

УДК 537.874.76

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ МОЩНОСТИ В СВЧ-АТТЕНУАТОРЕ

С.Н. Григорьев

ОАО "НПП "Салют"

THE WAVE EQUATIONS FOR THE DECISION OF PROBLEMS DISPERSION CAPACITY IN MICROWAVE ATTENUATORS

S.N. Grigoryev

В статье проведено строгое математическое решение однородных и неоднородных, дифференциальных, волновых уравнений, второго порядка для решения задач рассеяния мощности входного сигнала в СВЧ-аттенуаторе методом разделения переменных.

Ключевые слова: однородные и неоднородные, дифференциальные, волновые уравнения, второго порядка, рассеяния мощности входного сигнала, СВЧ-аттенуатор, метод разделения переменных, электромагнитная волна, поперечная волна, мода волны, динамика распространения волн.

Введение

Выдвинута принципиально новая идея многопараметрической оптимизации задачи коренного улучшения основных электродинамических характеристик в согласованных тонкопленочных резистивных СВЧ-аттенуаторах, вход которых возбуждался от источника СВЧ-сигнала, на выходе 1-го канала подключался преобразователь и устройство индикации, напротив к выходу 2-го канала подключалась согласующая нагрузка, равная 50 [Ом]. Данный подход привлек к себе большой интерес и подвергся самым серьезным исследованиям как за рубежом, так и в России [1–10]. Несмотря на достигнутые значительные успехи, никто из указанных исследователей не смог до конца преодолеть всех технологических трудностей, связанных как с номинальной мощностью рассеивания $P_{ном}$, уменьшением KCB_U и неравномерности по АЧХ в СВЧ-аттенуаторах, так и с созданием конкурентоспособных серийных СВЧ-ваттметров повышенной поглощаемой мощности типа "МЗ-105", "МЗ-106" и "МЗ-108", – это либо высокая стоимость многосекционных систем на основе широкополосных направленных ответвителей, либо узкая полоса эксплуатационных частот потенциально недорогих резистивных плат на основе теплопроводящих диэлектрических подложек.

Конструкция аттенуатора представляет собой последовательно соединенные между собой сек-

In paper are carried out the strict mathematical decisions of the homogeneous and non-uniform, differential, wave equations, the second order for the decision of problems dispersion capacity an entrance signal in microwave attenuators by method of division variables.

Keywords: homogeneous and non-uniform, differential, wave equations, second order, dispersion capacity an entrance signal, microwave attenuator, method division variables, electromagnetic wave, cross-section wave, propagation mode, dynamics distribution waves.

ции микрополосковой линии (МПЛ) подвешенного типа, находящейся в прямоугольном волноводе, стенки которого состоят из крышек профиль-радиатора и двух частей алюминиевого корпуса, одинаково теплопроводящих и стянутых крепежными болтами.

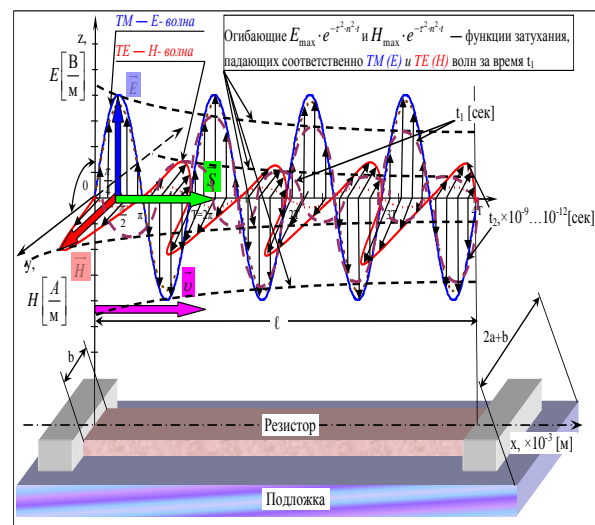


Рис. 1. Распределение электромагнитных полей и волн вдоль всей длины резистора и подложки СВЧ-аттенуатора, где \vec{E} и \vec{H} – векторы напряженностей соответственно электрического и магнитного полей; $\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ – вектор Умова-Пойтинга; \vec{v} – вектор скорости электромагнитной волны.

Экранирующий корпус совмещен с теплорассеивающим радиатором, выполненным из алюминиевого сплава В-95, в виде стандартного профиля. Пакеты из резисторных плат образуют центральную энергетическую жилу СВЧ-тракта, закрепляемую посередине, внутри волновода, стенки которого и корпус радиатора посажены на “общий провод – землю”.

Применение волнового уравнения в задачах о распределении электромагнитных полей в СВЧ-аттенуаторе

Пусть распределение электрического поля $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, z, t)$ напыленного, однородного, пленочного резистора (рис. 1) в момент времени t в отсутствие внешних электромагнитных полей и токов [1–10] удовлетворяет обобщенному волновому уравнению для пленочного резистора в трехмерном пространстве (1):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \tilde{u}(x, y, z, t) = v^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

то есть
$$\begin{cases} 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}_x(x, t)}{\partial t^2} = v_x^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}_x(x, t)}{\partial x^2}, \\ 2) \frac{\partial^2 \tilde{u}_y(y, t)}{\partial t^2} = v_y^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}_y(y, t)}{\partial y^2}, \\ 3) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z(z, t)}{\partial t^2} = v_z^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}_z(z, t)}{\partial z^2}, \end{cases} \text{ где } \vec{v} =$$

$= \vec{v}_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \text{const}, v = v_{\text{фаз}} = |\vec{v}_{\text{фаз}}|$, – фазовая скорость волны, $\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z$, $k = |\vec{k}|$, – волновой вектор, $k = 2\pi / \lambda = \omega / v_{\text{фаз}}$ – волновое число.

Будем предполагать, что заданы следующие начальные условия данной задачи (2):

$$\begin{cases} 1) \tilde{u}(x, 0) = f(x) \text{ при } 0 \leq x \leq \ell, \\ 2) \tilde{u}(y, 0) = f(y) \text{ при } -b/2 \leq y \leq b/2, \\ 3) \tilde{u}(z, 0) = f(z) \text{ при } 0 \leq z \leq \Delta. \end{cases} \quad (2)$$

Предположим, что на конце пленочного резистора $x = \ell$ продольные компоненты электрических и магнитных полей для падающей и в начале $x = 0$ для отраженной волны сильно затухают. Особенно этот эффект проявляется на СВЧ при увеличении частоты сигнала, подаваемого на вход СВЧ-тракта. Таким образом, имеем краевые условия задачи (3):

$$\begin{cases} 1) \tilde{u}_x(0, t) = 0, \\ 2) \tilde{u}_x(\ell, t) = 0, \\ 3), 4) \tilde{u}_y(\pm b/2, t) = 0, \\ 5) \tilde{u}_z(0, t) = 0, \\ 6) \tilde{u}_z(\Delta, t) = 0 \\ \text{при } \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

При данных начальных и краевых условиях требуется найти распределение электрического поля $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, z, t)$ в резисторе для последующих моментов времени $t \geq 0$.

Для дифференциального уравнения (1) сначала будем искать “ненулевые” решения специального вида (4):

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t), \quad (4)$$

где
$$\begin{cases} 1) \tilde{u}_x(x, t) = X(x) \cdot T(t), \\ 2) \tilde{u}_y(y, t) = Y(y) \cdot T(t), \\ 3) \tilde{u}_z(z, t) = Z(z) \cdot T(t), \end{cases} \quad X(x), Y(y), Z(z),$$

$T(t)$ – функции одной переменной.

Так как
$$\frac{d^2 \tilde{u}(x, y, z, t)}{dt^2} = X \cdot Y \cdot Z \cdot T'',$$
 где

$$\begin{cases} 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}_x(x, t)}{\partial t^2} = X \cdot T'', \\ 2) \frac{\partial^2 \tilde{u}_y(y, t)}{\partial t^2} = Y \cdot T'', \\ 3) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z(z, t)}{\partial t^2} = Z \cdot T'', \end{cases} \quad \begin{cases} 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}_x(x, t)}{\partial x^2} = X'' \cdot T, \\ 2) \frac{\partial^2 \tilde{u}_y(y, t)}{\partial y^2} = Y'' \cdot T, \\ 3) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z(z, t)}{\partial z^2} = Z'' \cdot T. \end{cases}$$

то, подставляя эти выражения в уравнение (1), получим систему дифференциальных уравнений:

$$X \cdot Y \cdot Z \cdot T'' \equiv v^2 \cdot X'' \cdot Y'' \cdot Z'' \cdot T,$$

в которой
$$\begin{cases} 1) X \cdot T'' \equiv v_x^2 \cdot X'' \cdot T, \\ 2) Y \cdot T'' \equiv v_y^2 \cdot Y'' \cdot T, \\ 3) Z \cdot T'' \equiv v_z^2 \cdot Z'' \cdot T. \end{cases}$$
 Отсюда, приме-

няя метод разделения переменных [3, 4], будем иметь систему дифференциальных уравнений (5):

$$\frac{X'' \cdot Y'' \cdot Z''}{X \cdot Y \cdot Z} \equiv \frac{T''}{v^2 \cdot T}, \quad \begin{cases} 1) \frac{X''}{X} \equiv \frac{T''}{v_x^2 \cdot T}, \\ 2) \frac{Y''}{Y} \equiv \frac{T''}{v_y^2 \cdot T}, \\ 3) \frac{Z''}{Z} \equiv \frac{T''}{v_z^2 \cdot T}. \end{cases} \quad (5)$$

Левая часть тождеств (1), (2) и (3) системы (5) зависит соответственно только от x, y, z , а правая - только от t . Так как x, y, z и t - независимые переменные, то это возможно лишь тогда, когда обе части тождеств 1), 2) и 3) системы (5) равны некоторой постоянной величине. Обозначая эту постоянную для удобства дальнейших выкладок через $-\lambda^2$, получим систему дифференциальных уравнений (6) по переменной « x » для тождества (1):

$$\begin{cases} 1) \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \\ 2) \frac{T''}{v_x^2 \cdot T} = -\lambda^2. \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда будем иметь следующие два уравнения:

$$\begin{cases} 1) X'' + \lambda^2 \cdot X = 0, \\ 2) T'' + v_x^2 \cdot \lambda^2 \cdot T = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения 1) и 2) из системы уравнений (7) - линейные однородные с постоянными коэффициентами, их характеристические уравнения - $\tilde{k}^2 + \lambda^2 = 0$ (для 1) и $\tilde{k}^2 + v_x^2 \cdot \lambda^2 = 0$ (для 2) - имеют чисто мнимые корни $-\tilde{k}_{1,2} = \pm \lambda \cdot i$ (для 1) и $\tilde{k}_{1,2} = \pm v_x \cdot \lambda \cdot i$ (для 2), их общие решения:

$$X(x) = A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \cos(\lambda \cdot x), \quad (8)$$

$$T(t) = M \cdot \sin(v_x \cdot \lambda \cdot t) + N \cdot \cos(v_x \cdot \lambda \cdot t), \quad (9)$$

где A, B, M, N - произвольные постоянные.

Перемножая почленно функции (8) и (9), будем иметь:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}(x, t) = X(x) \cdot T(t) = \left(\begin{matrix} A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + \\ + B \cdot \cos(\lambda \cdot x) \end{matrix} \right) \times \\ &\times \left(M \cdot \sin(v_x \cdot \lambda \cdot t) + N \cdot \cos(v_x \cdot \lambda \cdot t) \right) = \\ &= \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{M^2 + N^2}}_{\forall \text{ const} = C \neq 0} \cdot \sin(\lambda \cdot x + \varphi_1) \times \\ &\times \sin(v_x \cdot \lambda \cdot t + \varphi_2) = \\ &= C \cdot \sin(\lambda \cdot x + \varphi_1) \cdot \sin(v_x \cdot \lambda \cdot t + \varphi_2) = \\ &= \frac{C}{2} \cdot \left[\frac{\cos(\lambda \cdot (x + v_x \cdot t) + \varphi_1 + \varphi_2)}{g(x, t)} - \frac{\cos(\lambda \cdot (x - v_x \cdot t) + \varphi_1 - \varphi_2)}{f(x, t)} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где начальные фазы волн определяются как $\varphi_1 =$

$$= \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \varphi_2 = \arcsin \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}.$$

Найденное выражение (10) представляет собой общее решение Даламбера для одномерного волнового уравнения (1) системы (1) применительно к пленочному резистору, в котором функ-

ция $f(x, t) = \cos(\lambda \cdot (x - v_x \cdot t) + \varphi_1 - \varphi_2)$ представляет падающую волну, бегущую вперед вдоль оси (Ox). Напротив, функция $g(x, t) = \cos(\lambda \cdot (x + v_x \cdot t) + \varphi_1 + \varphi_2)$ есть отраженная волна, бегущая назад вдоль оси (Ox).

Функции (10), образующие комбинацию четных, гармонических составляющих, при любом выборе постоянных C и λ удовлетворяют одномерному волновому уравнению пленочного резистора (1) в системе (1), описывающего распределение электрического поля $\tilde{u}_x = \tilde{u}(x, t)$ в пленочном резисторе для последующих моментов времени $t \geq 0$. Потребуем, чтобы они удовлетворяли также краевым условиям задачи (3). Полагая $x = 0$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(0, t) &= \frac{C}{2} \cdot \left[\frac{\cos(\lambda \cdot (0 + v_x \cdot t) + \varphi_1 + \varphi_2)}{-\cos(\lambda \cdot (0 - v_x \cdot t) + \varphi_1 - \varphi_2)} \right] = \\ &= \frac{C}{2} \cdot \left[\frac{\cos(\lambda \cdot v_x \cdot t + \varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(-\lambda \cdot v_x \cdot t + \varphi_1 - \varphi_2)} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\frac{\cos(\lambda \cdot v_x \cdot t + \varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(-\lambda \cdot v_x \cdot t + \varphi_1 - \varphi_2)} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(\lambda \cdot v_x \cdot t + \varphi_1 + \varphi_2) = \\ &= \cos(-\lambda \cdot v_x \cdot t + \varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda \cdot v_x \cdot t + \varphi_1 + \varphi_2 = \\ &= \lambda \cdot v_x \cdot t - \varphi_1 + \varphi_2, \Rightarrow \varphi_2 = -\varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $C \neq 0$. В противном случае имеем тривиальный случай $\tilde{u}_x(x, t) \equiv 0$. Тогда

$$\tilde{u} = \tilde{u}_x(x, t) = \frac{C}{2} \cdot \left[\frac{\cos(\lambda \cdot (x + v_x \cdot t) + \varphi_1)}{-\cos(\lambda \cdot (x - v_x \cdot t) + \varphi_1)} \right]. \quad (11)$$

Полагая теперь $x = \ell$, в силу 2-го условия краевых условий исходной задачи (3) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \tilde{u}_x(\ell, t) &= \frac{C}{2} \cdot \left[\frac{\cos(\lambda \cdot (\ell + v_x \cdot t) + \varphi_1)}{\cos(\lambda \cdot (\ell - v_x \cdot t) + \varphi_1)} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\frac{\cos(\lambda \cdot (\ell + v_x \cdot t) + \varphi_1)}{\cos(\lambda \cdot (\ell - v_x \cdot t) + \varphi_1)} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(\lambda \cdot (\ell + v_x \cdot t) + \varphi_1) = \\ &= \cos(\lambda \cdot (\ell - v_x \cdot t) + \varphi_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda \cdot (\ell + v_x \cdot t) + \varphi_1 = \\ &= \lambda \cdot (\ell - v_x \cdot t) + \varphi_1 \Rightarrow \\ &\ell + v_x \cdot t = \ell - v_x \cdot t \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_x \cdot t = -v_x \cdot t \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\ell \cdot v_x \cdot t = 0 \Rightarrow v_x = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

то есть на конце резистивной пленки $x = \ell$ амплитуда и скорость падающей волны практически снижаются по причине резкого затухания самой волны и отражения падающей волны от конца, при

котором скорость волны меняет свой знак. Поэтому из выражения (10) следует:

$$\begin{cases} 1) \frac{A}{B} \cdot tg(\lambda \cdot x) = 0, \\ 2) \frac{M}{N} \cdot tg(v_x \cdot \lambda \cdot t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) tg(\lambda \cdot x) = 0, \\ 2) tg(v_x \cdot \lambda \cdot t) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} 1) \begin{cases} 1.1) \lambda \cdot x = \pi \cdot n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, N, \dots) \\ 1.2) \lambda \cdot x \neq \frac{\pi \cdot (1 \pm 2n)}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, N, \dots) \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 2.1) v_x \cdot \lambda \cdot t = \pi \cdot n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, N, \dots) \\ 2.2) v_x \cdot \lambda \cdot t \neq \frac{\pi \cdot (1 \pm 2n)}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, N, \dots) \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} 1) \lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{x} \Big|_{x=\ell} = \frac{n \cdot \pi}{\ell} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N, \dots), \\ 2) \lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{v_x \cdot t} \Big|_{v_x \cdot t > 0} = \frac{n \cdot \pi}{\ell} \Big|_{x=\ell}, \text{ так как } v_x = \frac{x}{t} = \frac{\ell}{t}. \end{cases} \quad (15)$$

Аналогичный подход применяется при решении тождеств 2) и 3) системы дифференциальных уравнений (1). В конечном итоге получаем систему решений (16):

$$\begin{cases} 1) \begin{cases} 1.1) \lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{x} \Big|_{x=\ell} = \frac{n \cdot \pi}{\ell}, \\ \text{где } n = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \\ 1.2) \lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{v_x \cdot t} \Big|_{v_x \cdot t > 0} = \frac{n \cdot \pi}{\ell} \Big|_{x=\ell}, \\ \text{так как } v_x = \frac{x}{t} = \frac{\ell}{t} \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 2.1) \lambda_m = \frac{m \cdot \pi}{y} \Big|_{|y|=\frac{b}{2}} = \frac{2m \cdot \pi}{b}, \\ \text{где } m = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \\ 2.2) \lambda_m = \frac{m \cdot \pi}{v_y \cdot t} \Big|_{v_y \cdot t > 0} = \frac{m \cdot \pi}{y} \Big|_{|y|=\frac{b}{2}} = \frac{2m \cdot \pi}{b}, \\ \text{так как } v_y = \frac{y}{t} = \frac{b}{2t}. \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3.1) \lambda_k = \frac{k \cdot \pi}{z} \Big|_{z=\Delta} = \frac{k \cdot \pi}{\Delta}, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \\ 3.2) \lambda_k = \frac{k \cdot \pi}{v_k \cdot t} \Big|_{v_k \cdot t > 0} = \frac{k \cdot \pi}{\Delta} \Big|_{z=\Delta}, \text{ так как } v_k = \frac{z}{t} = \frac{\Delta}{t} \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

Из соотношения (11) следует

$$\tilde{u} = \tilde{u}_x(x, t) = \frac{C}{2} \cdot \left[\cos(\lambda_n \cdot (x + v_x \cdot t) + \varphi_1) - \cos(\lambda_n \cdot (x - v_x \cdot t) + \varphi_1) \right] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{2} \cdot \left[\cos(\lambda_n \cdot (v_x \cdot t + x)) - \cos(-\lambda_n \cdot (v_x \cdot t - x)) \right] = \frac{C}{2} \cdot \left[\cos\left(\lambda_n \cdot v_x \cdot \left(t + \frac{x}{v_x}\right)\right) - \cos\left(-\lambda_n \cdot v_x \cdot \left(t - \frac{x}{v_x}\right)\right) \right] = \\ &= \frac{C}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\lambda_n \cdot v_x}{\omega} \cdot \left(t + \frac{x}{v_x}\right)\right) - \cos\left(\frac{\lambda_n \cdot v_x}{\omega} \cdot \left(t - \frac{x}{v_x}\right)\right) \right] = \frac{C}{2} \cdot \left[\cos\left(\omega \cdot \left(t + \frac{x}{v_x}\right)\right) - \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_x}\right)\right) \right] = \\ &= \dots \tilde{u}_{x \max}(x) \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_x}\right)\right) = E_{\max} \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_x}\right)\right). \end{aligned}$$

Принимаем $\varphi_1 = 0$.

$\{\lambda_n, \lambda_m, \lambda_k\}$ – характеристические числа (их совокупность определяет спектр задачи), каждому из них соответствует частное решение обобщенного волнового уравнения для пленочного резистора в трехмерном пространстве $\{\tilde{u}_n, \tilde{u}_m, \tilde{u}_k\}$:

$$\begin{cases} 1) \tilde{u}_n(x, t) = E_n(x) \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_x}\right)\right), \\ \text{где } n = \overline{1, N}, \dots \\ 2) \tilde{u}_m(y, t) = E_m(y) \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{y}{v_y}\right)\right), \\ \text{где } m = \overline{1, N}, \dots \\ 3) \tilde{u}_k(z, t) = E_k(z) \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{z}{v_z}\right)\right), \\ \text{где } k = \overline{1, N}, \dots \end{cases} \quad (17)$$

Итак, формулы (17) дают полный набор линейно независимых частных решений вида (4) обобщенного волнового уравнения пленочного резистора в трехмерном пространстве (1), удовлетворяющих краевым условиям задачи (3).

Физически гармонические функции $\{\tilde{u}_n, \tilde{u}_m, \tilde{u}_k\}$ представляют собой моды волны [1–10], графиками которых являются затухающие при $t \rightarrow \infty$ косинусоиды. Заметим, что минимальный период равен $T_{\min x} = T_{0x} = \ell$, $T_{\min y} = T_{0y} = b/2$ и $T_{\min z} = T_{0z} = \Delta$.

Осталось обеспечить начальные условия (2). Так как дифференциальное уравнение (1) линейное однородное, то можно применить принцип наложения решений. Отсюда будем иметь, согласно работам [3, 4], произведение тригонометрических рядов Фурье (18):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{nmk}(x, y, z, t) &= \tilde{u}_n(x, t) \cdot \tilde{u}_m(y, t) \cdot \tilde{u}_k(z, t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ E_n(x) \cdot \cos \left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_x} \right) \right) \right\} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_m(y) \cdot \cos \left(\omega \cdot \left(t - \frac{y}{v_y} \right) \right) \right\} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ E_k(z) \cdot \cos \left(\omega \cdot \left(t - \frac{z}{v_z} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\{n, m, k\} = \overline{1, N}$. Причем ряды (18) сходятся на основании необходимого признака сходимости числового и функционального рядов, признаков сходимости Даламбера и Коши. Следовательно, при известных начальных и граничных условиях функция (18) – решение уравнения (1). Для коэффициентов разложения (18) справедливы следующие формулы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) E_n(x) = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \cos \left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_x} \right) \right) dx, \\ \text{где } n = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \\ 2) E_m(y) = \frac{2}{b} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} f(y) \cdot \cos \left(\omega \cdot \left(t - \frac{y}{v_y} \right) \right) dy = \\ = \frac{4}{b} \cdot \int_0^{b/2} f(y) \cdot \cos \left(\omega \cdot \left(t - \frac{y}{v_y} \right) \right) dy \\ \text{где } m = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \\ 3) E_k(z) = \frac{2}{\Delta} \cdot \int_0^{\Delta} f(z) \cdot \cos \left(\omega \cdot \left(t - \frac{z}{v_z} \right) \right) dz, \\ \text{где } k = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \end{array} \right. \quad (19)$$

Полагая $t=0$ в формулах (18), в силу наличия начальных условий задачи (2) будем иметь систему рядов (20):

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ E_n(x) \cdot \cos \left(\frac{\omega \cdot x}{v_x} \right) \right\}, \\ \text{где } n = 1, 2, 3, \dots, N, \dots, \\ 2) f(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_m(y) \cdot \cos \left(\frac{\omega \cdot y}{v_y} \right) \right\}, \\ \text{где } m = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \\ 3) f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ E_k(z) \cdot \cos \left(\frac{\omega \cdot z}{v_z} \right) \right\}, \\ \text{где } k = 1, 2, 3, \dots, N, \dots \end{array} \right. \quad (20)$$

Ряды (20) представляют собой разложение на отрезках $x \in [0, \ell]$, $y \in [-b/2, b/2]$, $z \in [0, \Delta]$ соответст-

венно функций $f(x)$, $f(y)$ и $f(z)$ в тригонометрические ряды Фурье по косинусам кратных дуг согласно работам [3–10].

Таким образом, решение данной электродинамической задачи задается произведением рядов в (18), коэффициенты которых определяются формулами (19) и (20). Для обычной радиоинженерной практики достаточно использовать несколько первых членов этих рядов. Аналогично определяется распределение магнитного поля $\tilde{p} = \tilde{p}(\vec{r}) = \tilde{p}(x, y, z)$.

Решение неоднородного волнового дифференциального уравнения с диссипативными потерями в СВЧ-аттенуаторе

Так как искомым СВЧ-аттенуатор, выполненный в виде тонких резистивных пленок, напыляемых на поверхность теплоотводящих диэлектрических подложек, представляет собой направленную систему, состоящую из однополосной, несимметричной, полосковой структуры подвешенного типа, экранированной от внешнего электромагнитного воздействия и излучения металлическим экраном, смонтированным на корпус конструкции, то в данной линии должны быть обязательно тепловые потери [1–10]. Необходимо заметить, что опытным путем установлен факт нагрева внутренних стенок металлического экрана, представляющего собой квазизапредельный волновод – 24×39 [мм] с критической частотой “среза”, равной $f_{\text{крит}} \cong 3,2 \dots 3,3$ [ГГц]. При частоте входного сигнала 50 [ГГц] $\leq f_{\text{сигн}} < 1$ [ГГц] практически весь основной ток протекает только по полосково-резистивной линии. С увеличением рабочей частоты входного сигнала $f_{\text{сигн}} \geq 1$ [ГГц] токи протекают не только вдоль полосково-резистивной линии, но и по внутренним стенкам волновода, выполняющего одновременно роль и экрана, и теплоотводящего корпуса. Следует помнить, что при этом прямо пропорционально увеличивается поверхностное сопротивление ρ_s протеканию токов по внутренним стенкам волновода, что создает дополнительный нагрев самого теплоотводящего корпуса и профиль-радиатора, а не только с торцевых поверхностей граней диэлектрических подложек. Следовательно, в данном случае мы имеем квазиодномодовый режим работы данного СВЧ-аттенуатора, когда моды более высшего порядка отсекаются и отфильтровываются в самой структуре направленной полосковой линии. В силу вышеизложенных фактов, следует, что в одномерном одномерном волновом дифференциальном уравнении второго порядка (1) без потерь, следует

в правой его части добавить вместо нуля, диссипативный член, отвечающий за потери мощности в СВЧ-резисторе в виде джоулевого нагрева и излучения в ИК-диапазоне тепловых волн:

$$\frac{1}{\sigma \cdot c \cdot \rho} \cdot \Phi(x, t) = \frac{|Z|}{c \cdot \rho} \cdot \Phi(x, t) \geq 0.$$

Таким образом, вместо (1) мы приходим к неоднородному одномерному волновому дифференциальному уравнению второго порядка с «потерями» (здесь также, для удобства вывода формулы, будем пользоваться одномерным случаем):

$$\begin{aligned} \Delta E_x(x, t) - \underbrace{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \mu_0 \cdot \mu}_{1/v^2} \cdot \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} &= \\ = \frac{1}{\sigma \cdot c \cdot \rho} \cdot \Phi(x, t) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} &= \quad (21) \\ = v_x^2 \cdot \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma \cdot c \cdot \rho} \cdot \Phi(x, t), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma \cdot c \cdot \rho} = \frac{|Z|}{c \cdot \rho} = \frac{\sqrt{R_0^2 + \left(\frac{\omega^2 \cdot L \cdot \tilde{N} - 1}{\omega \cdot C}\right)^2}}{c \cdot \rho}, \quad v = v_x,$$

$c \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \right]$ и $\rho \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$ — теплоемкость и плотность резистивной пленки соответственно;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) \cdot \omega &= \frac{\omega}{2\pi/\lambda} = \frac{\omega}{k} = v_{\text{фаз.}} = \\ = v &= \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_0 \cdot \mu_0) \cdot (\varepsilon_{\text{среды}} \cdot \mu_{\text{среды}})}} = \\ = \frac{1/\sqrt{(\varepsilon_0 \cdot \mu_0)}}{\sqrt{(\varepsilon_{\text{среды}} \cdot \mu_{\text{среды}})}} &= \frac{v_{\text{света}}}{\sqrt{(\varepsilon_{\text{среды}} \cdot \mu_{\text{среды}})}}. \end{aligned}$$

При данных условиях требуется найти распределение электрического и магнитного полей $u = u(x, t)$ в пленочном резисторе для последующих моментов времени $t \geq 0$.

Для уравнения (21) сначала будем искать ненулевые решения специального вида

$$\tilde{u} = E_x(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0. \quad (22)$$

Так как $\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = X \cdot T''$ и $\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = T \cdot X''$, то,

$$\begin{aligned} \text{подставляя эти выражения в (21), получим} \\ X \cdot T'' \equiv v_x^2 \cdot T \cdot X'' + \frac{1}{\sigma \cdot c \cdot \rho} \cdot \underbrace{(\tilde{\alpha} \cdot X \cdot \tilde{\beta} \cdot T)}_{\hat{O}(x)} \equiv \\ \equiv v_x^2 \cdot X'' \cdot T + \frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} \cdot X \cdot T, \end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ — произвольные постоянные, $v_x^2 > 0$.

Отсюда, разделяя переменные, имеем:

$$\frac{T''}{T} \equiv v_x^2 \cdot \frac{X''}{X} - \frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} \equiv -\tilde{\Psi}^2 \neq 0. \quad (23)$$

Левая часть тождества (23) зависит только от x , а правая — только от t . Так как x и t — независимые переменные, то это возможно лишь тогда, когда обе части тождества равны некоторой постоянной величине $-\tilde{\Psi}^2 = const$. Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 1) \frac{T''}{T} = -\tilde{\Psi}^2, \\ 2) v_x^2 \cdot \frac{X''}{X} - \frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} = -\tilde{\Psi}^2. \end{cases} \quad (24)$$

Отсюда будем иметь систему вида:

$$\begin{cases} 1) T'' + \tilde{\Psi}^2 \cdot T = 0, \\ 2) X'' + \frac{1}{v_x^2} \cdot \left(\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \tilde{\Psi}^2 \right) \cdot X = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Первое и второе уравнения из системы уравнений (25) — линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами [3–10]; соответствующие характеристические уравнения

$$\tilde{k}^2 + \tilde{\Psi}^2 = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{k}^2 + \frac{1}{v_x^2} \cdot \left(\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \tilde{\Psi}^2 \right) = 0$$

имеют чисто мнимые корни $\tilde{k}_{1,2} = \pm \tilde{\Psi} \cdot i$ и $\tilde{k}_{1,2} = \pm \frac{1}{v_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \tilde{\Psi}^2} \cdot i$. Следовательно, общее решение системы (25) принимает вид:

$$\begin{cases} T(t) = \tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t), \\ X(x) = \tilde{C} \cdot \sin\left(\frac{x}{v_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \tilde{\Psi}^2}\right) + \\ + \tilde{D} \cdot \cos\left(\frac{x}{v_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \tilde{\Psi}^2}\right). \end{cases} \quad (26)$$

$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ — произвольные постоянные. Переменная почленно функции системы (26), имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{u} = E_x(x, t) = X(x) \cdot T(t) = \\ = \left[\tilde{C} \cdot \sin\left(\frac{x}{v_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \tilde{\Psi}^2}\right) + \right. \\ \left. + \tilde{D} \cdot \cos\left(\frac{x}{v_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \tilde{\Psi}^2}\right) \right] \times \\ \times (\tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t)). \end{aligned} \quad (27)$$

Функции (27), при любом выборе постоянных $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{\Psi}$ удовлетворяют неоднородному волновому уравнению для пленочного резистора (21). Потребуем, чтобы они удовлетворяли также краевым условиям (3). Полагая $x=0$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= E_x(0,t) = X(0) \cdot T(t) = \\ &= \left[\tilde{C} \cdot \sin \left(\frac{0}{\nu_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \tilde{\Psi}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{D} \cdot \cos \left(\frac{0}{\nu_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \tilde{\Psi}^2 \right) \right] \times \\ &\quad \times (\tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t)) = \\ &= \left(\frac{\tilde{C} \cdot \sin 0}{0} + \frac{\tilde{D} \cdot \cos 0}{\tilde{D}} \right) \times \\ &\quad \times (\tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t)) = \\ &= \tilde{D} \cdot (\tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t)) = 0 \Rightarrow \quad (28) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \forall \tilde{C} \in R, \\ \tilde{D} \equiv 0, \\ \tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \cdot \frac{\sin(\tilde{\Psi} \cdot t)}{\cos(\tilde{\Psi} \cdot t)} = -1 \Rightarrow \operatorname{tg}(\tilde{\Psi} \cdot t) = -\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{B} = -\tilde{A} \cdot \operatorname{tg}(\tilde{\Psi} \cdot t) \end{aligned}$$

есть тривиальный случай, когда $\forall \tilde{A} \in R$, и, следовательно, приходим к выражению:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= E_x(x,t) = X(x) \cdot T(t) = \\ &= \tilde{C} \cdot \sin \left(\frac{x}{\nu_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \tilde{\Psi}^2 \right) \times \\ &\quad \times (\tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t)) \end{aligned} \quad (29)$$

Полагая теперь $x=\ell$, в силу 2-го условия краевых условий исходной задачи (3) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= E_x(\ell,t) = X(\ell) \cdot T(t) = \\ &= \tilde{C} \cdot \sin \left(\frac{\ell}{\nu_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \tilde{\Psi}^2 \right) \times \\ &\quad \times (\tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi} \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi} \cdot t)) = 0. \end{aligned}$$

В нетривиальном случае $\tilde{C} \neq 0$, $\tilde{A} \neq 0$, $\tilde{B} \neq 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\ell}{\nu_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \tilde{\Psi}^2 \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\ell}{\nu_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \tilde{\Psi}^2 &= \pi \cdot m \Rightarrow \quad (30) \\ \Rightarrow \Psi_m &= \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \left(\frac{\pi \cdot m \cdot \nu_x}{\ell} \right)^2}, \end{aligned}$$

где $m = \overline{1, N}$;

$$\tilde{\Psi}_m = -\frac{1}{t} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \right) \pm \pi \cdot m = -\frac{\nu_x}{\ell} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \right) \pm \pi \cdot m,$$

так как $t = \ell / \nu_x$. Числа $\tilde{\Psi}_m$ – характеристические числа задачи, а их совокупность – спектр задачи. Каждому характеристическому числу $\tilde{\Psi}_m$ соответствует частное решение неоднородного одномерного волнового дифференциального уравнения второго порядка для СВЧ-аттенюатора (31):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m &= E_x(x,t) \Big|_{m=\overline{1, N}} = X(x) \cdot T(t) = \\ &= \tilde{C} \cdot \sin \left(\frac{x}{\nu_x} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \tilde{\Psi}_m^2 \right) \times \\ &\quad \times (\tilde{A} \cdot \sin(\tilde{\Psi}_m \cdot t) + \tilde{B} \cdot \cos(\tilde{\Psi}_m \cdot t)) = \\ &= \tilde{C} \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot m \cdot x}{\ell} \right) \times \\ &\quad \times \left(\tilde{A} \cdot \sin \left(t \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \left(\frac{\pi \cdot m \cdot \nu_x}{\ell} \right)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B} \cdot \cos \left(t \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho} - \left(\frac{\pi \cdot m \cdot \nu_x}{\ell} \right)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (31)$$

Примечание. При $m=0$, получаем нулевое решение $\tilde{u}_0 = E_x(x,t)_0 \equiv 0$.

Осталось обеспечить начальные условия (2). Так как дифференциальное уравнение (21) линейное неоднородное, то применить принцип наложения решений мы не можем. Однако известно, что его общим решением будет алгебраическая сумма общих решений соответственного однородного дифференциального уравнения (1) и частного решения неоднородного уравнения (21) [3, 4]. Причем, если ряд (31) сходится, то при известных условиях его сумма является решением уравнения (21). Полагая $t=0$ в формуле (31), в силу наличия начальных условий задачи (2) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= E_x(x,0)_m \Big|_{m=1,N} = \tilde{C} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell} \right) \right\} \times \\
 &\times \left(\underbrace{\tilde{A} \cdot \sin \left(0 \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \left(\frac{\pi \cdot m \cdot v_x}{\ell} \right)^2}_{0} \right)}_0 + \right. \\
 &\left. + \underbrace{\tilde{B} \cdot \cos \left(0 \cdot \sqrt{\frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}{\sigma \cdot c \cdot \rho}} - \left(\frac{\pi \cdot m \cdot v_x}{\ell} \right)^2}_{0} \right)}_0 \right) = \\
 &= \tilde{C} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell} \right) \right\} \cdot \left(\underbrace{\tilde{A} \cdot \sin 0}_0 + \underbrace{\tilde{B} \cdot \cos 0}_1 \right) = \\
 &= \tilde{C} \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot m \cdot x}{\ell} \right) \cdot (\tilde{A} \cdot 0 + \tilde{B} \cdot 1) = \\
 &= \underbrace{\tilde{C} \cdot \tilde{B}}_{E_{x \max}} \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot m \cdot x}{\ell} \right) = E_{x \max} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell} \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Ряд (32) представляет собой разложение на отрезке $x \in [0, \ell]$ функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам кратных дуг [3–10].

Для нахождения амплитуды моды волны $E_{x \max}(x)$ воспользуемся условием нормировки:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\ell} \underbrace{E^*(\vec{r})}_{\substack{\text{отражённая} \\ \text{волна}}} \cdot \underbrace{E(\vec{r})}_{\substack{\text{падающая} \\ \text{волна}}} dV = \\
 &= \int_0^{\ell} E^* \left(\begin{matrix} x, y, z \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix} \right) \cdot E \left(\begin{matrix} x, y, z \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix} \right) dx dy dz = \\
 &= \int_0^{\ell} \underbrace{E_{x \max}^*(x)}_{\substack{\text{отражённая} \\ \text{волна}}} \cdot \underbrace{E_{x \max}(x)}_{\substack{\text{падающая} \\ \text{волна}}} dx = \\
 &= \int_0^{\ell} E_{x \max}^2 \cdot \sin \left(\frac{m x \pi}{\ell} \right) \cdot \sin \left(\frac{m x \pi}{\ell} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Получим

$$E_{x \max}^2 \cdot \int_0^{\ell} \sin^2 \left(\frac{m x \pi}{\ell} \right) dx = 1. \tag{33}$$

Заметим, что на концах промежутка интегрирования в выражении (33) подынтегральная функция обращается в нуль:

$$\sin^2 \left(\frac{m x \pi}{\ell} \right) \Big|_{x=0} = \sin^2 \left(\frac{m x \pi}{\ell} \right) \Big|_{x=\ell} = 0.$$

Поэтому значение интеграла (33) можно получить, умножив среднее значение $\left\langle \sin^2 \left(\frac{m x \pi}{\ell} \right) \right\rangle = \frac{1}{2}$ функции, стоящей под знаком определенного интеграла (33), на длину промежутка $x = \ell$. В результате получим выражение (34):

$$\begin{aligned}
 E_{x \max}^2 \cdot \int_0^{\ell} \sin^2(m \cdot x \cdot \pi / \ell) dx &= \\
 &= \underbrace{E_{x \max}^2 \cdot \left\langle \sin^2(m \cdot x \cdot \pi / \ell) \right\rangle}_{1/2} \cdot \ell = \\
 &= E_{x \max}^2 \cdot \ell / 2 = 1 \Rightarrow E_{x \max} = \sqrt{2 / \ell}.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

В итоге, получим выражение для нормированной продольной составляющей мод собственных гармонических функций падающей волны электрического поля, принимающих вид:

$$\overline{E_m(x)}_{0 < x < \ell} = \sqrt{2 / \ell} \cdot \sin(m \cdot x \cdot \pi / \ell), \tag{35}$$

где $m = 1, N$, так как продольная составляющая вырожденной нулевой моды падающей волны $f_0(x) \Big|_{\forall x \in [0, \ell]} \equiv E_0(x) \Big|_{\forall x \in [0, \ell]} \equiv 0$ – нулевое решение задачи, поэтому $m \neq 0$. Причем постоянная в выражении (34)

$$E_{x \max} \Big|_{n=1,N} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} = const > 0$$

есть нормированная амплитуда для продольной составляющей мод собственных гармонических функций падающей волны электрического поля.

Аналогичным методом определяется нормированная, продольная составляющая мод в распределении магнитного поля $H = H(x)$ в СВЧ-тракте аттенюатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахарев С.И., Вольман В.И., Либ Ю.Н. и др. Справочник по расчету и конструированию СВЧ-полосковых устройств. М.: Советское радио, 1982, 328 с.
2. Мазепова О.И., Мещанов В.П., Прохорова Н.И., Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р. Справочник по элементам полосковой техники / Под ред. А.Л. Фельдштейна. М.: Связь, 1979. С. 4–71.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. С. 82–119, 447–475.

4. **Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П.** Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для ВУЗов / под ред. проф. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. М.: Радиотехника, 2009. 744 с.
5. **Майстренко В.К., Радионов А.А., Светлов С.Н.** Расчет периодической направляющей структуры на основе ЭМПЛ с резистивными пленками // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Самара: СГУ. Т. 8. № 2. С. 26.
6. **Кононов В.А.** Математические модели распределенных резисторов // М.: Радиотехника. 1981. № 1. С. 62–66.
7. **Никольский В.В., Козлов А.Ю.** Электродинамический анализ микрополосковых структур с поглощающими пленками. // Радиотехника. 1987. № 6. С. 55–60.
8. **Масловский С.И.** Электродинамика позиционных материалов с выраженной пространственной дисперсией: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. СПб., 2004.
9. **Гордон П.В.** Распространение и взаимодействие локализованных мод в нелинейных диссипативных средах: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.16. СПб., 1999.
10. **Майстренко В.К., Радионов А.А., Светлов С.Н.** Подавление волн высшего типа в экранированной микрополосковой линии с использованием резистивных пленок // Антенны. М., 2005. № 6/97. С. 68–72.

Григорьев (Фридман) Сергей Николаевич, ведущий инженер-электроник, ОАО "НПП "Салют"
603950, г. Нижний Новгород, ул. Ларина, д. 7,
тел.: +7 (881) 466-35-80
e-mail: sergey-fridman@mail.ru