. Для уравнения теплопроводности $a[\nu] \equiv 1$ и $U\varphi \equiv \hat{U}\varphi$. Из (72) имеем:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\hat{U}\varphi\right] &= \left\{\partial^2 d\partial\nu^2 + Ld\right\}\varphi = \\ &= -[\nu_i\partial_i(d_j\nu_i) - \Delta d]\varphi = \\ &= -[\nu_i\partial_i(d_j^2) - \Delta d]\varphi = \Delta d\varphi. \end{aligned} \tag{74}$$

Поверхность Σ можно считать неявно заданной уравнением $d(P) = 0$. Средняя кривизна сечения в этом случае вычисляется по формуле [4, с. 326]:

$$H = -1/(n-1)\partial_i\left[\partial_i d\,|\nabla d|^2\right]_\Sigma = -1/(n-1)\Delta d|_\Sigma, \tag{75}$$

так как $|\nabla d(P)|^2 = \nu_i^2(Q(P)) \equiv 1, P \in \overline{\Omega}_\mu$. Из (74) и (75) следует (73). Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бадерко Е.А.** Решение методом граничных интегральных уравнений задач для линейных параболических уравнений произвольного порядка в негладких областях: дис… д-ра физ.-мат. наук. М., 1992.
2. **Baderko E.A.** Some Shauder estimates // Math. Methods Appl. Sc. 1997. Vol. 20. P. 449–459.
3. **Бадерко Е.А.** Решение задачи с косой производной для параболического уравнения методом граничных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 14–20.
4. **Камынин Л.И.** К теории Жевре для параболических потенциалов // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 8. С. 318–322.
5. **Черепова М.Ф.** О гладкости потенциала простого слоя. М.: ВИНИТИ. 1988.
6. **Конёнков А.Н.** Гладкость старших производных потенциала простого слоя для параболических уравнений с переменными коэффициентами в областях с негладкой боковой границей // Вестник РАЕН. 2013. Т. 13. № 4. С. 17–22.
7. **Гилбарг Д., Трудингер Р.** Эллиптические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1987.
8. **Фридман А.** Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Наука, 1968.
9. **Солонников С.Д.** О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды МИАН. 1964. Т. 83. С. 3–163.
10. **Сиваков Д.С.** Некоторые свойства потенциала объемных масс для параболических уравнений. М.: ВИНИТИ, 1995.

Конёнков Андрей Николаевич, д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и МПМД Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46,
тел.: +7 (4912) 28-05-74, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru