УДК 517.9

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С УЧЕТОМ СИММЕТРИИ

О.В. Дружинина, О.Н. Масина

Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН,
Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина

STABILITY ANALYSIS OF OSCILLATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT SYMMETRY

O.V. Druzhinina, O.N. Masina

Получены условия устойчивости колебаний в динамических системах с симметрией и без симметрии. Для анализа использованы понятия устойчивости в смысле Н.Е. Жуковского и Дж. Синджа. Охарактеризована потеря устойчивости при небольших амплитудах.

Ключевые слова: динамическая система, орбитальная устойчивость, теория колебаний, первый метод Ляпунова, потеря устойчивости.

Stability conditions of oscillations in dynamical systems with symmetry and without symmetry are obtained. For analysis the concepts of stability in the sense of N.E. Zhukovsky and in the sense of G. Synge are used. Stability loss is characterized with small amplitudes.

Keywords: dynamical system, orbital stability, theory of oscillations, the first Lyapunov method, stability loss.

1. Введение

При исследовании математических моделей динамических систем актуальной проблемой является изучение устойчивости колебаний. Классическая теория устойчивости развивалась, начиная с трудов А.М. Ляпунова [1], Н.Е. Жуковского [2], А. Пуанкаре [3], в работах Н.Г. Четаева [4], В.В. Немыцкого и В.В. Степанова [5], Н.Н. Красовского [6], А.А. Шестакова [7] и в работах других отечественных и зарубежных ученых. В настоящей работе проведен анализ устойчивости колебаний ряда классов динамических систем. Использованные в работе понятия устойчивости по Дж. Синджу и Н.Е. Жуковскому позволяют исследовать специальные типы сильной орбитальной устойчивости траекторий в существенно нелинейных системах [8–14].

Рассмотренные в работе понятия устойчивости базируются на ортогональном (нормальном) соответствии изображающих точек невозмущенной и возмущенной траекторий системы дифференциальных уравнений. Указанное соответствие позволяет строить в вариациях специальные уравнения, отличные от уравнений в вариациях Пуанкаре. Специальные уравнения в вариациях лежат в основе анализа устойчивости в смысле Дж. Синджа и устойчивости в смысле Н.Е. Жуковского. Устойчивость по Жуковскому и по Синджу, как показывают работы отечественных и зарубежных авторов последнего десятилетия, находит применение в задачах устойчивости технических систем и в задачах изучения хаотических режимов в детерминированных системах. Ряд приложений к исследованию устойчивости по Синджу и по Жуковскому дан в работах [8, 12, 15–17].

2. Обозначения и определения

Рассмотрим голономную консервативную систему, кинетическая энергия T и потенциальная энергия V которой определяются в виде

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i\,j=1}^{2} m_{i\,j}(x)\,\dot{x}_i\,\dot{x}_j=\frac{1}{2}\langle P(x)\,\dot{x},\,\dot{x}\rangle,\quad V=V(x),\;\; K+V=h, \tag{1}$$

где $\langle\bullet,\bullet\rangle$ – скалярное произведение двух векторов, $x=(x_1,\,x_2)$, $\dot{x}=(\dot{x}_1,\,\dot{x}_2)$, $P(x)=(m_{i\,j}(x))$ – матрица инерции, h – полная энергия. Для данного h рассмотрим движение, принадлежащее множеству

$$G(h)=\left\{x\in R^2:\,h-V(x)\geq 0\right\}.$$

Предположим, что множество $G(h)$ ограничено. Обозначим через int $G(h)$ и $\partial G(h)$ внутренность и границу множества $G(h)$ соответственно.

В работе [14] изучена динамика системы (1) с помощью понятий римановой геометрии, рассмотрен линейный элемент ds, определенный равенством

$$d\,s^2=\langle Pd\,x,\,d\,x\rangle\,, \tag{2}$$

а также угол α между двумя векторами $a=(a_1,\,a_2)$ и $b=(b_1,\,b_2)$, причем

$$\cos\alpha = \frac{\langle Pa, b\rangle}{\sqrt{\langle Pa, a\rangle}\sqrt{\langle Pb, b\rangle}}.$$

Возмущение ρ между конфигурациями периодической траектории C и возмущенной траектории $\hat{C}$ при условии, что ρ ортогонально траектории C, определено в [7]. С помощью тензорного анализа получено уравнение относительно величины r вектора возмущения ρ для фиксированного h, имеющее вид

$$\ddot{r} + Q(t)\, r = 0,\ Q(t) = Kv^2 + 3\kappa^2 v^2 + \sum V_{ij} n_i n_j, \quad (3)$$

где v – скорость вдоль траектории C, κ – кривизна C, $V_{ij} = \partial^2 V \big/ \partial x_i \partial x_j$, $n = (n_1, n_2)$ – единичная нормаль к траектории C. Гауссова кривизна K определена следующим образом:

$$K = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_{12}}{m_{11}\sqrt{m}}\frac{\partial m_{11}}{\partial x_2} - \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial m_{22}}{\partial x_1}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2}{\sqrt{m}}\frac{\partial m_{12}}{\partial x_1} - \frac{m_{12}}{m_{11}\sqrt{m}}\frac{\partial m_{11}}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial m_{11}}{\partial x_2}\right)\right\},$$

где $m = m_{11}m_{22} - m_{12}^2$.

Траектория C называется устойчивой по Синджу, если значение ρ для каждого решения уравнения (3) постоянно мало.

Если v_1 и v_2 – скорости вдоль траекторий C и $\hat{C}$ в точках M_1 и M_2 соответственно, в которых линия M_1M_2 ортогональна траектории C, то справедливо равенство

$$\dot{r} = v_2 \sin\alpha,$$

где α – угол между v_1 и v_2.

Риманова метрика, заданная формулой (2), эквивалентна евклидовой норме, то есть существуют два положительных числа k_1 и k_2 такие, что

$$k_1(dx_1^2 + dx_2^2) < \langle Pdx, dx\rangle < k_2(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Таким образом, при исследовании устойчивости возмущение ρ может быть определено посредством евклидовой нормы.

3. Условия орбитальной устойчивости

Пусть возмущение определено евклидовой нормой и пусть C – периодическая траектория, $\hat{C}$ – возмущенная траектория. Предположим, что траек-тория C орбитально устойчива. Пусть $M_1 = (x_{11}, x_{21}, \dot{x}_{11}, \dot{x}_{21})$ и $M_2 = (x_{12}, x_{22}, \dot{x}_{12}, \dot{x}_{22})$ – фазовые точки на траекториях C и $\hat{C}$ такие, что линия M_1M_2 ортогональна траектории C в момент времени t в фазовом пространстве. Тогда расстояние $d(M_2, C)$ между M_2 и C в момент t определяется соотношением

$$d^2(M_2, C) = \sum_{j=1}^{2}(x_{j2} - x_{j1})^2 + \sum_{j=1}^{2}(\dot{x}_{j2} - \dot{x}_{j1})^2.$$

Имеют место следующие оценки:

$$d^2(M_2, C) \ge \sum_{j=1}^{2}(x_{2j} - x_{1j})^2 \ge \rho^2(t). \quad (4)$$

Действительно, неравенства (4) справедливы в силу того, что линия M_1M_2 не обязательно ортогональна траектории C в пространстве конфигураций. Так как по условию теоремы расстояние $d(M_2, C)$ должно оставаться малым в смысле определения орбитальной устойчивости, то возмущение $\rho(t)$ является малым при $t > 0$, что влечет устойчивость по Синджу траектории C.

Предположим теперь, что траектория C устойчива по Синджу. Пусть $M_3 = (x_{13}, x_{23}, \dot{x}_{13}, \dot{x}_{23})$ и $M_4 = (x_{14}, x_{24}, \dot{x}_{14}, \dot{x}_{24})$ – точки на траекториях C и $\hat{C}$ соответственно такие, что линия M_3M_4 ортогональна траектории C в момент времени t в пространстве конфигураций. Так как линия M_3M_4 не обязательно ортогональна траектории C в фазовом пространстве, то справедлива оценка

$$d^2(M_4, C) \le \sum_{j=1}^{2}(x_{j4} - x_{j3})^2 + \sum_{j=1}^{2}(\dot{x}_{j4} - \dot{x}_{j3})^2, \quad (5)$$

где

$$\sum_{j=1}^{2}(x_{j4} - x_{j3})^2 = \rho^2(t), \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{2}(\dot{x}_{j4} - \dot{x}_{j3})^2 = \left|v_2 - v_1\right|^2. \quad (7)$$

Равенство (7) запишем в виде

$$\left|v_2 - v_1\right|^2 = \dot{r}^2(t) + \left|v_2 - v_1 + v_2(1 - \cos\alpha)\right|^2,$$

где $v_2(1 - \cos\alpha) = O(r^2)$. Так как h фиксировано, то справедливо равенство

$$\left|v_2 - v_1\right| = \frac{(\nabla V)\cdot\rho}{v_1} + O(r^2). \quad (8)$$

Если траектория C принадлежит множеству int $G(h)$, то существует $l_1 > 0$ такое, что

$$\left|v_2 - v_1\right| < l_1 r(t).$$

Если траектория C достигает точки $R \in \partial G(h)$, $v_1 = 0$, то ρ ортогонально ∇V, поскольку траектория C параллельна ∇V, и, следовательно, числитель и знаменатель в (8) стремятся к нулю. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{M_3 \to R} \left| v_2 - v_1 \right| = \lim_{M_3 \to R} \frac{(\nabla V) \cdot \rho}{v_1} =$$
$$= \frac{1}{|\nabla V|_R} \left(\frac{d(\nabla V)}{dt} \cdot \rho + (\nabla V) \cdot \frac{d\rho}{dt} \right). \quad (9)$$

Справедливо равенство $d/dt(\nabla V) = 0$, поскольку левая часть представляет собой линейную комбинацию $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Чтобы вычислить $d/dt(\rho)$, запишем возмущение в виде $\rho = rn$, где n – единичная нормаль к траектории C. Тогда

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{r}n + v_1 r \kappa e, \quad (10)$$

где e – единичный вектор касательной к траектории C. Подставив (10) в равенство (9), получим

$$\lim_{M_3 \to R} \left| v_2 - v_1 \right| = \frac{1}{|\nabla V|_R} (\nabla V) \times$$
$$\times (\dot{r}n + v_1 r \kappa e). \quad (11)$$

Так как вектор n параллелен ρ, то он ортогонален ∇V, откуда получим $(\nabla V) \cdot (\dot{r}n) = 0$ в R, где $v_1 > 0$. Следовательно, имеем

$$\lim_{M_3 \to R} \left| v_2 - v_1 \right| = 0 .$$

Согласно (6) – (8) и (11), оценка (5) примет вид

$$d^2(M_4, C) < \left(1 + l_1^2 \right) r^2(t) + \dot{r}^2(t) .$$

Так как по условию теоремы траектория C является устойчивой по Синджу, то существует число $l_2 > 0$ такое, что из неравенства

$$r^2(t) + \dot{r}^2(t) \le l_2 \left(r^2(0) + \dot{r}^2(0) \right)$$

следует, что величина $d(M_4, C)$ остается постоянно малой. Таким образом, траектория C орбитально устойчива.

Из предыдущих рассуждений с учетом результатов работ [8, 14, 15] следует, что для каждого фиксированного значения полной энергии периодическая траектория системы (1) орбитально устойчива тогда и только тогда, когда она устойчива по Синджу. Таким образом, понятие устойчивости по Синджу позволяет исследовать орбитальную устойчивость траекторий в существенно нелинейных системах.

4. Устойчивость колебаний в системах с симметрией

Рассмотрим систему с симметрией

$$m_{ij}(-x) = m_{ij}(x), \; i, j = 1, 2, \quad V(-x) = V(x),$$

для которой

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right), \; V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \Omega^2 x_2^2 \right) + N(x_1, x_2),$$
$$N(x_1, x_2) = \alpha_0 x_1^4 + \alpha_1 x_1^3 x_2 + \alpha_2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_3 x_1 x_2^3 + \alpha_4 x_2^4. \quad (12)$$

Для устойчивого состояния равновесия рассмотрены два типа собственных колебаний, представленных в виде рядов Фурье:

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin(j\omega t) + \sum_{j=0}^{\infty} C_j \cos(j\omega t),$$
$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(j\omega t) + \sum_{j=0}^{\infty} D_j \cos(j\omega t).$$

Выберем $t = 0$ в точке O. Тогда $x(-t) = -x(t)$, откуда $C_j = D_j = 0$, $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Так как справедливо равенство $x(\pi/2\omega + t) = x(\pi/2\omega - t)$ для $t \in R$, то $A_{2j} = B_{2j} = 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, (x_1, x_2)-колебание может быть записано в виде

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin\{(2j-1)\omega t\},$$
$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin\{(2j-1)\omega t\}. \quad (13)$$

Представим собственные колебания в другом виде. Пусть $t \to t + \pi/2$ – преобразование времени. Тогда уравнение (13) можно записать в виде

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos\{(2j-1)\omega t\},$$
$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos\{(2j-1)\omega t\}. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда $|A_1| >> |A_2| \ldots$ и $|B_1| >> |B_2| > \ldots$. Тогда имеем

$$x_1(t) = A \sin(\omega t), \; x_2(t) = B \sin(\omega t). \quad (15)$$

В этом случае модальная кривая близка к прямой, а ее угол наклона меняется в зависимости от амплитуды. Подставляя (14) в уравнения движения

$$\ddot{x}_1 + x_1 + N_1(x_1, x_2) = 0,$$
$$\ddot{x}_2 + \Omega^2 x_2 + N_2(x_1, x_2) = 0, \quad (16)$$

где нижние индексы при N означают частные производные, и применяя метод гармонического баланса, получим

$$\begin{aligned}&(1-\omega^2)A+\frac{3}{4}N_1(A,B)=0,\\&(\Omega^2-\omega^2)B+\frac{3}{4}N_2(A,B)=0.\end{aligned} \qquad (17)$$

Положим, $A=R\cos\theta$, $B=R\sin\theta$ и $p=\operatorname{tg}\theta$. Выражая ω из уравнения (17), получим

$$f(p)+\frac{3}{4}R^2 g(p)=0, \qquad (18)$$

где $f(p)=(1-\Omega^2)\,p\,(p^2+1)$,

$$g(p)=\alpha_3 p^4+(2\alpha_2-4\alpha_4)\,p^3+$$

$$+(3\alpha_1-3\alpha_3)\,p^2+(4\alpha_0-2\alpha_2)\,p-\alpha_1.$$

Тогда нелинейная частота ω x_1-колебания может быть записана следующим образом:

$$\omega^2=\cos^2\theta+\Omega^2\sin^2\theta+\frac{3}{4}R^2\left[N_1(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+\right.$$

$$\left.+N_2(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta\right].$$

Решая уравнение (18), можно вычислить p при заданном R. Тогда A, B и ω можно получить как решение уравнения x_1-колебаний.

Устойчивость x_1-колебаний может быть проанализирована следующим образом. Так как модальная кривая близка к прямой, то $\kappa=0$. Для постоянной матрицы инерции имеем $K=0$ и $n_1=-\sin\theta$, $n_2=\cos\theta$. Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}+\left(\delta+2\varepsilon\cos(2\tau)\right)r=0, \qquad (19)$$

где $\tau=\omega t$,

$$\varepsilon=\frac{-R^2}{4\omega^2}\left[N_{11}\sin^2\theta-2N_{12}\cos\theta\sin\theta+\right.$$

$$\left.+N_{22}\cos^2\theta\right], \qquad (20)$$

$$\delta=\frac{\sin^2\theta+\Omega^2\cos^2\theta}{\omega^2}-2\varepsilon. \qquad (21)$$

Уравнение (19) является уравнением Матье. Уравнения (20) и (21) позволяют вычислить ε и δ соответственно для заданного R. График зависимости $\delta=\delta(\varepsilon)$ назовем кривой устойчивости x_1-колебания. Анализируя кривую устойчивости, легко увидеть изменение устойчивости x_1-колебаний.

Если собственные колебания не аппроксимируются уравнением (15), то первые n членов могут быть выбраны из уравнения (13). Методом гармонического баланса $2n$ уравнений могут быть выражены через функции от $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ и ω. Поскольку функция $Q(t)$ в (3) четная и имеет период, равный половине периода x_1-колебания, то с учетом заданного A_1 получим

$$Q(t)=\bar{Q}(\Omega,A_1)+g_1(A_1)\cos(2\omega t)+$$

$$+g_2(A_1)\cos(4\omega t)+\cdots,$$

где $\bar{Q}(\Omega,A_1)\to\Omega^2$ и $g_j(A_1)\to 0$ при $A_1\to 0$, $j=1,2,3,\ldots$. Тогда при $\tau=\omega t$ уравнение (3) может быть записано в виде

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}+\left(\delta+2\varepsilon\cos(2\tau)+\frac{g_2(A_1)}{\omega^2}\cos(4\tau)+\cdots\right)r=0, \qquad (22)$$

$$\varepsilon=\frac{g_1(A)}{2\omega^2},\quad \delta=\frac{\tilde{Q}(\Omega,A_1)}{\omega^2}. \qquad (23)$$

Для характеристики областей устойчивости и неустойчивости можно использовать разложения вида

$$\delta=n^2+\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\cdots,$$

$$\rho(\tau,\varepsilon)=\rho_0(\tau)+\varepsilon\rho_1(\tau)+\varepsilon^2\rho_2(\tau)+\cdots.$$

В силу π-периодичности коэффициента уравнения (22) каждому n, $n=0, 1, 2, \ldots$, соответствует кривая перехода от одной области к другой.

Кривую устойчивости x_1-колебаний получим из (23). Так как $\omega\to 1$ при $A_1\to 1$, кривая начинается в $A_1=0$ с учетом $(\delta,\varepsilon)=(\Omega^2,0)$. Поэтому x_1-колебание может терять устойчивость при небольшой амплитуде, если Ω близко к j, $j=1,2,3,\ldots$.

5. Устойчивость колебаний в системах без симметрии

Рассмотрим систему без симметрии, для которой

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right),\quad V=\frac{1}{2}\left(x_1^2+\Omega^2x_2^2\right)+N_a(x_1,x_2), \qquad (24)$$

где N_a – нелинейный потенциал без свойства симметрии. Выбирая $t=0$ в неподвижной точке и учитывая, что $x(-t)=x(t)$, запишем x_1-колебания в виде

$$x_1(t)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\cos(j\omega t),\quad x_2(t)=\sum_{j=0}^{\infty}B_j\cos(j\omega t).$$

По аналогии с анализом системы с симметрией для заданного A_1 можно найти x_1-колебание. Функция $Q(t)$ в (3) четная с тем же самым периодом, что и x_1-колебание. Имеем

$$Q(t)=\bar{Q}(\Omega,A_1)+f_1(A_1)\cos(\omega t)+$$

$$+f_2(A_1)\cos(2\omega t)+\cdots,$$

где $\bar{Q}(\Omega,A_1)\to\Omega^2$ и $f_i(A_1)\to 0$ при $A_1\to 0$, $i=1,2,3,\ldots$. Тогда при $\tau=\omega t/2$ уравнение (3) может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \left(\delta + 2\varepsilon\cos 2\tau + \frac{4 f_1(A_1)}{\omega^2}\cos 4\tau + \cdots\right) r = 0, \quad (25)$$

$$\varepsilon = \frac{2 f_1(A)}{\omega^2}, \;\; \delta = \frac{4\bar{Q}(\Omega, A_1)}{\omega^2}. \qquad (26)$$

Для системы без симметрии кривая устойчивости может быть получена из (26) аналогично тому, как указанная кривая получена для системы с симметрией. Так как $\omega \to 1$ при $A_1 \to 1$, кривая устойчивости начинается в $A_1 = 0$ с учетом $(\delta, \varepsilon) = (4\Omega^2, 0)$. Если Ω близко к $j/2$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, то x_1-колебание может терять устойчивость при небольшой амплитуде.

6. Система уравнений в вариациях

Пусть $z = (z_1, z_2)$ – малое возмущение и пусть $x(t) = x^0(t) + z(t)$, где $x^0(t)$ является решением, отвечающим собственным колебаниям системы, заданной (12) или (24). Подставляя $x(t)$ в (16) и проводя линеаризацию, получим систему уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_1 + z_1 + N_{11}\left(x^0(t)\right) z_1 + N_{12}\left(x^0(t)\right) z_2 = 0, \\ &\ddot{z}_2 + \Omega^2 z_2 + N_{21}\left(x^0(t)\right) z_1 + N_{22}\left(x^0(t)\right) z_2 = 0. \end{aligned} \qquad (27)$$

На основе первого метода Ляпунова и уравнений в вариациях (27) проведен анализ устойчивости по Жуковскому и по Синджу системы с симметрией и для системы без симметрии. Приведены примеры анализа устойчивости колебаний с помощью (27) и условий устойчивости работ [7–12].

7. Примеры

Рассмотрим систему, заданную (12). Периодические и хаотические эффекты имеют место при $\Omega \approx 2$ [17]. Для малых движений x_1-колебание представим следующим образом:

$$x_1(t) = A\cos t, \;\; x_2(t) = O(A^2). \qquad (28)$$

Рассмотрим случай $K = 0$, $\kappa = 0$, $n_1 = 0$, $n_2 = 1$. В этом случае уравнение (3) приводится к уравнению Матье (19) при $\tau = t$ и

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha_2 A^2, \;\; \delta = \Omega^2 + 2\varepsilon. \qquad (29)$$

Поэтому x_1-колебание устойчиво при малом A, теряет устойчивость при увеличении A и становится вновь устойчивым, если Ω близко к j, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Устойчивость x_2-колебания может быть проанализирована аналогично.

Если движения не обязательно малы, устойчивость колебаний может быть проанализирована с помощью соотношений (13)–(21).

Рассмотрим маятниковую систему, для которой кинетическая энергия T и потенциальная энергия V имеют соответственно вид

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \alpha\dot{\theta}^2 - 2\alpha\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right),$$

$$V = \frac{1}{2}\Omega^2 x^2 + \alpha(1 - \cos\theta),$$

где $\alpha = m/(m+M)$, $x = \bar{x}/l$, $\Omega = \omega_2/\omega_1$, $\omega_1^2 = g/l$, $\omega_2^2 = k/(m+M)$.

Уравнения движения для такой системы запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \alpha\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) + \Omega^2 x = 0, \\ &\ddot{\theta} + (1 - \ddot{x})\sin\theta = 0. \end{aligned} \qquad (30)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости колебаний пружины (x-колебаний) и колебаний маятника (θ-колебаний). Указанные типы колебаний существуют, поскольку потенциальная энергия V достигает минимума в нулевой точке конфигурационного пространства.

Периодические и хаотические эффекты наблюдаются при возбуждении x-колебаний в случае $\Omega \approx 2$, когда колебания пружины теряют устойчивость [17]. Условие $\Omega \approx 2$ известно как условие внутреннего резонанса (2:1) в рассматриваемой квадратичной нелинейной системе.

Колебания пружины можно описать соотношениями $x(t) = A\cos\Omega t$, $\theta(t) = 0$. Возмущение ρ определено евклидовой нормой. Так как θ-ось ортогональна x-колебанию, имеем $\rho = \theta$. Тогда второе уравнение в (30) может быть сведено к уравнению Матье (19), где $\tau = \Omega t/2$ и $\varepsilon = 2A$, $\delta = 4/\Omega^2$.

Колебания пружины устойчивы при малых A, но становятся неустойчивыми при увеличении A, если $2/\Omega$ близко к j, $j = 1, 2, 3\ldots$.

Анализ θ-колебаний требует аппроксимации для различных значений Ω. Гауссова кривизна K и кривизна κ могут быть найдены с помощью формул римановой геометрии. В этом случае устойчивость анализируется с помощью оценки (5).

Анализ устойчивости колебаний динамических моделей на основе понятий устойчивости по Синджу и по Жуковскому позволил получить новые условия устойчивости и охарактеризовать потерю устойчивости при небольших амплитудах. Полученные результаты могут найти применение при решении задач устойчивости технических систем.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 13-08-00710-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1955.
2. **Жуковский Н.Е.** О прочности движения // Учен. зап. Моск. ун-та. 1882. Вып. 4. С. 1–104.
3. **Пуанкаре А.** Избр. тр.: в 2 т. М.: Наука, 1971, 1972.
4. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. **Немыцкий В.В., Степанов В.В**. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949; 3-е изд. М.: УРСС, 2004.
6. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
7. **Шестаков А.А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС, 2007.
8. **Дружинина О.В.** Устойчивость и стабилизация по Жуковскому динамических систем. М.: Изд-во УРСС, 2013.
9. **Дружинина О.В., Шестаков А.А.** О сохранении свойства асимптотической прочности в смысле Жуковского интегрального множества при возмущениях нелинейного дифференциального уравнения // ДАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 52–56.
10. **Шестаков А.А., Дружинина О.В.** Об условиях устойчивости по Жуковскому // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13. № 4. С. 84–88.
11. **Дружинина О.В., Шестаков А.А** О прочности в смысле Жуковского почти периодических траекторий и свойствах предельных движений динамических систем // ДАН. 2004. Т. 398. № 5. С. 615–619.
12. **Шестаков А.А., Дружинина О.В., Масина О.Н.** Оценка безопасности движения рельсовых экипажей на основе обобщенной технической устойчивости и устойчивости по Жуковскому // Транспорт: наука, техника, управление. 2014. № 2. С. 3–8.
13. **Йосс Ж., Джозеф** Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
14. **Synge J.L**. On the geometry of dynamics // Philos. Trans. R. Soc. London, 1926. Ser. A. 226. P. 33–106.
15. **Shim J.K., Pak C.H**. On the normal mode dynamics of a pendulum dynamic absorber // Proceeding of Korean Soc. of Noise and Vibration Engineering. 1996. P. 177–183.
16. **Pak S.J., Pak C.H**. On the modal curve of nonlinear normal modes // J. Korean Soc. Mech. Eng. 1988. Vol. 2. P. 87–93.
17. **Seok K.Y., Pak C.H.** A study on chaotic motions of nonlinear two DOF system // Proceeding of Korean Soc. of Noise and Vibration Engineering. 1998. P. 464–470.

Дружинина Ольга Валентиновна, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник Вычислительного центра имени А.А. Дородницына Российской академии наук
119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40,
тел.: +7 (499) 135-44-98,
e-mail: ovdruzh@mail.ru